第六章　多元函数的微分学

6.1 空间直角坐标系与向量的概念

引例：一个小乡村里的惟一商店有两种牌子的果汁，当地牌子的进价每瓶3元，外地牌子的进价每瓶4元. 店主估计，若当地牌子的每瓶卖x元，外地牌子的每瓶卖y元，则每天可卖出当地牌子的果汁 $7-5x+4y$ 瓶，外地牌子的果汁 $8+6x-7y$ 瓶. 问：店主每天以什么价格卖两种牌子的果汁时，才可获得最大收益？

分析　每天的收益为

$$R=(x-3)(7-5x+4y)+(y-4)(8+6x-7y).$$

上式中，x和y是自变量，R是因变量，因此R是x和y的函数，这样一类函数称为二元函数，记作$R=f(x,y)$. 于是，问题成为研究函数$R=f(x,y)$的最大值. 自然提出下面的问题：

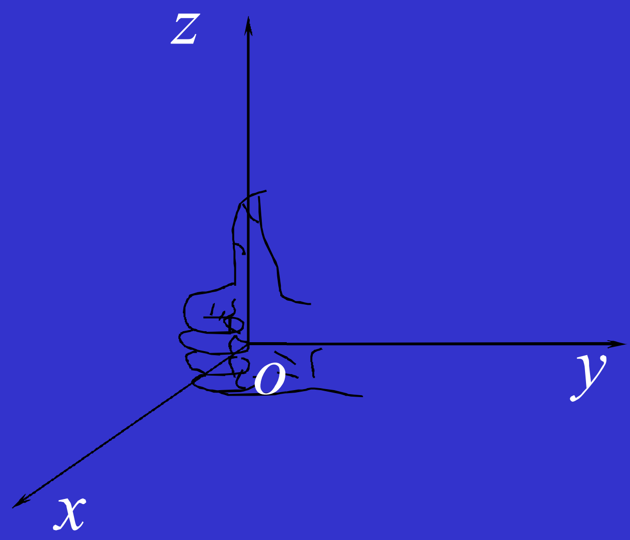
（1）二元函数的定义域怎样表达？图像是什么？

（2）二元函数的极限怎样求？连续性怎样判定？

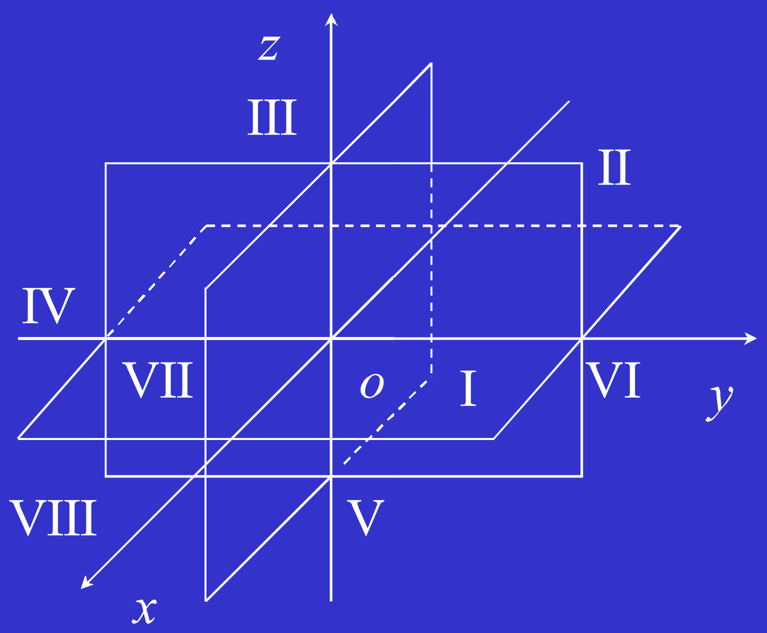
