DOI:10.13876/J.cnki.ydnse.2018.01.011

和积幻阵的定义及代数性质

郭 萍,刘兴祥*,何敏梅

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:在和幻阵、积幻阵的相关定义和性质的基础上,给出和积幻阵的相关定义,并将其代数性质分为矩阵性质和线性性质进行研究。

关键词:和积幻阵;矩阵性质;线性性质;代数性质

中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1004-602X(2018)01-0011-03

矩阵是代数学领域一个重要的研究内容,有着丰富的研究成果[1,2],幻阵是一类特殊的矩阵,在研读了许多经典教材后,结合文献[3-5],以下将给出和积幻阵的规范定义及相关代数性质。

1 和积幻阵的相关定义

定义1 设 F 是数域,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$,如果矩阵 $\boldsymbol{A}$:

(1) $\boldsymbol{A}(\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{E}_{i1}(n,1))=S_r(\sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}_{j1}(n,1))$;

(2) $(\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{E}_{1i}(1,m))\boldsymbol{A}=S_c(\sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}_{1j}(1,n))$;

(3) $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$, $\prod\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=p_r$;

(4) $\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $\prod\limits_{i=1}^{m}a_{ij}=P_c$。

满足条件(1)(3),则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 $m\times n$ 阶行和积幻阵,满足条件(2)(4),则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 $m\times n$ 阶列和积幻阵,满足条件(1)(2)(3)(4),则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 $m\times n$ 阶行列和积幻阵,$S_r(\boldsymbol{A})$ 记为 $m\times n$ 阶行和积幻阵(或行列和积幻阵)$\boldsymbol{A}$ 的行幻和,$S_c(\boldsymbol{A})$ 为 $m\times n$ 阶列和积幻阵(或行列和积幻阵)$\boldsymbol{A}$ 的列幻和,$P_r(\boldsymbol{A})$ 为 $m\times n$ 阶行和积幻阵(或行列和积幻阵)$\boldsymbol{A}$ 的行幻积,$P_c(\boldsymbol{A})$ 为 $m\times n$ 阶列和积幻阵(或行列和积幻阵)$\boldsymbol{A}$ 的列幻积。

定义2 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在定义1的基础上满足:$m=n$, $S_r=S_c=S$, $P_c=P_r=P$ 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶弱和积幻方,$S(\boldsymbol{A})$ 为 m 阶弱和积幻方 $\boldsymbol{A}$ 的幻和,$P(\boldsymbol{A})$ 为 m 阶弱和积幻方 $\boldsymbol{A}$ 的幻积。

定义3 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在定义1的基础上满足:$m=n$, $S_r=S_c=\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{E}_{1i}(1,m)\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i1}(m,1)=\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{E}_{1i}(1,m)\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{m+1-i,1}(m,1)=S$, $p_c=p_r=\prod\limits_{i=1}^{m}a_{ii}=\prod\limits_{i=1}^{m}a_{i,m+1-i}=p$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶和积幻方,$S(\boldsymbol{A})$ 为 m 阶和积幻方 $\boldsymbol{A}$ 的幻和,$P(\boldsymbol{A})$ 为 m 阶和积幻方 $\boldsymbol{A}$ 的幻积。

定义4 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在定义3的基础上满足 $a_{ij}\neq a_{kl}$($i\neq k$ 或 $j\neq l$, $i,j,k,l=1,2,\cdots,m$),则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶异元和积幻方,$S(\boldsymbol{A})$ 为 m 阶异元和积幻方 $\boldsymbol{A}$ 的幻和,$P(\boldsymbol{A})$ 为 m 阶异元和积幻方 $\boldsymbol{A}$ 的幻积。

特别地,当矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times m}\in\{a+1,a+2,\cdots,a+m^2\}^{m\times m}$, $a\in\mathbf{Z}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶连元和积幻方。

收稿日期:2018-01-08

基金项目:延安大学研究生教育创新计划项目(YCX201719)

