关于全概率公式与贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率；
- 全概率公式是求“最后结果”的概率；
- 贝叶斯公式是已知“最后结果”，求“原因”的概率.

乘法公式

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

条件概率

全概率公式

关于全概率公式与贝叶斯公式

思考题

口袋中有a只白球、b只黑球。在下列情况下，求第k次取出的是白球的概率：

(1) 从中一只一只返回取球；

(2) 从中一只一只不返回取球；

(3) 从中一只一只返回取球，且返回的同时再加入一只同色球.

敏感性问题的调查

- 要调查“敏感性”问题中某种比例 p ;
- 两个问题： A：生日是否在7月1日前?
  B：是否考试作过弊?
- 抛硬币回答A或B.
- 答题纸上只有：“是”、“否”.
- 可用全概率公式分析“敏感性”问题.

§4 独 立 性

一、独立性的定义

例 1 袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，令：

A ={ 第一次取出白球 },

B ={ 第二次取出白球 },

分有放回和不放回情形讨论 $P(A), P(B), P(B \mid A)$.

（1）有放回情形：

$$P(A) = \frac{b}{a+b}$$

$$\boxed{B = AB \cup \overline{A}B}$$

得：$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$

$$= \frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{b}{a+b}$$

而， $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{b^2}{(a+b)^2}}{\dfrac{b}{a+b}}=\dfrac{b}{a+b}$

（2）不放回情形：

$$P(A)=\frac{b}{a+b}$$

由此例题你会得到什么结论？

所以， $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$

$$=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{b}{a+b}$$

而， $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}}{\dfrac{b}{a+b}}=\dfrac{b-1}{a+b-1}$

定义:

设 A、B 是两个随机事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 是相互独立的随机事件.

二、事件独立性的性质:

1）如果事件A 与 B 相互独立，而且 $\boxed{P(A)>0,}$

则 $P(B|A)=P(B).$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$$

2）必然事件S与任意随机事件A相互独立；

不可能事件 Φ与任意随机事件A相互独立.

3)若随机事件 A 与 B 相互独立，

这个性质很重要！

$\overline{A}$与B、A与$\overline{B}$、$\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立.

证明： 只证$\overline{A}$ 与 B 相互独立即可.

由于 $P(\overline{A}B)=P(B-AB)$

注意到 $AB\subset B$，由概率的可减性，得

$$P\left(\overline{A}B\right)=P(B)-P(AB)$$

$$=P(B)-P(A)P(B)\quad \text{(事件 } A \text{ 与 } B \text{ 的独立性)}$$

$$=\left[1-P(A)\right]P(B)=P\left(\overline{A}\right)P(B)$$

所以，事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立.

注意： 在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据**实际意义**来加以判断的。

例 2

设事件 A 与 B 满足：$P(A)P(B)\neq 0$,

若事件 A 与 B 相互独立，则 $AB\neq \Phi$;

若 $AB=\Phi$，则事件 A 与 B 不相互独立.

证明：

由于事件 A 与 B 相互独立，故

$$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$$

所以，$AB\neq \Phi$

由于$AB=\Phi$，所以

$$P(AB)=P(\Phi)=0,$$

但是，由题设 $P(A)P(B)\neq 0$

所以，$P(AB)\neq P(A)P(B)$

这表明，事件 A 与 B 不相互独立.

此例说明：$P(A)P(B)\neq 0$时，互不相容与相互独立不能同时成立。

三、多个事件的独立性

1）三个事件的独立性：设A、B、C是三个随机事件，

如果
$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

A,B,C这三个事件两两独立

则称A、B、C是相互独立的随机事件.

注意：在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的. 即：前三个等式的成立推不出最后一个等式；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立.

试想：n个随机事件的独立性的定义及性质?

2）n个事件的相互独立性：

设 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 为n个随机事件，如果下列 等式成立：

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) & (1\le i<j\le n) \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1\le i<j<k\le n) \\ \quad\cdots\cdots & \\ P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}) & (1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n) \\ \quad\cdots\cdots & \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) & \end{cases}$$

则称 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 这n个随机事件相互独立.

说 明

(1)在上面的公式中，

共有

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^0-C_n^1$$
$$=2^n-1-n$$

个等式。

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立.

反之不成立.

3）独立随机事件的性质：

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个随机事件相互独立，

则：（1）其中任意 $m(2 \le m \le n)$ 个随机事件也相互独立；

(2) $A_{i_1}, \cdots, A_{i_m}, \overline{A}_{i_{m+1}}, \cdots, \overline{A}_{i_n}$ 这 n 个随机事件也相互独立，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

4）相互独立事件至少发生其一的概率的计算：

在本章第3节介绍了下面这个公式

对任意 n 个事件 $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i A_j\right) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P\left(A_i A_j A_k\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1} P\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right)$$

在独立的条件下有：

若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是相互独立的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\ \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n})$$

特别地, 如果 $P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=p$

则有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-(1-p)^n$$

注 意

当 $n\to\infty$ 时, $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-(1-p)^n \to 1$$