（3）二元函数的导数怎样求？是否仍然可用导数来判定其最大值？

抽象归纳

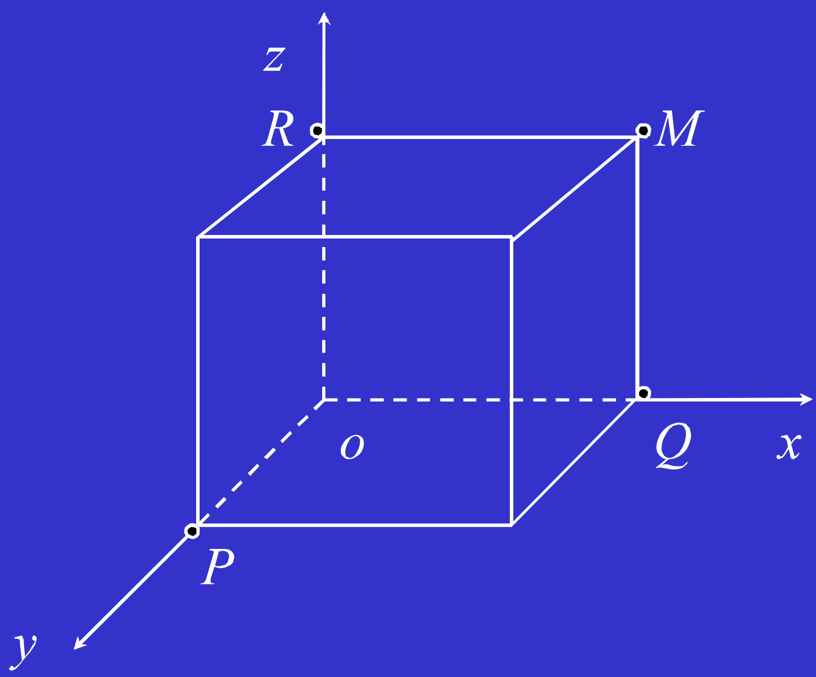
空间直角坐标系的定义：



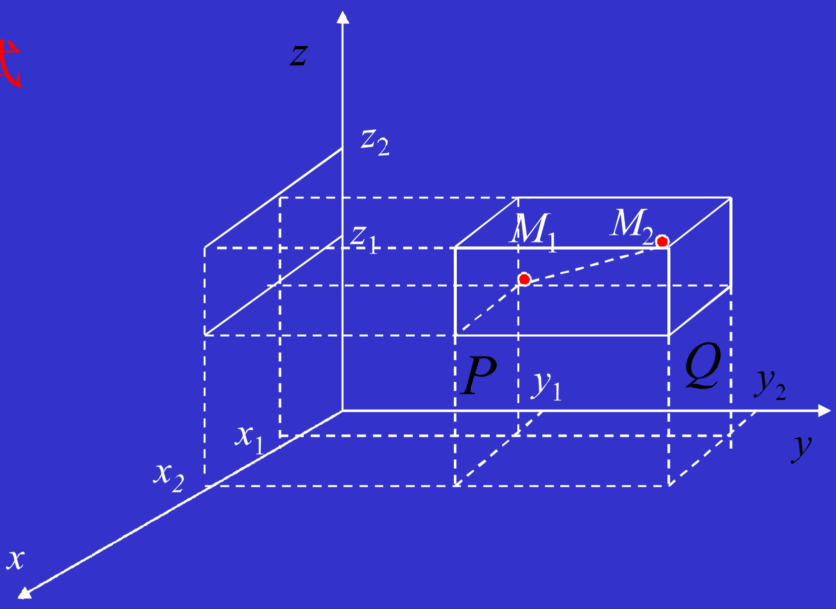
八个卦限：



空间中点的坐标：$M(x, y, z)$.



空间两点的距离公式



$$\left|M_1M_2\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

$M(x, y, z)$、O(0，0，0)之间的距离为

$$\left|OM\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

空间曲面与方程

若曲面S上任意一点的坐标(x, y, z)都满足方程$F(x, y, z)=0$,而不在曲面S上的点的坐标都不满足方程$F(x, y, z)=0$，则称$F(x, y, z)=0$为曲面S的方程，而曲面S称为方程$F(x, y, z)=0$的图形.

