

冲击噪声下基于矩阵预处理的稀疏重构 DoA 估计

赵季红^{①②} 马兆恬^{*①} 曲桦^② 王伟华^②

^①(西安邮电大学通信与信息工程学院 西安 710061)

^②(西安交通大学电子信息学院 西安 710054)

摘要: 针对冲击噪声下用稀疏重构的方法不能准确估计波达方向的问题, 该文提出基于多项式矩阵预处理的稀疏重构的波达方向(DoA)估计方法。由于冲击噪声的二阶矩不存在, 基于二阶矩估计的子空间类算法和稀疏重构类算法不能有效估计出波达方向, 且不能很好地处理相干信源。为了解决这个问题, 采用多项式预处理技术对接收信号的自相关函数和方向矢量进行预处理, 并在此基础上利用稀疏重构技术进行 DoA 估计。多项式预处理可以缩小矩阵的奇异值分布, 使得反映噪声能量的奇异值分布更加明显, 从而有利于减小冲击噪声的影响。仿真结果表明, 算法在冲击噪声环境下能准确稳定地估计出两种信源的波达方向, 尤其是在冲击噪声较强的情况下表现出灵敏度高、鲁棒性好的优点。

关键词: DoA 估计; 冲击噪声; 稀疏重构; 多项式预处理

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)03-0670-06

DOI: 10.11999/JEIT170371

DoA Estimation Based on Matrix Preconditioning Through Sparse Reconstruction in Impulsive Noise

ZHAO Jihong^{①②} MA Zhaotian^① QU Hua^② WANG Weihua^②

^①(Communication and Information Engineering, Xi'an University of Posts, Xi'an 710061, China)

^②(Department of Information and Communication Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710054, China)

Abstract: Sparse reconstruction method suffers severe degradation in presence of impulsive noise. To deal with this problem, this paper proposed a DoA estimation method based on polynomial matrix preconditioning through sparse reconstruction. Based on the sparse reconstruction, multiply the covariance function and the direction vector by Polynomial preprocessing, which can reduce the distribution matrix of singular values, improve singular value ratio, and exhibit better sparsity. Simulation results demonstrate that the proposed algorithm achieves accurate DoA in coherent and incoherent signal sources under impulsive noise, especially have high accuracy and robustness in the heavy impulsive noise.

Key words: DoA estimation; Impulsive noise; Sparse reconstruction; Polynomial preconditioning

1 引言

在现实生活中我们遇到的噪声基本是非高斯的, 如大气中的噪声、无线信道噪声、宇宙电磁波等都是呈突发状且幅度大, 具有显著冲击性的噪声。此外, 由于相干信源的存在, 会造成信号子空间的向量散发到噪声子空间去, 导致波达方向(Direction-of-Arrival, DoA)估计错误。面对这两个

问题, 传统的 DoA 估计方法^[1,2]无法处理, 因此针对非相干信源和相干信源在冲击噪声环境下的研究^[3,4]是非常重要的。

现有冲击噪声背景下的研究是基于分数低阶统计量^[5,6]和噪声的分布特性提出的, 这些方法有空时 DoA 估计^[7]、基于相关熵的稳健型 ESPRIT 算法^[8]、S α S 去冲击 DoA 估计新方法^[9]等。但是这些算法需要知道信号的先验信息, 且不能处理相关信号。针对这些问题, 近些年, Malioutov 等人^[10]提出在高斯白噪声下的基于稀疏重构的波达方向估计方法, 将原本的 DoA 估计转化为稀疏信号重构的 DoA 估计, 且不需要预先知道信号信息, 既能处理非相关信号也能处理相关信号。但是当噪声环境是冲击噪声时, 该算法并不能准确地、稳定地估计出波达方

收稿日期: 2017-04-24; 改回日期: 2017-10-23; 网络出版: 2017-11-23

*通信作者: 马兆恬 wasabi603303961@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61372092), 教育部中移动项目(MCM20150102)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61372092), The Ministry of Education in the Mobile Project (MCM20150102)

向。

矩阵预处理技术广泛应用于处理大型稀疏线性方程组^[11]。该技术可以缩小特征值分布，使得有用信号能量更加集中。为了在冲击噪声环境下准确估计出 DoA，本文利用多项式预处理技术^[12,13]对接收信号的协方差矩阵进行了预处理，使得有用信号能量更加集中，从而相对地抑制了冲击噪声带来的影响，达到了在冲击噪声环境下利用稀疏重构准确估计出 DoA 的目的。结果表明，本文提出方法能更加准确地、有效地处理非相干信号和相干信号，尤其在较强冲击噪声的情况下表现出更好的鲁棒性和灵活性。

