概率论与数理统计

生活中与“概率”有关的事

1　中彩票问题，抽签问题。

2 扑克牌游戏。在一副扑克中任意抽出一张牌，这张牌是大王的可能性大还是红桃的可能性大?

3 在一个班中任意找2名同学，他们是同年出生的和同月出生的哪一种可能性比较大?

4 在 17世纪，意大利专业赌徒们都认为：三颗骰子掷出的点数之和为9的概率与为10的概率是相等的，真的吗?

5 某公司在搞促销活动的时候要搞“摸奖”活动，方法是买一件产品摸一次奖。现拟按中奖率为1%设大奖，其余99%为小奖。大奖奖品价值为1000元，小奖奖品价值为4元. 设计一个摸奖方案以满足公司的要求。

概率论的发展

1、 起源于博弈问题(15-16世纪)

2、产生于17世纪：

（1） 著名的赌金分配问题— 1654年，梅勒（Mere）和他朋友的赌金分配问题。

（2） 帕斯卡与费尔马（Fermat）的通信。

（3） 三年后，荷兰天文、物理、数学家惠更斯写出《论赌博中的计算》—最早的概率论著作。

3、得益于保险业的发展需求而发展起来。

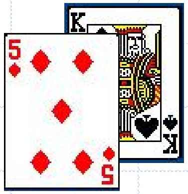
4、概率论作为一门独立的数学分支真正的奠基人是伯努利---《猜度术》

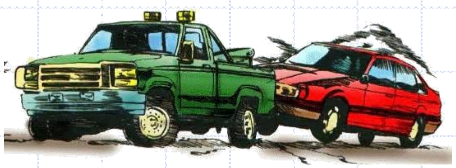
5、包括欧拉，伯努利兄弟，棣莫弗，高斯在内的许多著名学者对概率论的发展做出了重要贡献。

在生活当中，经常会接触到一些现象：

确定性现象：在一定条件下必然发生的现象。

随机现象：





概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科，是重要的一个数学分支。

随机现象是不是没有规律可言?

否!

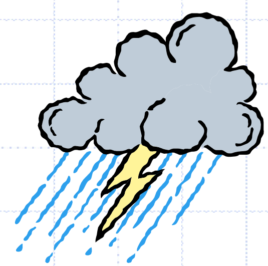
在一定条件下对随机现象进行大量重复观测和试验时会发现试验的结果会呈现某种规律性。

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科，是重要的一个数学分支。

“天有不测风云”和“天气可以预报”有矛盾吗? 无!

“天有不测风云”指的是随机现象一次实现的偶然性。

“天气可以预报”指的是研究者从大量的气象资料来探索这些偶然现象的规律性。



本课程的学习要求：

掌握处理随机现象的基本理论和方法，对概率统计的概念和方法有深入的理解，掌握概率统计常用方法的基本思想.

(1)通过概率论部分的学习，掌握概率论的基础知识，初步了解概率论公理化体系，为统计方法的应用打下必要的基础。

(2)通过数理统计部分的学习，初步掌握统计方法在实际中的应用，并能用一些方法处理较简单的实际问题。

第一章　概率论的基本概念

§1 随 机 事 件 的 概率

一 随 机 试 验

二 事件间的关系与运算

三 频 率 与 概 率

一、 随 机 试 验

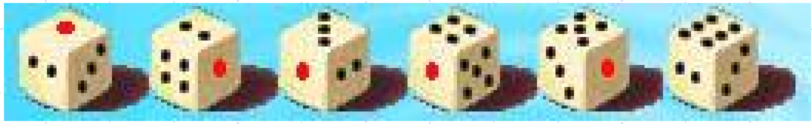
1) 随机试验（*R*andom *E*xperiment ）

包括各种各样的科学实验，也包括对事物的某一特征的观察。

其典型的例子有：

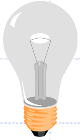
E_1：抛一枚硬币，观察正面H（Heads）、反面T（Tails）出现的情况。

E_2：抛一颗骰子，观察出现的点数。



E_3：观察某一时间段通过某一路口的车辆数。

E_4：观察某一电子元件的寿命。



E_5：观察某地区一昼夜的最高温度和最低温度。

这些试验具有以下特点：

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

称具备上面三个特点的试验为**随机试验**。

2) 样本空间(Space)

定义 将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**， 记为 S 。

样本空间的元素，称为**样本点**。

S_1 : $\{H, T\}$

S_2 : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

S_3 : $\{0,1,2,3\ldots\ldots\}$

S_4 : $\{t \mid t \geq 0\}$

S_5 : $\{(x, y) \mid T_0 \leq x, y \leq T_1\}$

要求：会写出随机试验的 样本空间。

3) 随 机 事 件

随机事件：试验 E 的样本空间 S 的子集，记作 A, B, C 等等；

基本事件：由一个样本点组成的单点集；

必然事件：样本空间 S 本身；

不可能事件：空集 $\varnothing$。

一个随机事件发生：
当且仅当它所包含的一个样本点在试验中出现。

注意：随机事件与集合对应.