例 求与两定点$M(-1，0，2)$，$N(3，1，1)$距离相等的点的轨迹方程.

解 设动点坐标为$P(x, y, z)$, 则有$|PM|=|PN|$. 由两点间距离公式，得

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$$

化简得轨迹方程为

$$4x+y-z-3=0.$$

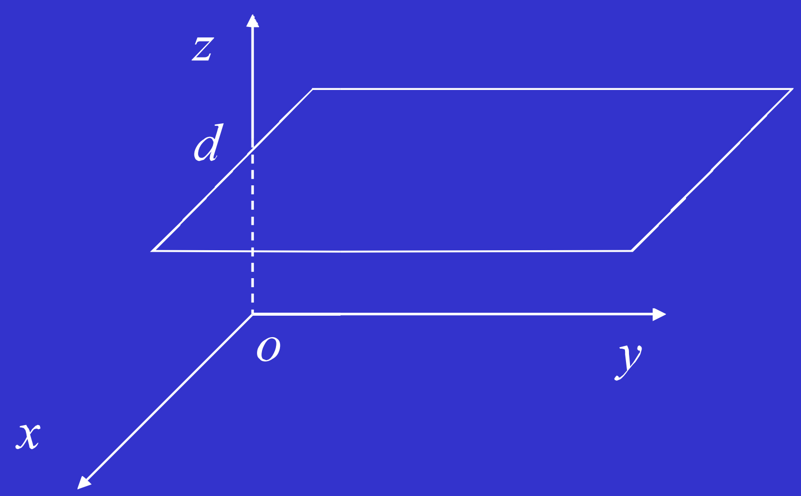
问：在例中，所求的轨迹是的几何形象是什么？

归纳：空间平面的方程：$Ax+By+Cz+D=0,$ 其中A、B、C、D都是常数，且A、B、C不全为0.

讨论：空间平面方程与平面直线方程有何异同？

例 作$z=d$（d为常数）的图形.

解 这是A=0，B=0, C=1，$D=-d$ 时的平面方程，不论x 、y取何值，z的值恒为d，所以，$z=d$ 的图形是平行于xOy面的平面，如图所示.



例 求球心为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为R的球面方程.

解 设球面上任一点为 $P(x, y, z)$, 则 $|PM_0| = R$,

得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

特别地，当球心为原点时，球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

6.2 多元函数的概念

■ 二元函数的定义

设有三个变量x, y和z, 如果当变量x, y在某一给定的二元有序实数对D内任取一对值(x, y)时，变量z按照一定的规律,总有唯一确实的数值和它们对应，则变量z叫做变量x, y的二元函数，记作$z = f(x, y)$

其中x, y为自变量，z为因变量,(x, y)变化的范围D称为函数的定义域。设点$(x_0, y_0) \in D$,则，$z = f(x, y)$称为对应于(x_0, y_0)的函数值，函数值的总体称为函数的值域。

类似地，可定义三元函数及其他多元函数。

正圆锥体体积v和它的底半径r,高h之间具有关系

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

这里，v随着r, h的变化而变化，当r, h在一定范围$(r > 0, h > 0)$内取定一队值时，v的值就随之确定，即当取定二元有序数组(r, h)时，v便有确定的值与之对应，这时底半径r和高h是相互独立的，它们之间不存在依赖关系，这时体积v是半径r和高h的二元函数。

一个有火炉的房间内,在同一时刻的温度分布

在选定空间直角坐标系后，房间内每一点(x, y, z)处都有唯一的温度 u与之对应，这时温度u是x, y, z的一个三元函数，故可表为$u = u(x, y, z)$

