

# 大规模 MIMO 系统中基于二对角矩阵分解的低复杂度检测算法

曹海燕 杨敬畏\* 方昕 许方敏

(杭州电子科技大学通信工程学院 杭州 310018)

**摘要:** 在大规模多输入多输出(MIMO)系统的上行链路检测算法中, 最小均方误差(MMSE)算法是接近最优的, 但算法涉及到大矩阵求逆运算, 计算复杂度仍然较高。近年提出的基于诺依曼级数近似的检测算法降低了复杂度但性能有一定的损失。为了降低复杂度的同时逼近 MMSE 算法性能, 该文提出基于二对角矩阵分解的诺依曼级数 (Neumann Series) 近似, 即将大矩阵分解为以两条主对角线上元素组成的矩阵与空心矩阵之和。理论分析与仿真结果表明所提算法检测性能逼近 MMSE 检测算法, 且其复杂度从  $O(K^3)$  降低到  $O(K^2)$ , 这里  $K$  是用户的数目。

**关键词:** 大规模 MIMO; 诺依曼级数; 二对角矩阵; 低复杂度

**中图分类号:** TN929.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2018)02-0416-05

**DOI:** 10.11999/JEIT170498

## Low Complexity Detection Algorithm Based on Two-diagonal Matrix Decomposition in Massive MIMO Systems

CAO Haiyan YANG Jingwei FANG Xin XU Fangmin

(School of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Minimum Mean Square Error (MMSE) algorithm is near-optimal for uplink massive MIMO systems, but it involves high-complexity matrix inversion. Recently, the proposed detection algorithm based on Neumann series approximation reduces the complexity with some performance losses. In order to reduce the complexity while approaching the performance of MMSE algorithm, the Neumann series approximation based on two-diagonal matrix decomposition is proposed in this paper, that is, the large matrix is decomposed into the sum of the two elements of the main diagonal and the hollow matrix. The theoretical analysis and simulation results show that the detection performance of the proposed algorithm is close to the MMSE detection algorithm while its computational complexity is reduced from  $O(K^3)$  to  $O(K^2)$ , where  $K$  is the number of users.

**Key words:** Massive MIMO; Neumann series; Two-diagonal matrix; Low complexity

### 1 引言

最早由美国贝尔实验室提出的大规模 MIMO 系统即在基站侧配置成十上百根天线的 MIMO 系统<sup>[1]</sup>。理论证明大规模 MIMO 技术能够在提高 1~2 个数量级的频谱效率的同时, 提升 3 个数量级的能源效率, 因其具有高容量, 频谱效率高等优势, 受到了研究者的广泛关注<sup>[2,3]</sup>。

但在大规模 MIMO 系统的实际应用中, 面临着如增加的多用户干扰而带来的上行链路检测算法的

实现复杂度大幅度增加等问题<sup>[4]</sup>。作为最佳检测算法的最大似然检测(Maximum Likelihood, ML), 因其算法复杂度随着传输天线数和调制星座点数的增长呈现指数增长, 不利于工程实现。为此, 文献[5]提出基于概率数据关联 (Probabilistic Data Association, PDA) 的检测算法, 在保证检测性能基础上, 充分降低算法复杂度以适用于大规模 MIMO 系统。近年来提出的近似最优检测算法如: 文献[6]改进的置信度传播(Belief Propagation, BP)算法, 但其研究主要基于基站天线数  $N$  与用户数  $K$  相等的前提下(即  $N = K$ ), 不适用于当前的实用模型<sup>[2]</sup>。

低复杂度的线性检测算法重新引起人们的重视, 如迫零(Zero Forcing, ZF)和最小均方误差 (Minimum Mean Square Error, MMSE)检测算法<sup>[4]</sup>。特别在  $N/K$  特别大的情况中, ZF 与 MMSE

收稿日期: 2017-05-24; 改回日期: 2017-10-24; 网络出版: 2017-11-23

\*通信作者: 杨敬畏 jingweiyang0802@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61501158, 61379027), 浙江省自然科学基金(LY14F010019, LQ15F01004)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501158, 61379027), The Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LY14F010019, LQ15F01004)