2 问题描述

假设 K 个不同方向的远场窄带信号入射到 $M(M > K)$ 个阵元间距为半个波长的均匀线阵 ULA (Uniform Linear Array) 上，则阵列接收信号 $\mathbf{x}(t)$ 可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中， $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ 是入射信号的方向矢量矩阵，其中 $\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-j2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi(M-1)d \sin(\theta_k)/\lambda}]^T$ 为第 k 个信号的导引矢量， $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ 表示 $K \times 1$ 的输入信号矩阵，其中 $s_k(t)$ 是第 k 个来自方向 θ_k ，且功率为 σ_k^2 的入射信号， $\mathbf{n}(t)$ 代表的是冲击噪声。本文是在冲击噪声背景下进行波达方向估计的研究。

冲击噪声呈突发状，具有显著的尖峰脉冲性，因此，它不适用于高斯分布来建模，而需要具有更长拖尾的概率分布来描述，而 α 稳定分布^[14]满足这样一种特性，因此利用 α 稳定分布对文中使用的冲击噪声环境进行建模，具体表述如下：

定义 若对于随机变量 n 的特征函数满足：

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(j\mu t - \delta^\alpha |t|^\alpha (1 + j\beta \text{sign}(t) \tan(\alpha\pi/2))), & \alpha \neq 1 \\ \exp(j\mu t - \delta |t|^\alpha (1 + j\beta \text{sign}(t) \ln |t|)), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中， $\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ ， $-\infty < \mu < \infty$ ， $\delta > 0$ ，

$0 < \alpha \leq 2$ ，则称 n 服从于 α 的稳定分布。式(1)中 $\alpha, \beta, \mu, \delta$ 4 个参数确定之后即可确定 α 稳定分布，记作 $n \sim S(\alpha, \beta, u, \delta)$ 。

4 个参数的物理意义分别为： α 为特征指数，其范围限制在 $0 < \alpha \leq 2$ ， α 越小，则稳定密度分布函数的尾巴拖得更长，脉冲越明显； β 为偏度参数，其范围限制在 $-1 \leq \beta \leq 1$ ，代表分布的对称情况； $\mu (-\infty < \mu < \infty)$ 为移位参数，代表了密度函数在 x 轴上的偏移程度； δ 为尺度因子，也称为分散系数，描述了分布的宽度。

假设入射信号 $\mathbf{s}(t)$ 是零均值广义平稳随机信号，且和噪声不相关。由式(1)获得接收信号的协方差矩阵表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} \\ &= \mathbf{A}(\theta) E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\} \mathbf{A}^H(\theta) + E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} \end{aligned} \quad (3)$$

其中， $E(\cdot)$ 表示矩阵求期望操作。

结合实际可知，进行波达方向估计时不能预先知道信号的个数和方向等信息，因此需要从整个空域中的所有 $\bar{K} (\bar{K} \gg M > K)$ 个角度范围 $\Theta = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_{\bar{K}}\}$ 中找到稀疏分布的 K 个信号到达角。