若考虑房间不同时刻t的温度分布，则温度u就是x, y, z, t的一个四元函数$u = u(x, y, z, t)$

类似的例子还可举出很多,今后我们主要研究二元函数。

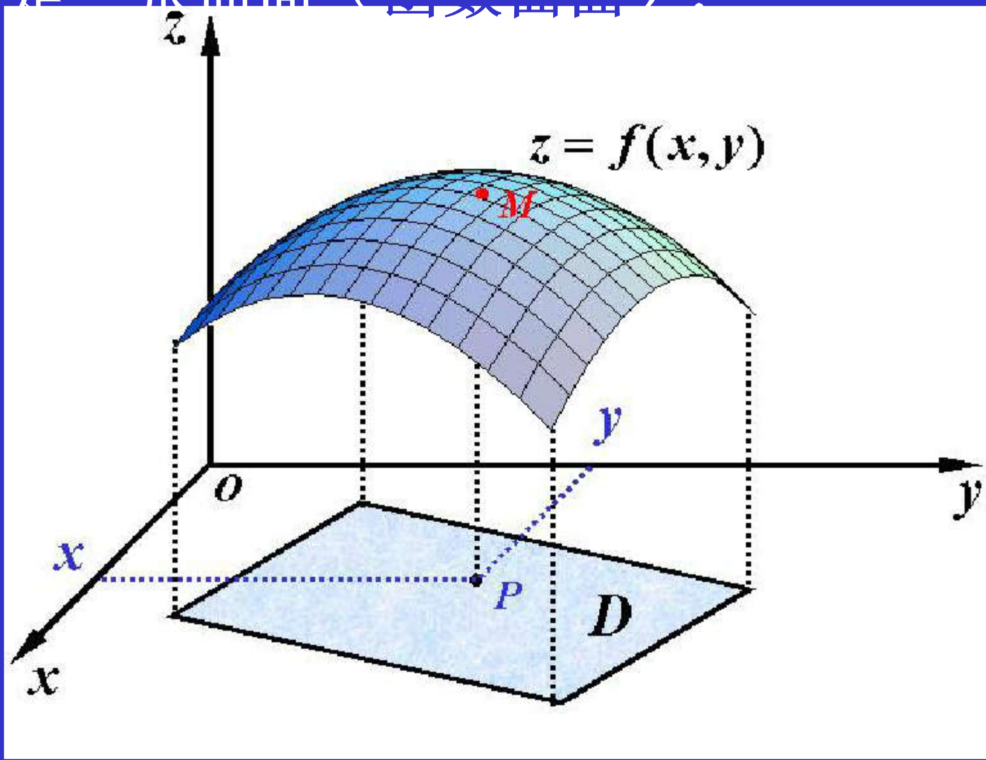
■ 二元函数的几何意义

设二元函数$z=f(x,y)$ $(x,y)\in D$ 在定义域D内每取一点$p(x,y)$,根据函数的关系式就可得到相应的z值，空间中的M（$x,y,f(x,y)$)的坐标满足关系式$z=f(x,y)$,当点$p(x,y)$跑遍定义域D时，相应的点M（$x,y,f(x,y)$)就在空间描绘出一个曲面，这个曲面就是二元函数$z=f(x,y)$的图形。

（2） 二元函数 z=f (x,y) 的图形

——空间点集 $\{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y)\in D\}$.

——通常是一张曲面（函数曲面）.



■ 二元函数的极限

设函数$f(x,y)$在开区域（或闭区域）D内有定义，$p_0(x_0,y_0)$是D的内点或边界点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式

$$0<|pp_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点$p(x,y)\in D$，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立，则称常数A为函数$f(x,y)$当$x\to x_0, y\to y_0$时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{或} f(x,y)\to A(p\to 0),\text{这里} p=|pp_0|$$

（1）(x, y)趋于（$x_0 y_0$）是指点$p(x, y)$与点$p_0(x_0, y_0)$的距离 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$趋于零。这一点与一元函数相类似。

（2）当（x, y)趋于（x_0, y_0)时，函数$f(x, y)$以A为极限，是指 $p(x, y)$以任何方式趋于$p_0(x_0, y_0)$时，函数都无限接近于A。

$$\text{设} f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2\neq 0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$$

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right| = \left|x^2+y^2\right|\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le x^2+y^2$$

可见，对任何$\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y)^2}<\varepsilon$时，总有

$$\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\langle\varepsilon\text{成立}$$