例如：S_2 中

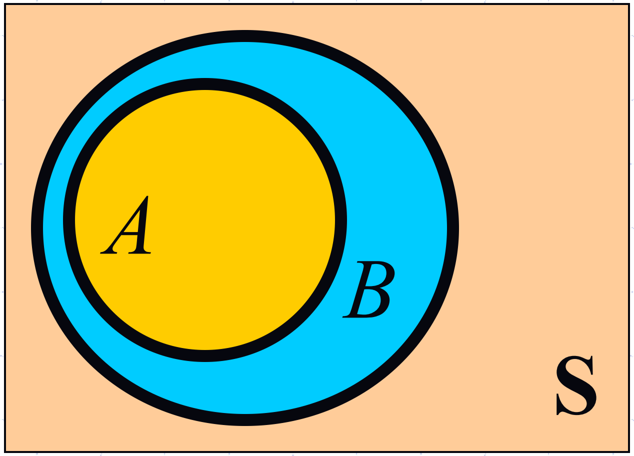
事件 $A=\{2,4,6\}$ 表示“出现偶数点”；

事件 $B=\{1,2,3,4\}$ 表示“出现的点数不超过4”.

概率故事： 1名数学家＝10个师

二、事件间的关系与运算

1) 包含关系 $A \subset B$



如果A发生必导致B发生，则

$$A \subset B$$

2）相等关系 $A = B \Leftrightarrow A \subset B$,且 $B \subset A$.

3) 和（并）事件 $A \cup B$

事件 $A \cup B$ 发生当且仅当 A, B 至少发生一个.

$\bigcup_k A_k$ 表示 A_k 中至少发生一个 .

4) 积（交）事件 $A\cap B=AB$

事件 $A\cap B$ 发生当且仅当

A,B 同时发生.

$\bigcap\limits_{k} A_k$ 表示所有 A_k 同时发生.

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

考察下列事件间的包含关系：

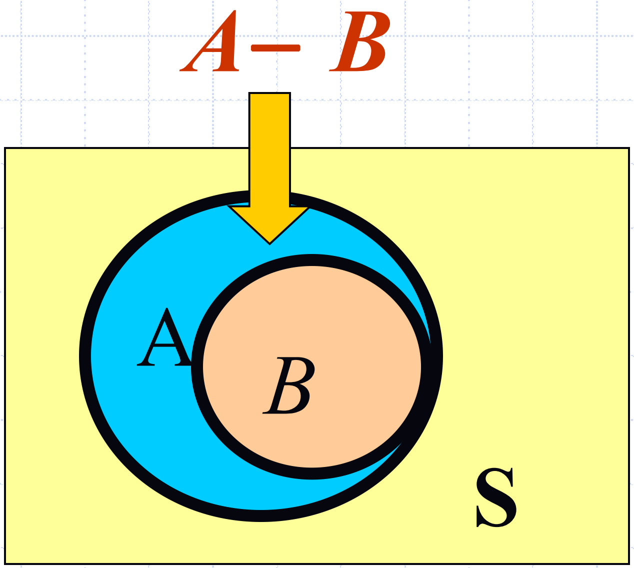
$$AB \qquad A \qquad B \qquad A\cup B$$

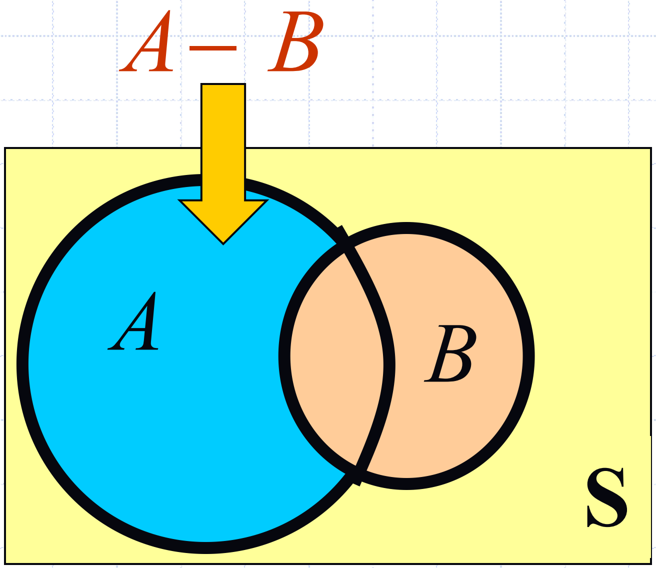
$$AB \subset A \subset A\cup B$$

$$AB \subset B \subset A\cup B$$

5) 差事件

$$A-B=A-AB=A\overline{B}$$





$A-B$ 发生当且仅当 A 发生 且 B 不发生.