因此，这里选用更贴合实际的稀疏信号表示模型处理问题。天线端接收到的稀疏信号的矩阵表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= [\mathbf{b}(\bar{\theta}_1), \mathbf{b}(\bar{\theta}_2), \dots, \mathbf{b}(\bar{\theta}_{\bar{K}})] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \bar{s}_1(t_1) & \bar{s}_1(t_2) & \cdots & \bar{s}_1(t_L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{s}_{\bar{K}}(t_1) & \bar{s}_{\bar{K}}(t_2) & \cdots & \bar{s}_{\bar{K}}(t_L) \end{bmatrix} + \mathbf{N}(t) \\ &= \mathbf{B}(\Theta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中， L 是观测数据的快拍数， $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_L)]$ 为 $M \times L$ 维的阵列接收信号的观测模型， $\mathbf{B}(\Theta) = [\mathbf{b}(\bar{\theta}_1), \mathbf{b}(\bar{\theta}_2), \dots, \mathbf{b}(\bar{\theta}_{\bar{K}})]$ 是整个空间域中所有 $\bar{K} (\bar{K} \gg M > K)$ 个可能的信号角度 $\Theta = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_{\bar{K}}\}$ 的方向矢量，其中 $\mathbf{b}(\bar{\theta}_i) = [1, e^{-j2\pi d \sin(\bar{\theta}_i)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi(M-1)d \sin(\bar{\theta}_i)/\lambda}]^T$ 是所有角度范围中第 i ($i = 1, 2, \dots, \bar{K}$) 个角度的导引矢量， $\mathbf{S}(t) = [\bar{\mathbf{s}}(t_1), \bar{\mathbf{s}}(t_2), \dots, \bar{\mathbf{s}}(t_L)]$ 是稀疏信号矢量，只有当整个角度范围中的信号方向和真实信号到达角度一致时， $\mathbf{S}(t) = [\bar{\mathbf{s}}(t_1), \bar{\mathbf{s}}(t_2), \dots, \bar{\mathbf{s}}(t_L)]$ 中对应角度的元素非零。这就意味着只要我们找到 $\bar{\mathbf{s}}(t_i)$ 中的非零元素也就估计出了信号方向， $\mathbf{N}(t) = [\mathbf{n}(t_1), \mathbf{n}(t_2), \dots, \mathbf{n}(t_L)]$ 是冲击噪声。

为了方便起见，式(4)可以简写为

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (5)$$

根据文献[10]可知，在传感器上没有噪声的情况

下, 信号矢量的集合将位于 1 维子空间中, 此时, 不需要整个快拍数 L 下的全部向量, 而只需要保留子空间的 K 个向量组成稀疏信号向量。为了保留信号子空间, 我们对式(5)中的稀疏信号模型进行奇异值分解得到信号子空间, 同时将快拍数从 L 减小到信号个数 K , 这样得到模型的每一列都对应一个信号向量。

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{V}^H \quad (6)$$

其中, \mathbf{U} 为 M 阶正交矩阵, 其列由 $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ 的特征向量组成, \mathbf{V} 为 L 阶正交矩阵, 其行由 $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ 的特征向量组成, \mathbf{D} 为 $M \times L$ 阶对角矩阵, 此时, 利用式(6)的奇异值分解结果, 可以对式(5)进行降维操作, 以减小算法的复杂度。定义 $\mathbf{X}_{\text{SV}} = \mathbf{X}\mathbf{V}\mathbf{D}_K$, $\mathbf{S}_{\text{SV}} = \mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{D}_K$ 和 $\mathbf{N}_{\text{SV}} = \mathbf{N}\mathbf{V}\mathbf{D}_K$, $\mathbf{D}_K = [\mathbf{I}_K \mathbf{0}^T]$, 其中 $\mathbf{0}$ 是 $K \times (L - K)$ 维的零矩阵。则式(5)等价于

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{SV}} &= [\mathbf{b}(\bar{\theta}_1), \mathbf{b}(\bar{\theta}_2), \dots, \mathbf{b}(\bar{\theta}_K)] \\ &\times \begin{bmatrix} \bar{s}_1(t_1) & \bar{s}_1(t_2) & \dots & \bar{s}_1(t_K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{s}_K(t_1) & \bar{s}_K(t_2) & \dots & \bar{s}_K(t_K) \end{bmatrix} + \mathbf{N}_{\text{SV}} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{S}_{\text{SV}} + \mathbf{N}_{\text{SV}} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)可以知道, \mathbf{X}_{SV} 的维度为 $M \times K$, 其中 K 是信号个数。逐列地考虑式(7), 其中的每一列都对应一个信号空间矢量, 则对应的矢量形式可以表示为

$$\mathbf{x}^{\text{SV}}(k) = \mathbf{B}\mathbf{s}^{\text{SV}}(k) + \mathbf{n}^{\text{SV}}(k), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (8)$$

式(8)对应后文具体计算处理时建立的目标函数中的稀疏解矢量 $\mathbf{s}^{(l_2)} = [s_1^{(l_2)}, s_2^{(l_2)}, \dots, s_K^{(l_2)}]$ 中的元素 $s_i^{(l_2)} = \sqrt{\sum_{k=1}^K (s_i^{\text{SV}}(k))^2} = \|\mathbf{s}_i(t_1), \mathbf{s}_i(t_2), \dots, \mathbf{s}_i(t_K)\|_2$, 通过构造目标函数来求得稀疏解, 则目标函数的表达式为

$$\min \frac{\|\mathbf{X}_{\text{SV}} - \mathbf{B}\mathbf{S}_{\text{SV}}\|_2^2}{2} + \lambda \|\mathbf{s}^{(l_2)}\|_1 \quad (9)$$