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$

由于平面上由一点到另一点有无数条路线，因此二元函数中当（x,y)趋于(x_0y_0)时,要比一元函数中x趋于x_0复杂的多,例如,可以沿任何直线,也可以沿任何曲线,如果(x,y)沿不同的路线趋于(x_0,y_0)时,所得的极限值不同,那么二重极限也就不存在

■ 二元函数的连续性

设函数$f(x,y)$在开区域(或闭区域)D内有定义,$p_0(x_0,y_0)$是D的内点或边界点,且$p_0\in D$,如果

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数$f(x,y)$在点$p_0(x_0,y_0)$连续;否则称函数$f(x,y)$在点(x_0y_0)间断.如果函数$f(x,y)$在区域D上每一点都连续,则称它在区域D上连续,和一元函数类似,二元连续函数有下列性质.

若函数$f(x,y)$有界闭区域D上

连续,则它在D上一定至少取得最小值和最大值各一次.

若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续且它在D上取得两个不同的函数值，则它在D上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，且它取得一个大于零的函数值和一个小于零的函数值，则至少有一点$(\xi,\eta)\in D$，使得$f(\xi,\eta)=0$.

若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则它必在D上有界.

$$f(x,y)=\frac{\sin\frac{3}{2}\pi x+y}{e^{xy}+xy}，求\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)$$

由于$f(x,y)$是初等函数,且点(1,2)在其定义域内

故$f(x,y)$在点(1,2)处连续,

因此

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)=f(1,2)=\frac{\sin\frac{3}{2}\pi+2^2}{e^2+2}=\frac{3}{e^2+2}$$

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的．所谓定义区域，是指包含在定义域内的区域或闭区域．

由多元初等函数的连续性，如果要求它在点 p_0 处的极限,而该点又在此函数的定义区域内,则极限值就是函数在该点的函数值,即

$$\lim_{p \to p_0} f(P) = f(p_0)$$

- 思考题:

一元函数连续和二元函数连续的区别与联系。

6.3 多元函数的偏导数与全微分

■ 偏导数的概念

设函数$z=f(x,y)$在点（x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0，而x在x_0处有增量Δx时，相应的函数有增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, z'_x = \Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \text{或} f'_x(x_0, y_0)$$

同理,如果极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在（x_0, y_0)处关于y的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, z'_y = \Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \text{或} f'_y(x_0, y_0)$$

如果函数$z=f(x,y)$在平面区域D内每一点(x,y)处对于x（或y)的偏导数都存在，则称函数$f(x,y)$在D内有对x(或y)偏导函数,简称偏导数,

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad z'_x,\quad f'_x(x,y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad z'_y,\quad f'_y(x,y),$$

求$z = x^2 \sin 2y$的偏导数。

为求$\frac{\partial z}{\partial x}$,视$y$看作常数，对$x$求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin 2y$$

为求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$,视$x$看作常数，对$y$求导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$

设$f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$,求$f_x'(3,4)$, $f_y'(0,5)$

因为$f_x'(x,y)=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f_y'(x,y)=1-\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=1-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

所以 $f'(3,4)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$ $\quad f_y'(0,5)=1-1=0$