能取得近似ML的性能。但在大规模MIMO系统中，ZF与MMSE检测算法均涉及大矩阵的求逆运算，复杂度仍然达到了 $O(K^3)$ 。为了降低线性检测算法的复杂度，文献[7]中提出了一种诺依曼级数(Neumann Series, NS)近似算法，利用大规模MIMO信道矩阵趋于严格对角占优的信道特性<sup>[8]</sup>，将矩阵的求逆运算转换为一系列的向量乘法运算，但只在诺依曼级数近似项数取小于等于2时有效。而在诺依曼级数近似项数大于2时，复杂度仍为 $O(K^3)$ 。文献[9]基于MMSE算法，利用牛顿迭代(Newton Iteration, NI)算法完成求逆运算，并提出主对角牛顿迭代(Diagonal Band Newton Iteration, DBNI)算法用主对角矩阵近似计算，充分降低了算法的计算复杂度。

本文在此基础上，在大规模MIMO系统下，针对多用户的情况，提出基于二对角(two-diagonal)矩阵分解的诺依曼级数(Two-diagonal Neumann Series, TNS)近似检测算法，将大矩阵转换为二对角矩阵和空心矩阵之和，并提出了相应的矩阵分解方法，取诺依曼级数近似的前2项，此时计算复杂度降低为 $O(K^2)$ ，同时具备与MMSE检测算法相近的检测性能。

其余部分如下安排：第2节简要地介绍了系统模型。第3节阐述了TNS检测算法和复杂度分析。最后给出仿真结果与结论。文中使用的符号如下定义：矩阵及矢量分别用加粗斜体大小写字母表示。 $(\cdot)^H$ 和 $(\cdot)^{-1}$ 分别表示共轭转置和矩阵的逆。 $\mathbf{I}_N$ 表示 $N$ 阶单位阵。

## 2 系统模型

考虑大规模MIMO系统是一个配置 $N$ 根天线的基站同时服务 $K$ 个单天线的用户设备进行通信的系统。假定 $N \gg K$ ，设 $\mathbf{s}$ 为 $K \times 1$ 维的传输信号向量，包含了 $K$ 个用户所有的传输符号。 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times K}$ 表示均值为0，方差为1的独立同分布瑞利平坦衰落信道矩阵。基站端 $N \times 1$ 维的接收信号向量 $\mathbf{y}$ 可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中， $\mathbf{n}$ 是 $N \times 1$ 维的加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)向量，服从 $\text{CN}(0,1)$ 分布。在基站端的多用户信号检测任务是通过接收到的有噪信号向量 $\mathbf{y}$ 来估计出传输信号向量 $\hat{\mathbf{s}}$ 。传

输信号向量 $\hat{\mathbf{s}}$ 通过MMSE检测算法<sup>[10]</sup>可表示为

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \delta^2 \mathbf{I}_K)^{-1} \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{y} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{y}} \quad (2)$$

其中， $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{y}$ ， $\mathbf{W} = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \delta^2 \mathbf{I}_K$ 。MMSE检测算法中，由于 $N$ 和 $K$ 的增大，求逆运算的复杂度相当高，由文献[11]可知其复杂度为 $O(K^3)$ 。

## 3 基于二对角矩阵分解的NS近似检测算法

### 3.1 诺依曼级数近似

文献[12]提出了用诺依曼级数展开算法，将矩阵 $\mathbf{W}^{-1}$ 作诺依曼级数展开可得：

$$\mathbf{W}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{X}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{W}))^n \mathbf{X}^{-1} \quad (3)$$

其中， $\mathbf{X}$ 为可逆矩阵并满足：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{W})^n = 0 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - \mathbf{W} \mathbf{X}^{-1})^n = 0 \quad (4)$$

诺依曼级数近似即取式(3)前 $L$ 项来近似 $\mathbf{W}^{-1}$ ：

$$\mathbf{W}^{-1} \approx \sum_{n=0}^{L-1} (\mathbf{X}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{W}))^n \mathbf{X}^{-1} \quad (5)$$