作者简介:郭 萍(1994—),女,陕西合阳人,延安大学硕士研究生。 *通讯作者

特别地，当矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times m}\in\{1,2,\cdots,m^2\}^{m\times m}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶始元和积幻方。

特别地，当矩阵 $\boldsymbol{A}=(|a_{ij}|)_{m\times m}\in\{1,2,\cdots,m^2\}^{m\times m}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶类自然数和积幻方。

2 和积幻阵的线性性质

定理 1 设 F 是数域，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{F}^{m\times n}$，$\forall k,l\in F$，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶行和积幻阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶行和积（行列和积）幻阵，且行幻和分别为 $S_r(\boldsymbol{A})$，$S_r(\boldsymbol{B})$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶行和幻阵，且行幻和 $S_r(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_r(\boldsymbol{A})\pm lS_r(\boldsymbol{B})$。

证明：因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶行和积幻阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶行和积（行列和积）幻阵

所以 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=S_r(\boldsymbol{A})$，

$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}=S_r(\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,m)$，

可得 $\forall k,l\in F$，

$k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}=(ka_{ij}+lb_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，

$\sum\limits_{j=1}^{n}(ka_{ij}\pm lb_{ij})=k\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\pm l\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}=kS_r(\boldsymbol{A})\pm lS_r(\boldsymbol{B})$。

则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶行和幻阵，且行幻和 $S_r(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_r(\boldsymbol{A})\pm lS_r(\boldsymbol{B})$。

推论 1 是定理 1 中 k,l 取特殊值时的情况。

推论 1 设 F 是数域，矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$，$\forall k\in F$ 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶行和积幻阵，且行幻和、行幻积分别为 $S_r(\boldsymbol{A})$、$P_r(\boldsymbol{A})$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶行和积幻阵，且行幻和 $S_r(k\boldsymbol{A})=kS_r(\boldsymbol{A})$，行幻积 $P_r(k\boldsymbol{A})=k^nP_r(\boldsymbol{A})$。

定理 2 设 F 是数域，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{F}^{m\times n}$，$\forall k,l\in F$，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶列和积幻阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶列和积（行列和积）幻阵，且列幻和分别为 $S_c(\boldsymbol{A})$，$S_c(\boldsymbol{B})$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶列和幻阵，且列幻和 $S_c(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_c(\boldsymbol{A})\pm lS_c(\boldsymbol{B})$。

证明：因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶列和积幻阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶列和积（行列和积）幻阵

所以 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=S_c(\boldsymbol{A})$，

$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}=S_c(\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,m)$，

可得 $\forall k,l\in F$，

$k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}=(ka_{ij}\pm lb_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，

$\sum\limits_{i=1}^{m}(ka_{ij}\pm lb_{ij})=k\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\pm l\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ij}=kS_c(\boldsymbol{A})\pm lS_c(\boldsymbol{B})$。

则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶列和幻阵，且列幻和 $S_c(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_c(\boldsymbol{A})\pm lS_c(\boldsymbol{B})$。

推论 2 是定理 2 中 k,l 取特殊值时的情况。

推论 2 设 F 是数域，矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$，$\forall k\in F$ 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶列和积幻阵，且列幻和、列幻积分别为 $S_c(\boldsymbol{A})$、$P_r(\boldsymbol{A})$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶列和积幻阵，且列幻和 $S_c(k\boldsymbol{A})=kS_c(\boldsymbol{A})$、列幻积 $P_c(k\boldsymbol{A})=k^mP_c(\boldsymbol{A})$。

定理 3 设 F 是数域，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{m\times n}$，$\forall k,l\in F$，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 阶行列和积幻阵，且行幻和分别为 $S_r(\boldsymbol{A})$，$S_r(\boldsymbol{B})$，列幻和分别为 $S_c(\boldsymbol{A})$，$S_c(\boldsymbol{B})$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶行列和幻阵，且行幻和 $S_r(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_r(\boldsymbol{A})\pm lS_r(\boldsymbol{B})$，列幻和 $S_c(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_c(\boldsymbol{A})\pm lS_c(\boldsymbol{B})$。