说明：小概率事件虽然在一次试验中几乎是不发生的，但是迟早要发生。

试验中 A 至少出现一次的概率为

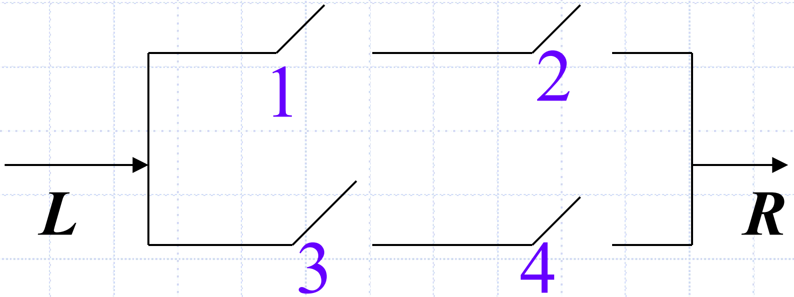
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-(1-p)^n \to 1$$

不论 p 多么小

例 3 设有电路如图，其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点。设各继电器接点闭合与否相互独立，且每一个继电器接点闭合的概率均为 p。求 L 至 R 为通路的概率。

解： 设事件 A_i (i=1,2,3,4) 为 “第 i 个继电器接点闭合”，“L 至 R 为通路” 这一事件可表示为:

$$A = A_1 A_2 \cup A_3 A_4 .$$



由和事件的概率公式及 A_1, A_2, A_3, A_4的相互独立性，得到

$$P(A)=P(A_1A_2\cup A_3A_4)$$

$$=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$$

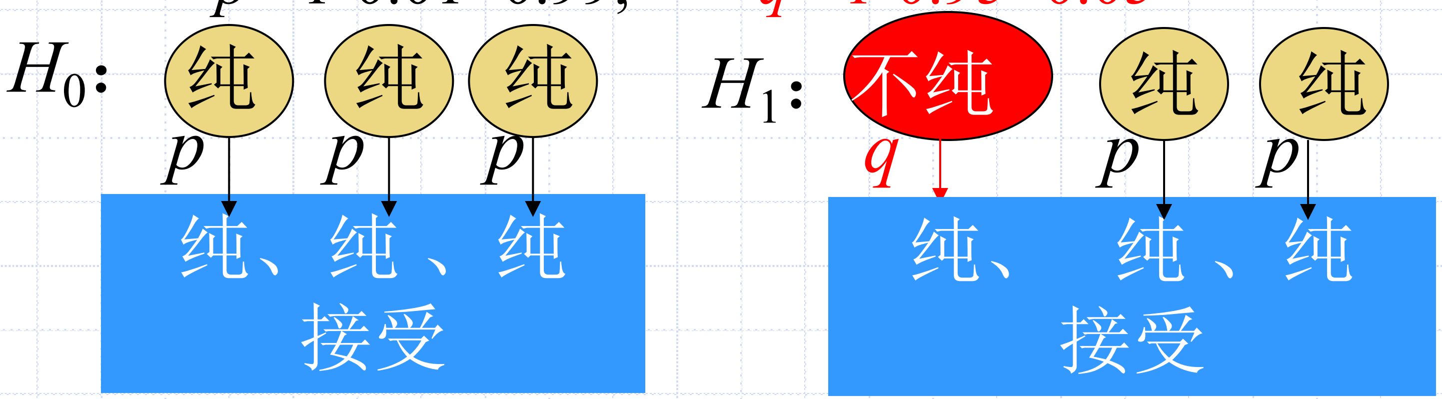
$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)$$
$$-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