由式(4)可知， $\mathbf{X}$ 越“接近”于 $\mathbf{W}$ ，则检测性能越好，但矩阵 $\mathbf{X}$ 若不是稀疏矩阵，算法复杂度仍会很高。

### 3.2 基于TNS的检测算法

本文提出了一种基于二对角矩阵分解的诺依曼级数近似的检测算法。即将大矩阵 $\mathbf{W}$ 转换为二对角矩阵和空心矩阵之和： $\mathbf{W} = \mathbf{X}_{\text{TNS}} + \mathbf{E}_{\text{TNS}}$ 。其中 $\mathbf{X}_{\text{TNS}}$ 为取矩阵 $\mathbf{W}$ 的两条主对角线上元素的矩阵，即

$$\mathbf{X}_{\text{TNS}} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & W_{22} & W_{23} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W_{33} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & W_{(K-1)K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & W_{KK} \end{bmatrix} \quad (6)$$

为了方便运算，将式(6)记作：

$$\mathbf{X}_{\text{TNS}} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -b_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -b_K \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_K \end{bmatrix} \quad (7)$$

为了快速求得 $\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1}$ ，对矩阵 $\mathbf{X}_{\text{TNS}}$ 进行如下分解：

$$\mathbf{X}_{\text{TNS}} = \mathbf{B}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-b_2}{a_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-b_3}{a_3} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{-b_K}{a_K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_K \end{bmatrix} \quad (8)$$

首先, 记矩阵  $\mathbf{B}$  的一般矩阵式为矩阵  $\mathbf{T}^{[13]}$ , 由其增广矩阵进行简单的初等行变换求得其逆矩阵为

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & ab & abc \\ 0 & 1 & b & bc \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

由式(9)可得  $\mathbf{B}^{-1}$  为

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2 b_3}{a_2 a_3} & \cdots & \cdots & \frac{b_2 b_3 \cdots b_K}{a_2 a_3 \cdots a_K} \\ 0 & 1 & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \cdots & \frac{b_3 b_4 \cdots b_K}{a_3 a_4 \cdots a_K} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \frac{b_4 b_5 \cdots b_K}{a_4 a_5 \cdots a_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{b_K}{a_K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

将式(10)代入式(8), 推导出  $\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1}$  为

$$\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_K} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2 b_3}{a_2 a_3} & \cdots & \cdots & \frac{b_2 b_3 \cdots b_K}{a_2 a_3 \cdots a_K} \\ 0 & 1 & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \cdots & \frac{b_3 b_4 \cdots b_K}{a_3 a_4 \cdots a_K} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \frac{a_3 a_4 \cdots a_K}{b_4 b_5 \cdots b_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{b_K}{a_K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

将  $\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1}$  代入式(5)可得前  $L$  项的  $\mathbf{W}^{-1}$  为

$$\mathbf{W}_L^{-1} = \sum_{n=0}^{L-1} (-\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} \mathbf{E}_{\text{TNS}})^n \mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} \quad (12)$$

取  $L = 2$  时, 式(12)为

$$\mathbf{W}_{\text{TNS}}^{-1} = \mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} - \mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} \mathbf{E}_{\text{TNS}} \mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} \quad (13)$$

式(13)中,  $\mathbf{W}_{\text{TNS}}^{-1}$  的计算复杂度为  $O(K^2)$ , 大大降低了计算复杂度, 同时由于保留了更多信道矩阵中的信息, 其具备与 MMSE 算法相近的检测性能。

### 3.3 算法复杂度分析

本小节将分析算法中所需要的乘法运算。本文可以求解  $\mathbf{W}_{\text{TNS}}^{-1}$  所需的乘法复杂度。 $\mathbf{W}_{\text{TNS}}^{-1}$  中  $\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1}$  的计算复杂度为  $3(K-1)$ ;  $\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} \mathbf{E}_{\text{TNS}} \mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1}$  的复杂度为  $2K^2 - 2K$ 。另当  $L \geq 3$ ,  $(\mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1} \mathbf{E}_{\text{TNS}})^{L-1} \mathbf{X}_{\text{TNS}}^{-1}$  的乘法复杂度为  $2(L-1)K^3$ 。