证明：因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都为 $m\times n$ 阶行列和积幻阵

对于行和积幻阵，

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in F^{m\times n}$，$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=S_r(\boldsymbol{A})$，

$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in F^{m\times n}$，$\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}=S_r(\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,m)$，

可得 $\forall k,l\in F$，$k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}=(ka_{ij}\pm lb_{ij})\in F^{m\times n}$，

$\sum\limits_{i=1}^{m}(ka_{ij}\pm lb_{ij})=k\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\pm l\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ij}=kS_c(\boldsymbol{A})\pm lS_c(\boldsymbol{B})$。

则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶行列和幻阵，且行幻和 $S_r(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_r(\boldsymbol{A})\pm lS_r(\boldsymbol{B})$，列幻和 $S_c(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS_c(\boldsymbol{A})\pm lS_c(\boldsymbol{B})$。

推论 3 是定理 3 中 k,l 取特殊值时的情况。

推论 3 设 F 是数域，矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$，$\forall k\in F$，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶行列和积幻阵，且行幻和、列幻和分别为 $S_r(\boldsymbol{A})$，$S_c(\boldsymbol{A})$，行换积、列幻积分别为 $P_r(\boldsymbol{A})$，$P_c(\boldsymbol{A})$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶行列和积幻阵，且行幻和、列幻和分别为 $kS_r(\boldsymbol{A})$，$kS_c(\boldsymbol{A})$。行幻积 $P_r(k\boldsymbol{A})=k^nP_r(\boldsymbol{A})$，列幻积 $P_c(k\boldsymbol{A})=k^mP_c(\boldsymbol{A})$。

定理 4 设 F 是数域，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{m\times m}$，对 $\forall k,l\in F$，若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶弱和积幻方，$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶弱和积幻阵（和积幻方、异元和积幻方、连元和积幻方、类自然数和积幻方），且幻和分别为 $S(\boldsymbol{A})$，$S(\boldsymbol{B})$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 m 阶弱和幻方，且幻和 $S(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS(\boldsymbol{A})\pm lS(\boldsymbol{B})$。

证明:因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶弱和积幻阵

由定理 3 的证明同理可得,矩阵 $k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$ 是 m 阶弱和幻方,且幻和 $S(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS(\boldsymbol{A})\pm lS(\boldsymbol{B})$。

推论 4 是定理 4 中 k,l 取特殊值时的情况。

推论 4　设 F 是数域,矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$, $\forall k\in F$,若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶弱和积幻方(和积幻方、异元和积幻方、连元和积幻方、类自然数和积幻方),且幻和为 $S(\boldsymbol{A})$,幻积为 $P(\boldsymbol{A})$,则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 是 m 阶弱和积幻阵,且幻和 $S(k\boldsymbol{A})=kS(\boldsymbol{A})$,幻积 $P(k\boldsymbol{A})=k^mP(\boldsymbol{A})$。

定理 5　设 F 是数域,矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{m\times m}$,对 $\forall k$, $l\in F$,若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶和积幻方(异元和积幻方、连元和积幻方、类自然数和积幻方),$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶和积幻方(异元和积幻方、连元和积幻方、类自然数和积幻方),且幻和分别为 $S(\boldsymbol{A})$, $S(\boldsymbol{B})$,则矩阵 $k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B}$ 是 m 阶和幻方,且幻和 $S(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS(\boldsymbol{A})\pm lS(\boldsymbol{B})$。

证明:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶和幻方,

由定理 3 的证明同理可得,矩阵 $k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$ 是 m 阶和幻方,且幻和 $S(k\boldsymbol{A}\pm l\boldsymbol{B})=kS(\boldsymbol{A})\pm lS(\boldsymbol{B})$。