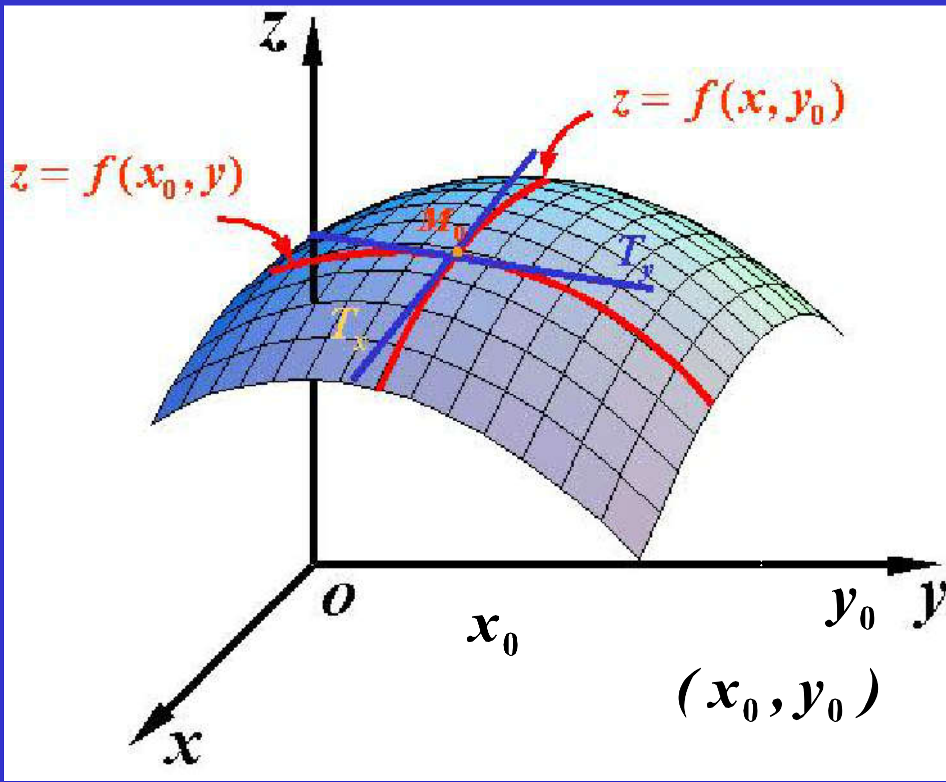
求$z=x^y$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$$

■ 偏导数的几何意义

二元函数$z=f(x,y)$在点（x_0,y_0)的偏导数有简单的几何意义.

设$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$为曲面$z=f(x,y)$上的一点，过M_0作平面$y=y_0$,截曲面得一曲线，其方程为$z=f(x,y_0)$,则导数$\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$，即偏导数$f'_x(x_0,y_0)$就是曲线在点$M_0$的切线$M_0T_x$对$x$轴的斜率；同样，偏导数$f'_y(x_0,y_0)$是曲面被平面$x=x_0$所截成的曲线在点$M_0$的切线$M_0T_y$对$y$轴的斜率。


z
$z = f(x, y_0)$
$z = f(x_0, y)$
M_0
T_y
T_x
o
x_0
y_0
y
(x_0, y_0)
x

■ 偏导数与连续的关系

我们知道，一元函数$y = f(x)$在x_0可导，则它在该点必连续.

但对于二元函数$z = f(x, y)$,即使在点(x_0, y_0)的两个偏导数都存在,函数$f(x, y)$在点（x_0, y_0)不一定连续。

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$$

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$$

$$f_y'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y)^2}{\Delta y} = 0$$

可见，函数$f(x,y)$在点（0,0）的两个偏导数都存在,而当动点M（x,y)沿直线$y=0$趋向于点(0,0)时，有

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

当动点M（x,y)沿直线$y=x$趋向于点(0,0)时，有

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0} 1=1$$

可见，$f(x,y)$在点（0,0)的极限不存在，当然在点(0,0)不连续。

注：偏导数存在与连续的区别
(1)偏导数存在，不一定连续；
(2)连续，不一定存在偏导数；

■ 高阶偏导数

例如设

函数$z=f(x,y)$在区域D内具有偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y),$$

一般来说,这两个偏导数还是x,y的函数，如果它们又存在对x或对y的偏导数，我们就定义函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数.我们可定义二元函数的二阶偏导数如下

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y)$$

这里，f_{xy}''表示函数$z=f(x,y)$先对自变量x求偏导数.

f_{xy}''和f_{yx}''通常称为二阶混合偏导数。

求$z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$的所有二阶导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}\bullet\frac{(1-xy)-(x+y)\cdot(-y)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=\frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}\bullet\frac{(1-xy)-(x+y)\cdot(-x)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=\frac{1+x^2}{(1+y^2)(1+x^2)}=\frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2y}{(1+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

求$z=e^x\sin(2x+y)$的所有二阶导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin(2x+y)+2e^x\cos(2x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cos(2x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\sin(2x+y)+2e^x\cos(2x+y)+2e^x\cos(2x+y)-4e^x\sin(2x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\sin(2x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos(2x+y)-2e^x\sin(2x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^x\cos(2x+y)-2e^x\sin(2x+y)$$