在表1中对传统的诺依曼级数近似算法与 TNS 算法的复杂度进行了对比。经典的 MMSE 检测算法的复杂度是  $O(K^3)$ , 从表1可以看出当  $L = 2$  时, 传统的诺依曼级数近似算法能够把复杂度从  $O(K^3)$  降至  $O(K^2)$ 。在  $L = 3$  时, 传统的诺依曼级数近似算法是  $O(K^3)$ , 这就意味着这种算法只能减少边缘复杂度。而在选取  $L = 2$  的 TNS 检测算法时, 能够逼近 MMSE 检测算法的性能, 且复杂度为  $O(K^2)$ , 故此本文在应用 TNS 检测算法时, 选择  $L = 2$ 。

表1 计算复杂度的对比

	$L=2$	$L=3$
传统的诺依曼级数近似算法	$12K^2 - 4K$	$8K^3 + 4K^2 - 2K$
DBNI 检测算法	$2K^2 + 25K$	$18K^2 - 14K$
TNS 检测算法	$2K^2 + K$	$2K^3 + 2K^2 + K$

## 4 仿真结果

本节给出了 TNS 检测算法, 诺依曼级数近似算法(Diagonal Neumann Series, DNS)与 DBNI 检测算法的误符号率(Symbol Error Rate, SER)的性能对比仿真结果, 并以经典直接求逆的 MMSE 算法为参考。基于大规模 MIMO 上行链路系统模型, 假设信道为瑞利衰落信道且接收端已知信道状态信息, 采用 4-QAM 调制方式, MMSE 检测算法, 噪声为独立同分布加性高斯白噪声。分别在基站配置 32, 64, 128 根接收天线, 8 个单天线用户。

图1比较了 MMSE, TNS, DNS 3种检测算法, 由图可知: 本文提出的 TNS 检测算法, 在  $N=32, 64$  时的性能较  $L=2$  的 DNS 算法有明显提

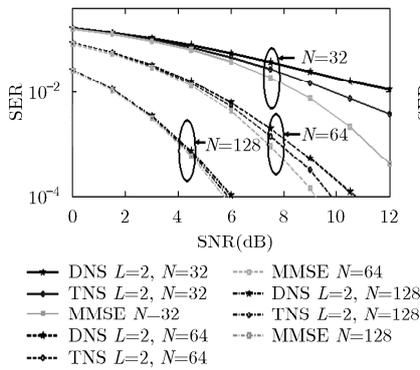


图1 3种算法SER性能的对比

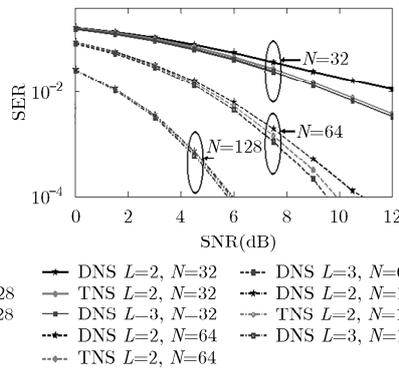
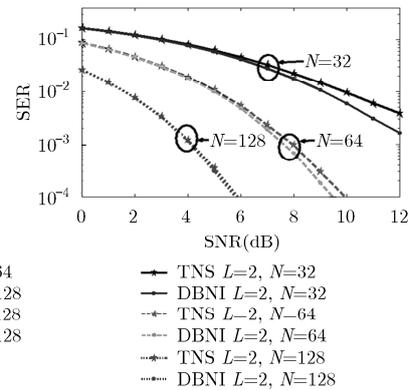
图2  $L=2, 3$ 的DNS与TNS性能比较

图3 不同天线数下TNS与DBNI的性能比较

高。当天线数越大, TNS 算法和 DNS 算法均越逼近 MMSE 的检测性能。

图2比较了  $L=2, 3$  的DNS与TNS的误符号率性能, 从图中看出两种算法的检测性能都随着基站接收天线数的增加而增强, 以  $N=64$  为例, TNS检测算法性能明显优于  $L=2$  的DNS检测算法, 并且性能逼近于  $L=3$  的DNS检测算法, 但运算复杂度从  $O(K^3)$  降为  $O(K^2)$ 。