其中, $s_i^{(l_2)}$ 表示矩阵 \mathbf{s}^{SV} 的第 i 行矢量, 这就是说, 只要找到 $\mathbf{s}^{(l_2)}$ 中的非零元素也就对应得到了信号方向。

3 基于多项式预处理的 DoA 估计算法

矩阵预处理技术的引进最初是用来解决大型稀疏线性方程, 对系数矩阵特征值分布很分散的线性方程组, 该技术可以通过集中系数矩阵的特征值分布, 达到减少条件数, 加快收敛, 改变矩阵的病态特性的目的。将矩阵预处理技术可以缩小特征值分布特点应用到波达方向估计算法中, 使得有用信号能量更加集中, 从而在面对呈突发状的冲击噪声时, 依然能准确估计出波达方向。多项式预处理是

一种常用的预处理技术, 相比其他预处理方法, 该方法只涉及到矩阵向量乘积和向量加法, 很容易向量化, 无需大量额外的存储空间。因此本文选用多项式预处理法, 具体方法是:

假如对于 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 这个稀疏方程, 需要进行多项式预处理来集中矩阵 \mathbf{A} 的特征值。设 $(l = 1, 2, \dots, i)$ 是 \mathbf{A} 的 i 个特征值, λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别是 \mathbf{A} 的最小特征值和最大特征值, 则 \mathbf{A} 的条件数表示为 $\text{cond}(\mathbf{A}) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ 。条件数越小表示矩阵的病态程度越低, 在迭代算法中收敛速度越快, 在求逆算法中结果更准确, 条件数越大则相反。记多项式预处理矩阵为 $f(\mathbf{A}) = a \times \mathbf{A} + b \times \mathbf{I}$, 其中 a, b 为常数, 预处理后原方程组变为: $g(\mathbf{A})\mathbf{x} = f(\mathbf{A})\mathbf{b}$ 。此时, 得到预处理 \mathbf{A} 后的系数矩阵: $g(\mathbf{A}) = a \times \mathbf{A}^2 + b \times \mathbf{A}$ 。将这个多项式预处理过程应用到阵列接收信号的自相关矩阵 \mathbf{R}_x , 通过集中 \mathbf{R}_x 的特征值, 增强了有用信号能量。

基于以上预处理技术的特点, 本文在 l_1 -SVD 算法^[10]的基础上, 提出了基于多项式矩阵预处理的稀疏重构的 DoA 估计方法。具体做法为: 将协方差矩阵 \mathbf{R}_x 进行特征值分解, 得到最大特征值 $\bar{\lambda}_{\max}$ 和最小特征值 $\bar{\lambda}_{\min}$ 。根据多项式预处理方法, 得到预处理 \mathbf{R}_x 后的系数矩阵: $g(\mathbf{R}_x) = a \times (\mathbf{R}_x)^2 + b \times \mathbf{R}_x$ 。记 $g(\lambda_l)$ 是 $g(\mathbf{R}_x)$ 的特征值。

根据二次函数具有对称性, 可以通过函数的作用将 X 轴上较大的区间映射成 Y 轴上的一个较小区间^[12]。因此, 为了将 $[\bar{\lambda}_{\min}, \bar{\lambda}_{\max}]$ 经过二次函数 $g(x) = a \times x^2 + b \times x$ 作用映射到较小区间, 我们设 $(\bar{\lambda}_{\max} + \bar{\lambda}_{\min})/2$ 为二次函数的对称轴, 令

$$\left. \begin{aligned} a &< 0 \\ x_0 &= -\frac{b}{2a} = \frac{\bar{\lambda}_{\max} + \bar{\lambda}_{\min}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则 $\text{cond}(g(\mathbf{R}_x)) = \frac{\max g(\lambda_l)}{\min g(\lambda_l)} (l = 1, 2, \dots, i)$, 其中有

$$\left. \begin{aligned} \max g(\lambda_l) &= -b^2 / 4a \\ \min g(\lambda_l) &= a \times \bar{\lambda}_{\min}^2 + b \times \bar{\lambda}_{\min} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