上述例子中二阶混合偏导数都是相等的,但对许多二元函数来说,它们的二阶混合偏导数并不相等,也就是说两者相等是要有条件的. 为此,给出下面的定理:

如果函数$z = f(x, y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$在区域$D$内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

设$f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$,求$f''_{xx}(0,0,1)$, $f''_{xz}(1,0,2)$, $f''_{yz}(0,-1,0)$, $f'''_{zzx}(2,0,1)$

$$f'_x = y^2 + 2zx,\ f'_y = 2xy + z^2,\ f'_z = 2yz + x^2$$

$$f''_{xx} = 2z,\ f''_{xz} = 2x,\ f''_{yz} = 2z$$

$$f''_{zz} = 2y,\ f'''_{zzx} = 0$$

$$f''_{xx}(0,0,1) = 2,\ f''(1,0,2) = 2$$

$$f''_{yz}(0,-1,0) = 0,\ f'''_{zzx}(2,0,1) = 0$$

■ 小结：

在二阶偏导数连续的情况下，混合偏导数的最终值和求导次序无关。

6.4 多元函数的复合函数的偏导数

■ 多元复合函数求导法则

设函数$z = f(u,v)$是变量u,v函数，而u,v是变量x,y的函数，$u = \varphi(x,y), v = \phi(x,y)$,因而$z = f[\varphi(x,y),\phi(x,y)]$是$x,y$的复合函数。

如果函数$u = \varphi(x,y)$及$v = \phi(x,y)$都在点(x,y)可微，函数$z = f(u,v)$在对应于(x,y)的点(u,v)处函数$z = f(u,v)$可微，则复合函数$z = f[\varphi(x,y),\phi(x,y)]$在点$(x,y)$可微

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

我们来证明第一个公式，若给x一个改变量Δx，则相应有u及v的改变量（证明过程可作为了解部分）

$$\Delta u=\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)$$

$$\Delta v=\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y)$$

由于$f(u,v)$可微，所以有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\Delta x}$$

因$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$存在，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x},\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}$，所以$u,v$关于自变量$x$是连续的。因而，$\Delta x\to 0$时，也有$\Delta u\to 0,\Delta v\to 0,$于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{\Delta x}$$

$$=0$$

所以有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

完全类似地可以证明第二个等式。

下面再介绍一特殊情形。

若$z=f(u,v)$,而$u=\varphi(t),v=\phi(t)$,则有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

另外，对于自变量或中间变量多于两个的情形，也有类似结果。例如，设$z = f(u,v,w)$,而$u = \varphi(s,r,t), v = \phi(s,r,t), w = \omega(s,r,t)$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}$$

设$z=e^x\sin y, x=2st, y=t+s^2$,求$\frac{\partial z}{\partial s},\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=e^x\sin y\cdot 2t+e^x\cos y\cdot 2s$$
$$=2e^x(t\sin y+s\cos y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=e^x\sin y\cdot 2s+e^x\cos y\cdot 1$$
$$=2e^x(2s\sin y+\cos y)$$

■ 隐函数的偏导数求法

我们已经学习了$F(x,y)=0$所确定的一元函数隐函数的求导方法，下面根据多元复合函数的求导法则来导出由$F(x,y,z)=0$确定的二元函数$z=z(x,y)$的偏导数公式。

设方程$F(x,y,z)=0$确定了$z=z(x,y)$,则有

$$F(x,y,z(x,y))=0$$

两边同时求关于x的偏导数，得

$$F'_x\cdot 1+F'_y\cdot 0+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

所以，当$F'_z \neq 0$时，有 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

同理可证 $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

设函数$F(x, y, z)$满足下列条件

（1）在点（x_0, y_0, z_0）的某邻域内连续，且具有连续偏导数F'_x, F'_y, F'_z;