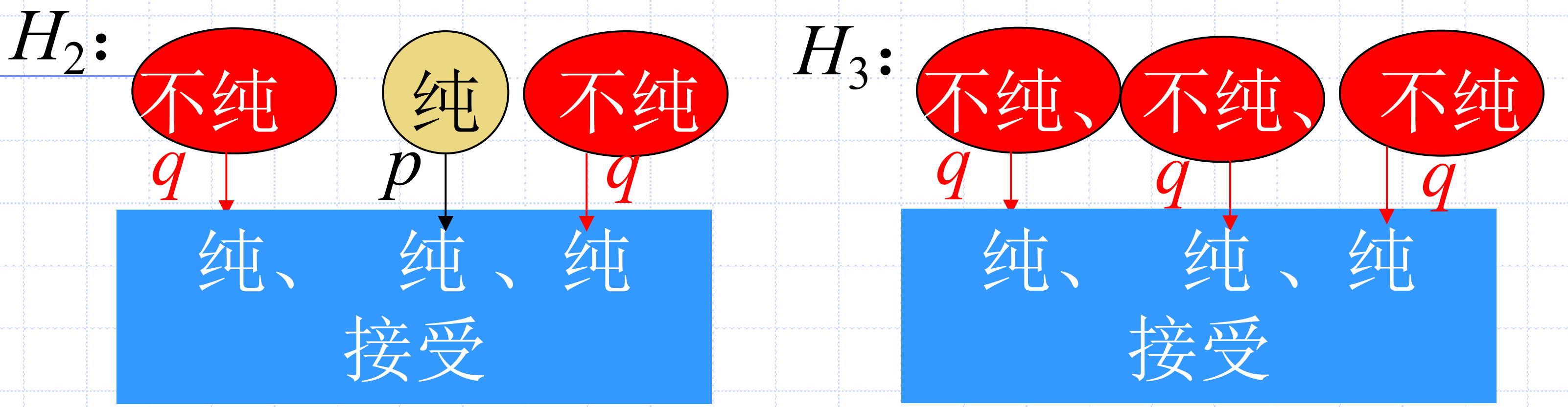
$$=p^2+p^2-p^4=2p^2-p^4.$$

例 4 要验收一批 (100 件) 乐器。验收方案如下：自该批乐器中随机地抽取 3 件测试 (设 3 件乐器的测试是相互独立的），如果至少有一件被测试为音色不纯，则拒绝接受这批乐器。

设一件音色不纯的乐器被测试出来的概率为 0.95，而一件音色纯的乐器被误测为不纯的概率为 0.01。如果这批乐器中恰有 4 件是音色不纯的，问这批乐器被接受的概率是多少？

$p=1-0.01=0.99,\qquad q=1-0.95=0.05$





$p=1-0.01=0.99$, $q=1-0.95=0.05$

解： 以 H_i (i=0,1,2,3)表示事件“随机取出的 3 件乐器中恰有 i 件音色不纯”，

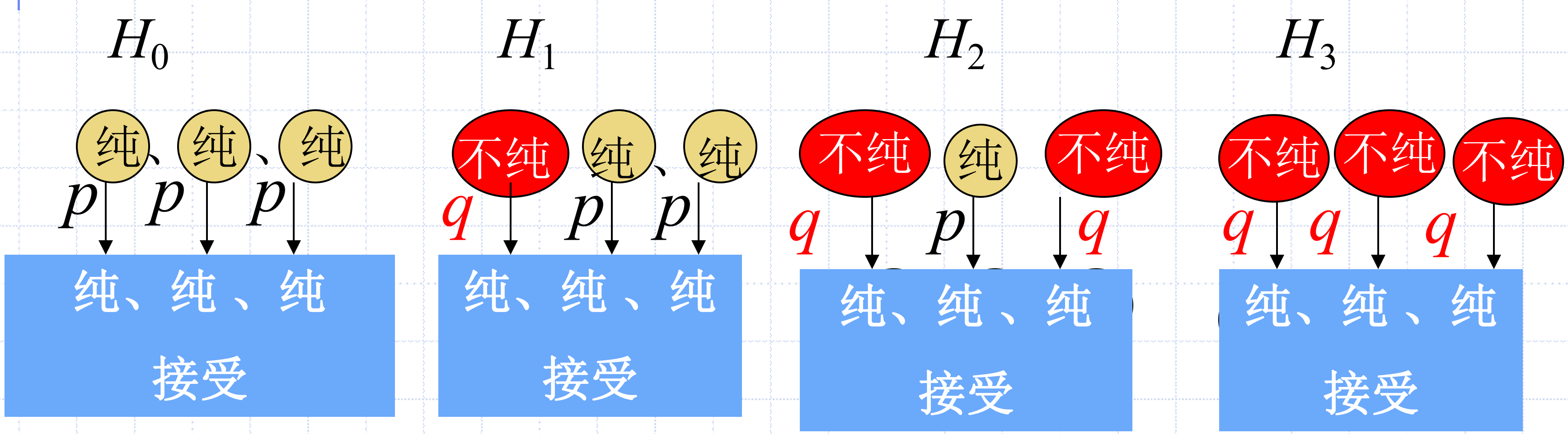
以 A 表示事件“这批乐器被接受”，即 3 件都被测试为音色纯的乐器。

由全概率公式有 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A\mid H_i)$

由测试的相互独立性得：

$$P(A\mid H_0)=(0.99)^3,\quad P(A\mid H_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$

$$P(A\mid H_2)=0.99\times(0.05)^2,\quad P(A\mid H_3)=(0.05)^3.$$



$p=1-0.01=0.99$, $q=1-0.95=0.05$

另外，按照超几何分布的概率计算公式得：

$$P(H_0)=C_{96}^{3}/C_{100}^{3},\quad P(H_1)=C_4^1C_{96}^{2}/C_{100}^{3},$$

$$P(H_2)=C_4^2C_{96}^{1}/C_{100}^{3},\quad P(H_3)=C_4^3/C_{100}^{3}.$$

代入公式有

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A\mid H_i)=0.8629.$$

本节要点：

1）两个事件的独立性及多个事件的独立性定义；

2）两个事件的独立性及多个事件的独立性的性质；

3）在独立性条件下，求n个事件至少发生一个的概率公式：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

注意：独立事件与互不相容事件的区别与关系；

两两独立与相互独立的区别。

第一章小　结

1 阐述了随机试验的特征以及随机事件之间的关系及运算。

2 给出了随机事件的频率及概率的含义和基本性质。

3 给出了条件概率的定义及乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。

4 给出了随机事件独立性的概念，会利用事件独立性进行概率计算。