计算得到 $\text{cond}(g(\mathbf{R}_x)) < \bar{\lambda}_{\max} / \bar{\lambda}_{\min}$ 成立。为了使 $\text{cond}(g(\mathbf{R}_x))$ 尽可能小, 用线性规划问题确定参数:

$$\left. \begin{aligned} \min(\max g(\lambda_l) - \min g(\lambda_l)) \\ -\frac{b}{2a} &= \frac{\bar{\lambda}_{\min} + \bar{\lambda}_{\max}}{2} \\ \min g(\lambda_l) &\geq \bar{\lambda}_{\min} \\ \max g(\lambda_l) &\leq \bar{\lambda}_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

对式(12)进行计算求解可以得到

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{1}{\bar{\lambda}_{\max}} \\ b &= \frac{\bar{\lambda}_{\min} + \bar{\lambda}_{\max}}{\bar{\lambda}_{\max}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

对条件数的改善程度为

$$\frac{\text{cond}(g(\mathbf{R}_x))}{\text{cond}(\mathbf{R}_x)} = \frac{1}{4} \frac{(\bar{\lambda}_{\min} + \bar{\lambda}_{\max})^2}{\bar{\lambda}_{\max}^2} \quad (14)$$

为了方便起见, 我们设 $g(\mathbf{R}_x) = \bar{\mathbf{R}}_x$, 则多项式预处理矩阵可以表示为

$$\bar{\mathbf{R}}_x = \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}_{\max}}\right) \times \mathbf{R}_x^2 + \left(\frac{\bar{\lambda}_{\min} + \bar{\lambda}_{\max}}{\bar{\lambda}_{\max}}\right) \times \mathbf{R}_x \quad (15)$$

采用多项式预处理技术^[12]的目的是通过改变特征值的分布, 集中有用信号能量, 相对地抑制了冲击噪声带来的影响。此外, 因为可以减小系数矩阵的条件数, 该方法还可以提高使用迭代法求解稀疏线性方程组收敛速度。

利用已构造出的信号能量分布更加集中的多项式预处理矩阵 $\bar{\mathbf{R}}_x$ 处理式(7)中的 \mathbf{B} 和 \mathbf{X}_{SV} , 凸显所有可能的信号角度 $\theta = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_K\}$ 范围中的 K 个信号到达角, 并使得列向量只包含来波信号的 $M \times K$ 维的矢量 \mathbf{X}_{SV} 中的信号能量更加集中。

$$\mathbf{Y}_{\text{SV}} = (\bar{\mathbf{R}}_x)^{-1/2} \times \mathbf{X}_{\text{SV}} \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = (\bar{\mathbf{R}}_x)^{-1/2} \times \mathbf{B} \quad (17)$$

对应式(9)中的问题变为

$$\min \frac{\|\mathbf{Y}_{\text{SV}} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{S}_{\text{SV}}\|_2^2}{2} + \lambda \|\mathbf{s}^{(l_2)}\|_1 \quad (18)$$

而式(18)可以转化为二阶锥规划问题:

$$\left. \begin{aligned} \min p + \lambda q \\ \text{s.t. } \frac{\|\mathbf{Y}_{\text{SV}} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{S}_{\text{SV}}\|_2}{2} \leq p \\ \|\mathbf{s}^{(l_2)}\|_1 \leq q \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

本文利用 Matlab 软件的 CVX 优化工具包^[15]来处理式(19)中的最优化问题。针对波达方向估计, 子空间类算法的复杂度为 $O(M^3)$, 与子空间类算法不同的是, 利用观测角度空间中潜在具有稀疏性的信息, 基于次数表征的 DoA 估计算法相继提出, 与传统算法相比, 此类算法的复杂度高, 但是可以获得更高的分辨率和准确性。其中, l_1 -SVD 算法和本文基于多项式预处理的 l_1 -SVD 算法的复杂度都集中在二阶锥求解的过程, 为 $O((N \times K)^3)$, 预处理过程的复杂度相较之下可以忽略不计。上述内容中的参数分别为: N 是稀疏信号长度、 M 是阵元个数、 K 是信号个数。

4 仿真实验及结果

仿真实验所用到的信号和噪声分别为远场窄带信号源和冲击噪声, 冲击噪声的分布特性可以根据特征指数 α 和分散系数 δ 来决定, 而当 $\alpha \in (0, 2]$ 时, 方差是无界的, 因而可以用信号平均功率和分散系数 δ 的比值即广义信噪比(GSNR)来代替一般信噪比, 表达式如式(20):

$$\text{GSNR} = 10 \lg \left(\frac{1}{\delta N} \sum_{t=1}^N |\mathbf{s}(t)|^2 \right) \quad (20)$$