图3给出了不同天线数下DBNI算法和TNS算法检测性能的对比, 由图可知: TNS算法表现出十分逼近DBNI算法的检测性能。尤其在天线数  $N=128$  时, 两者几乎重合, 但TNS算法所需的计算复杂度相较于DBNI算法有一定的降低。

## 5 结论

本文针对大规模 MIMO 上行链路系统, 提出了基于二对角矩阵分解的诺依曼级数近似的低复杂度的检测算法。由复杂度分析与性能仿真可知, 提出的 TNS 算法降低了计算复杂度, 其性能明显优于基于取相同项数的 NS 近似的 MMSE 检测算法的性能。

## 参考文献

- [1] ANDREWA J G, BUZZI S, WAN C, *et al.* What will 5G be?[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2014, 32(6): 1065-1082. doi: 10.1109/JSAC.2014.2328098.
- [2] MARZETTA T L. Noncooperative cellular wireless with unlimited numbers of base station antennas[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2010, 9(11): 3590-3600. doi: 10.1109/TWC.2010.092810.091092.
- [3] NGO H Q, LARSSON E G, and MARZETTA T L. Energy and spectral efficiency of very large multiuser MIMO systems [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(4): 1436-1449. doi: 10.1109/TCOMM.2013.020413.110848.
- [4] RUSEK F, PERSSON D, LAU B K, *et al.* Scaling up MIMO: Opportunities and challenges with very large arrays[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2012, 30(1): 40-60. doi: 10.1109/MSP.2011.2178495.
- [5] VIVONE G and BRACA P. Joint probabilistic data association tracker for extended target tracking applied to X-band marine radar data[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2016, 41(4): 1007-1019. doi: 10.1109/JOE.2015.2503499.
- [6] YUAN G, HAN N, and KAISER T. Massive MIMO detection based on belief propagation in spatially correlated channels[C]. International Itg Conference on Systems, Communications and Coding, Hamburg, Germany, 2017: 1-6.

- [7] YIN B, WU M, STYDER C, *et al.* Implementation trade-offs for linear detection in large-scale MIMO systems[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, BC, 2013: 2679–2683. doi: 10.1109/ICASSP.2013.6638142.
- [8] HOCHWALD B M, MARZETTA T L, and TAROKH V. Multiple-antenna channel hardening and its implications for rate feedback and scheduling[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(9): 1893–1909. doi: 10.1109/TIT.2004.833345.
- [9] TANG C, LIU C, YUAN L, *et al.* High precision low complexity matrix inversion based on Newton iteration for data detection in the massive MIMO[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(3): 490–493. doi: 10.1109/LCOMM.2015.2514281.
- [10] NING J, LU Z, XIE T, *et al.* Low complexity signal detector based on SSOR method for massive MIMO systems[C]. IEEE International Symposium on Broadband Multimedia Systems and Broadcasting, Ghent, 2015: 1–4. doi: 10.1109/BMSB.2015.7177185.
- [11] GAZZAH H. Low-complexity delay-controlled blind MMSE/ZF multichannel equalization[C]. IEEE GCC Conference and Exhibition, Dubai, 2011: 100–103. doi: 10.1109/IEEEGCC.2011.5752472.
- [12] WU M, YIN B, VOSOUGHI A, *et al.* Approximate matrix inversion for high-throughput data detection in the large-scale MIMO uplink[C]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Beijing, 2013: 2155–2158.
- [13] VORST H A V D. An iterative solution method for solving  $f(A)x=b$ , using Krylov subspace information obtained for the symmetric positive definite matrix  $A$ [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1987, 18(2): 249–263.
- 曹海燕: 女, 1975年生, 副教授, 研究方向为无线通信系统、信道估计与检测。
- 杨敬畏: 男, 1993年生, 硕士生, 研究方向为无线通信系统。
- 方昕: 女, 1975年生, 副教授, 研究方向为下一代移动通信物理层算法。
- 许方敏: 女, 1980年生, 副教授, 研究方向为通信信号处理、多天线技术。