推论 5 是定理 5 中 k,l 取特殊值时的情况。

推论 5　设 F 是数域,矩阵 $\in F^{m\times m}$, $\forall k\in F$,若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶和积幻方(异元和积幻方、连元和积幻方、类自然数和积幻方),且幻和为 $S(\boldsymbol{A})$,幻积为 $P(\boldsymbol{A})$,则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 是 m 阶和积幻方,且幻和 $S(k\boldsymbol{A})=kS(\boldsymbol{A})$,幻积 $P(k\boldsymbol{A})=k^mP(\boldsymbol{A})$。

定理 6　设 F 是数域,矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times m}$, $\forall k(k\neq 0)$,若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶异元和积幻方(连元和积幻方、类自然数和积幻方),且幻和为 $S(\boldsymbol{A})$,幻积为 $P(\boldsymbol{A})$,则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 是 m 阶异元和积幻方,且幻和为 $S(k\boldsymbol{A})=kS(\boldsymbol{A})$,幻积为 $P(k\boldsymbol{A})=k^mP(\boldsymbol{A})$。

证明:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶异元和幻方

由定理 3 的证明同理可得,矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 是 m 阶异元和积幻方,且幻和为 $S(k\boldsymbol{A})=kS(\boldsymbol{A})$,幻积为 $P(k\boldsymbol{A})=k^mP(\boldsymbol{A})$。

定理 7　设 F 是数域,矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times m}$,若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶异元和积幻方(连元和积幻方、类自然数和积幻方),且幻和为 $S(\boldsymbol{A})$,幻积为 $P(\boldsymbol{A})$,则矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 是 m 阶异元和积幻方(连元和积幻方、类自然数和积幻方),且幻和 $S(-\boldsymbol{A})=-S(\boldsymbol{A})$,幻积 $P(-\boldsymbol{A})=-P(\boldsymbol{A})$。

证明:若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶异元和幻方,且幻和为 $S(\boldsymbol{A})$

由定理 5 的证明同理可得,矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 是 m 阶异元和积幻方,且幻和为 $S(-\boldsymbol{A})=-S(\boldsymbol{A})$,幻积为 $P(-\boldsymbol{A})=-P(\boldsymbol{A})$。

3　和积幻阵的矩阵性质

由和积幻阵的定义及文献[3]中和幻阵的矩阵性质可得以下结论。

定理 8　设 F 是数域,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times m}\in F^{m\times n}$。

(1)如果 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶弱和积幻方,则幻和是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

(2)如果 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶和积幻方,则幻和既是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值又是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹。

定理 9　设 F 是数域,矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{P}_m\in\{0,1\}^{m\times m}$, $\boldsymbol{P}_n\in\{0,1\}^{n\times n}$, $\boldsymbol{P}_m$, $\boldsymbol{P}_n$ 是置换矩阵, $\boldsymbol{P}_{i,m+1-i}(i=1,2,\cdots,m)$ 是 m 阶单位矩阵交换 i 与 $m+1-i$ 两行后得到的矩阵,

(1)如果 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 $m\times n$ 阶行(列、行列)和积幻阵,则有 $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n$ 也是数域 F 上的 $m\times n$ 阶行(列、行列)和积幻阵;

(2)如果 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶和积幻方,则有 $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n$ 也是数域 F 上的 m 阶和积幻方;

(3)如果 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 m 阶和积幻方,则有 $\boldsymbol{P}_{i,m+1-i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{i,m+1-i}(i=1,2,\cdots,m)$ 也是数域 F 上的 m 阶和积幻方。

参考文献:

[1]强春晨. 始元幻方的广义 Kronecker 积的保持性问题[D]. 延安:延安大学,2014.

[2]朱磊. 广义平方幻阵的广义 Hadamard 积的保持性[D]. 延安:延安大学,2015.

[3]郭萍,刘兴祥. 和幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版),2017,36(1):21-27.

[4]郭萍,刘兴祥,何敏梅. 积幻阵的定义及矩阵性质[J]. 延安大学学报(自然科学版),2017,36(3):72-74.

[5]郭萍,刘兴祥,何敏梅. 异元和幻阵的同构异型体及计数研究[J]. 江西科学,2018,36(1):11-13+30.

[责任编辑　毕　伟]

(下转第 16 页)