为了验证所提方法的有效性, 通过仿真将本文提出的基于多项式矩阵预处理的方法(POLY-SVD)和 l_1 -SVD 方法、分数低阶距法(FLOM)以及基于相关熵的子空间法(CRCO)进行对比。通常 DoA 估计算法的性能由均方根误差来表示, 定义均方根误差为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{100} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k(m) - \theta_k)^2}{100K}} \quad (21)$$

其中, $\hat{\theta}_k(m)$ 表示第 m 次波达方向角度估计值。

实验中两个远场窄带信号从 $-20^\circ, 45^\circ$ 方向上入射到 12 个阵元的均匀线阵上, 阵元间距为半波长。冲击噪声为 $S\alpha S$ 分布的噪声^[14], α 的值为 $\alpha = 1.5$, $\text{GSNR} = 15$ dB, 角度覆盖范围从 -90° 到 90° , 间隔取 1° (此处间隔可以任意取, 无特殊含义), 正则化参数 λ 取 1。实验结果采用 100 次蒙特卡洛仿真实验的均值。

实验 1 验证不同算法在冲击噪声环境下对非相干信源和相干信源的 DoA 估计, 用本文提出的基于多项式矩阵预处理的方法(POLY-SVD)分别与 l_1 -SVD 算法以及分数低阶距法(FLOM)、相关熵法(CRCO)进行的空间谱对比, 如图 1、图 2 所示。

从图 1 和图 2 可以看到, 在冲击噪声环境下, 处理非相干信源时, l_1 -SVD 算法不能准确估计出波达方向, 分数低阶距法和相关熵法能准确估计出波达方向, 但与这两种算法相比, 本文提出算法的谱峰更加尖锐, 灵敏度更高; 估计相干信源时, 分数低阶距法和相关熵法的性能严重退化, 相比之下 l_1 -SVD 算法基本可以估计出信号的波达方向, 但与本文提出的方法对比, 可以看到 l_1 -SVD 算法的灵敏度差, 本文提出的算法有稳定性好、灵敏度高、鲁棒性良好等优点。

实验 2 在与实验 1 相同条件下, 验证冲击噪声环境下, 在 α 值改变时本文提出的基于多项式矩阵预处理的算法(POLY-SVD), l_1 -SVD 算法、分数低阶距法(FLOM)以及相关熵法(CRCO)估计非相干信源和相干信源波达方向的均方根误差对比图,

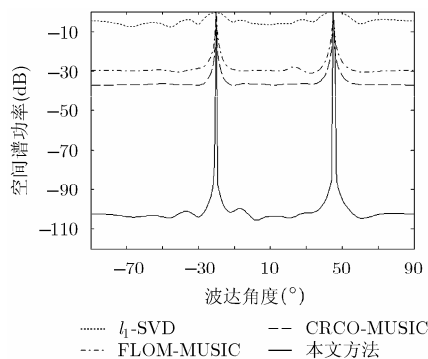


图 1 冲击噪声下的非相干信源

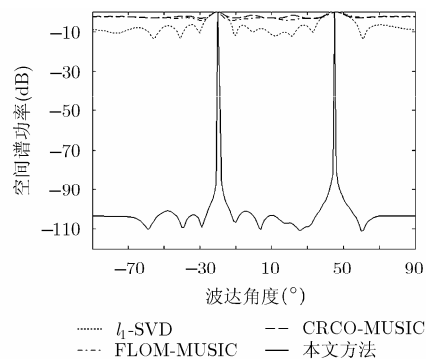
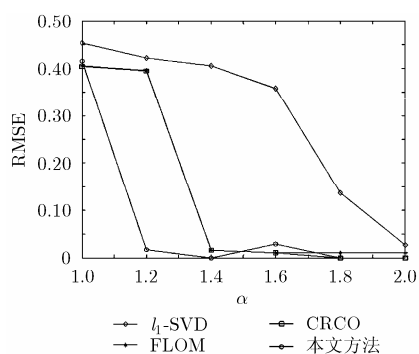
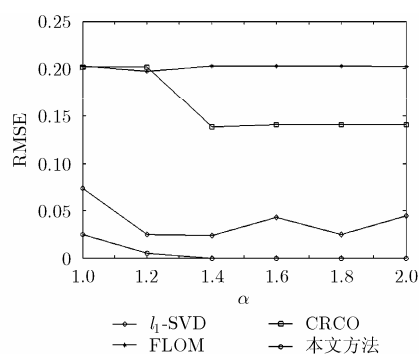