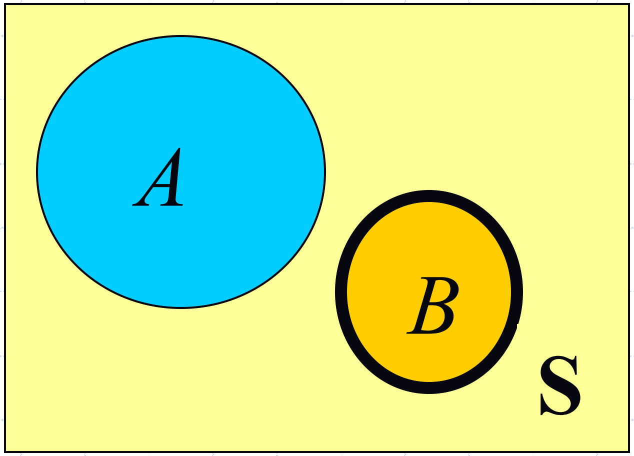
6) 互不相容（互斥）

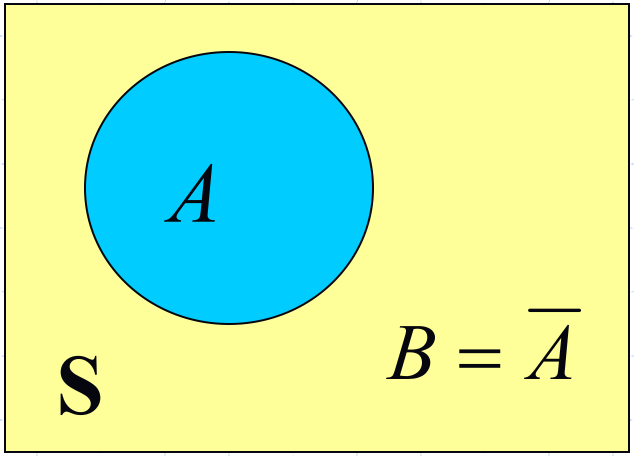
$A \cap B = \varnothing$

7) 对立事件 （逆事件）

$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = S$





请注意 互不相容与对立事件的区别！

E_4：观察某一电子元件的寿命。

例如，在S_4 中

事件 $A=\{t|t<1000\}$ 表示“产品是次品”

事件 $B=\{t|t\geq 1000\}$ 表示“产品是合格品”

事件 $C=\{t|t\geq 1500\}$ 表示“产品是一级品”

则 A与B是互为对立事件；

A与C是互不相容事件；

$B-C$表示“产品是合格品但不是一级品”；

BC 表示“产品是一级品”；

$B\cup C$ 表示“产品是合格品”.

8) 划分

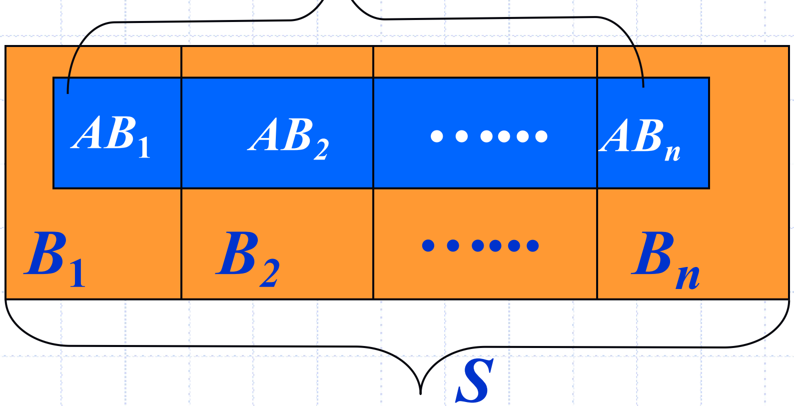
设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots B_n$ 为 E 的一组事件。若满足

(1) $B_iB_j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n;$

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S.$

则称 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.

$A=AB_1\cup AB_2\cdots\cup AB_n$



9) 随机事件的运算规律

幂等律： $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

交换律： $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgan（德摩根）定律(对偶律)：

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A}_{\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \overline{A}_{\alpha}$$

练习

1. 试用随机事件A、B、C表示下列事件：

① A出现；　A

② 仅A出现；　$A\bar{B}\bar{C}$

③ 恰有一个出现；　$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

④ 至少有一个出现；　$A \cup B \cup C$

⑤ 至多有一个出现；　$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

⑥ 都不出现；　$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

⑦ 不都出现；　$\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

⑧ 至少有两个出现；　$AB \cup AC \cup BC$

2. 设事件 A = “甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则 A 的对立事件为（ ④ ）

① 甲种产品滞销，乙种产品畅销；

② 甲、乙两种产品均畅销；

③ 甲种产品滞销；

④ 甲种产品滞销或者乙种产品畅销.

要求： 会用集合论语言和概率论语言表述事件的关系.

掌握： De Morgan定律.

内容小结

随机试验 → 样本空间 → 随机事件 → 事件的集合表示

事件在一次试验中是否发生具有随机性，它发生的可能性大小是其本身所固有的性质。

概率是度量某事件发生可能性大小的一种数量指标。它介于0与1之间。