图 2 冲击噪声下的相干信源

快拍数为 200, 训练次数为 100 次, 如图 3、图 4 所示。

从图 3 可以看到, 冲击噪声环境下的非相干信源的波达方向估计, 在 α 值改变的情况下, l_1 -SVD 算法的均方根误差最大, 分数低阶距法(FLOM)以及相关熵法(CRCO)的均方根误差略小, 两种算法的估计结果差别不是很大。相较之下本文提出的算法均方根误差更小, 鲁棒性更好。由图 4 可知, 对相干信源在冲击噪声下波达方向估计, 分数低阶距法(FLOM)以及相关熵法(CRCO)的均方根误差更大, 估计效果最差, l_1 -SVD 算法的均方根误差略小。相较这 3 种算法, 本文提出的基于多项式预处理的稀疏重构 DOA 估计方法在冲击噪声较强, 即 α 值更小的情况下均方根误差最小, 灵敏度更高。这里鲁棒性好的判断标准是多项式预处理集中信号能量可以维持估计性能的稳定, 减弱冲击噪声对算法中各项参数的影响, 增强了抗攻击能力。稳定性的判断标准是冲击噪声会让数据出现大幅度的突变,

图 3 非相干信源 α 值改变下的均方根误差图 4 相干信源 α 值改变下的均方根误差

通过仿真中的数据分析, 突变会让包含信号信息矩阵的特征值变得很大, 多项式预处理会将这些大幅度的冲击抑制到相对平缓的状态。灵敏度主要是针对求解的凸优化问题, 针对凸优化问题的灵敏度分析也就是针对最优解的变化, 多项式预处理的应用能抑制优化问题中解的不稳定。

5 结束语

由于冲击噪声二阶矩不存在, 基于子空间类的算法不能有效估计出波达方向, 尤其是当信号源是相干信源时, 这类算法的估计性能严重下降。通过利用多项式预处理后的信号协方差矩阵对稀疏信号模型和方向矢量进行预处理, 再利用稀疏重构进行波达方向估计, 本文提出了基于多项式矩阵预处理的稀疏重构 DoA 估计方法。仿真结果表明本文提出的算法在冲击噪声环境下能很好地估计出非相干和相干信源的波达方向, 尤其在处理相干信源时表现出更高的灵敏度和更好的鲁棒性。

参考文献

- [1] 李磊, 李国林. 一种新的相干信源互耦自校正算法[J]. 北京理工大学学报, 2016, 36(12): 1303-1308. doi: 10.15918/j.tbit1001-0645.2016.12.018.
LI Lei and LI Guolin. A new mutual coupling self - correction

- algorithm for coherent sources[J]. *Transaction of Beijing Institute of Technology*, 2016, 36(12): 1303-1308. doi: 10.15918/j.tbit1001-0645.2016.12.018.
[2] 赵季红, 马兆恬, 曲桦, 等. 基于加权 1 范数稀疏信号重建的 DoA 估计[J]. 北京邮电大学学报, 2016, 39(5): 33-36. doi: 10.13190/j.jbupt.2016.05.007.

- ZHAO Jihong, MA Zhaotian, QU Hua, *et al.* DoA estimation based on sparse signal recovery utilizing weighted 1 norm[J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2016, 39(5): 33-36. doi: 10.13190/j.jbupt.2016.05.007.
- [3] 王鹏, 邱天爽, 任福全, 等. 对称稳定分布噪声下基于广义相关熵的 DOA 估计新方法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(8): 2007-2013. doi: 10.11999/JEIT151217.
- WANG Peng, QIU Tianshuang, REN Quanfu, *et al.* A new DOA estimation method based on generalized correlation entropy in symmetric stable distribution noise[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(8): 2007-2013. doi: 10.11999/JEIT151217.
- [4] 赵季红, 李雷雷, 曲桦, 等. 冲击噪声下基于相关熵的二维 ESPRIT 算法[J]. *计算机测量与控制*, 2016, 24(6): 170-173. doi: 10.16526/j.cnki.11-4762/tp.2016.06.047.
- ZHAO Jihong, LI Leilei, QU Hua, *et al.* Correntropy based two-dimensional ESPRIT algorithm under impulsive noise[J]. *Computer Measurement and Control*, 2016, 24(6): 170-173. doi: 10.16526/j.cnki.11-4762/tp.2016.06.047.
- [5] HARI K V S and LALITHA V. Subspace-based DOA estimation using fractional lower order statistics[C]. *IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Prague: Czech Republic, 2011: 2580-2583.
- [6] 刁鸣, 杨丽丽, 陈超. 基于分数低阶矩的空时最大似然 DOA 估计[J]. *应用科技*, 2010, 37(4): 15-18. doi: 10.3969/j.issn.1009-671X.2010.04.004.
- DIAO Ming, YANG Lili, and CHEN Chao. DOA estimation of spatial-temporal and maximum-likelihood based on fractional lower-order statistics[J]. *Application Technology*, 2010, 37(4): 15-18. doi: 10.3969/j.issn.1009-671X.2010.04.004.
- [7] 何劲, 刘中. 利用分数低阶空时矩阵进行冲击噪声环境下的 DOA 估计[J]. *航空学报*, 2006, 27(1): 104-108. doi: 1000-6893(2006)01-0104-05.
- HE Jin and LIU Zhong. DOA estimation in impulsive noise environment using fractional lower order spatial-temporal matrix[J]. *Journal of Aeronautical*, 2006, 27(1): 104-108.
- [8] 赵季红, 贺丹, 王伟华. 基于相关熵的稳健型 ESPRIT 算法[J]. *计算机工程与设计*, 2016, 37(2): 438-442. doi: 10.16208/j.issn1000-7024.2016.02.030.
- ZHAO Jihong, HE Dan, and WANG Weihua. Robust ESPRIT algorithm based on correntropy[J]. *Computer Engineering and Design*, 2016, 37(2): 438-442. doi: 10.16208/j.issn1000-7024.2016.02.030.
- [9] 刁鸣, 安春莲. 冲击噪声背景下的 DOA 估计新方法[J]. *北京邮电大学学报*, 2013, 36(5): 100-104. doi: 10.13190/j.jbupt.2013.05.021.
- DIAO Ming and AN Chunlian. A novel DOA estimation method in impulsive noise[J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2013, 36(5): 100-104. doi: 10.13190/j.jbupt.2013.05.021.
- [10] MALIOUTOV D, CETIN M, and WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010-3022.
- [11] 张兰. 稀疏矩阵方程组预处理迭代技术研究[D]. [硕士学位论文], 华南理工大学, 2010.
- ZHANG Lan. Research on iterative technique of pretreatment for sparse matrix equations[D]. [Master dissertation], South China University of Technology, 2010.
- [12] 刘播, 刘凤楠. 一种多项式预处理算法[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2012, 50(1): 11-13.
- LIU Bo and LIU Fengnan. A method about polynomial preconditioning technique[J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2012, 50(1): 11-13.
- [13] 田静, 周富照, 钟志宏. 解矩阵方程的一种多项式预处理技术[J]. *吉首大学学报(自然科学版)*, 2010, 31(1): 22-26.
- TIAN Jing, ZHOU Fuzhao, and ZHONG Zhihong. A polynomial preprocessing technique for solving matrix equation[J]. *Journal of Jishou University (Natural Science Edition)*, 2010, 31(1): 22-26.
- [14] 刁鸣, 刘磊, 安春莲. 冲击噪声背景下独立信号与相干信号并存的测向自适应新方法[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2016, 47(1): 108-113. doi: 10.11817/j.issn.1672-7207.2016.01.016.
- DIAO Ming, LIU Lei, and AN Chunlian. DOA estimation for uncorrelated and coherent signals in impulsive noise[J]. *Journal of Central South University (Natural Science Edition)*, 2016, 47(1): 108-113. doi: 10.11817/j.issn.1672-7207.2016.01.016.
- [15] GRANT M and BOYD S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming[OL]. <http://cvxr.com/cvx>. 2014.
- 赵季红: 女, 1963年生, 教授, 研究方向为宽带通信网、新一代网络的管理与控制.
- 马兆恬: 女, 1991年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理、大规模阵列天线.
- 曲桦: 男, 1961年生, 教授, 研究方向为现代通信网、计算机网络体系结构.
- 王伟华: 男, 1988年生, 博士生, 研究方向为大规模阵列天线、自适应滤波算法、阵列信号处理.