（2）$F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$则方程$F(x, y, z) = 0$唯一确定了一个定义在$(x_0, y_0)$的某邻域的单值连续且具有连续偏导数的二元函数$z = f(x, y)$，它满足条件$z_0 = f(x_0, y_0)$,

并有 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$

注意 由方程$F(x, y, z) = 0$还可以确定函数$y = y(x, z)$

及$x = x(y, z)$,相应的偏导数公式读者可以自己给出。

求由方程$\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$所确定的隐函数$z = f(x, y)$的一阶偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

设$F(x, y, z) = \dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y}$

$$F'_x = \frac{1}{z}, F'_y = -\frac{y}{z} \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) = \frac{1}{y}$$

$$F'_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x+z}{z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{z}{(x+z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{z^2}{y(x+z)}$$

设$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

设$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$,则

$$F'_x = 2x, F'_z = 2z - 4$$

应用上面公式，得 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z}$$

再一次对x求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{(2-z) + x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z) + x\left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2}$$

$$= \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}$$

6.5 多元函数的极值

■ 二元函数极值的求法

设函数$z=f(x,y)$在点

$P_0(x_0,y_0)$具有偏导数，且在点（x_0,y_0）处有极值，则它在该点的偏导数必然为零 $f'_x(x_0,y_0)=0$ $f'_y(x_0,y_0)=0$

使 $f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$

同时成立的点(x_0,y_0)称为函数$f(x,y)$的驻点。

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又

$$f_x'(x_0,y_0)=0,\ f_y'(x_0,y_0)=0$$

令

$$f_{xx}''(x_0,y_0)=A,\ f_{xy}''(x_0,y_0)=B,\ f_{yy}''(x_0,y_0)=C$$

则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下

(1)$B^2-AC<0$时，函数$f(x,y)$在点P_0处取得极值，且当$A<0$时有极大值，当$A>0$时有极小值；

(2)$B^2-AC>0$时，函数$f(x,y)$在点P_0处没有极值；

(3)$B^2-AC=0$时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论。

利用定理6.2,我们把具有二阶连续偏导数的函数$z=f(x,y)$的极值的求法总结如下

第一步　解方程组$\begin{cases} f_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)=0 \end{cases}$,求出所有的驻点

第二步　对于每一个驻点(x_0,y_0),求出二阶偏导数的值

$$f_{xx}''(x_0,y_0)=A, f_{xy}''(x_0,y_0)=B, f_{yy}''(x_0,y_0)=C$$

第三步　定出B^2-AC的符号，按定理2的结论判定$f(x_0,y_0)$是否有极值、是极大值还是极小值

求函数$f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$的极值

（1）求驻点　　由于$f'_x(x,y)=2x-6, f'_y(x,y)=10y+10$

解方程组 $\begin{cases} 2x-6=0 \\ 10y+10=0 \end{cases}$ 即得驻点（3,−1）

（2）判断驻点是否极值点，若是，说明取得极值情况

又由于 $A=f''_{xx}(3,-1)=2>0, B=f''_{xy}(3,-1)=0$

$C=f''_{yy}(3,-1)=10, B^2-AC=20<0$

故$f(x,y)$在$(3,-1)$取得极小值，极小值为$f(3,-1)=-8.$

2.条件极值与拉格朗日乘数法

在前面所讨论的极值中，除对自变量给出定义域外，并无其它条件限制，我们把这一类极值称为无条件极值，而把对自变量还需附加其他条件的极值问题称为条件极值。条件条件极值问题有如下两种解法。

从$\varphi(x,y)=0$中解出y再代入$f(x,y)$，使二元函数的条件极值转化为一元函数的无条件极值问题。

求二元函数$z=x^2+2y^2-xy$在条件$x+y=8$下的极值

由$x+y=8$，得$y=8-x$，代入z

$$z = x^2 + 2(8-x)^2 - x(8-x) = 4x^2 - 40x + 128$$

由一元函数极值存在的必要条件，得 $\dfrac{dz}{dx} = 8x - 40 = 0$

所以 $x = 5$

因为 $\dfrac{d^2z}{dx^2} = 8 > 0$, 当 $x = 5$ 时，$y = 8 - 5 = 3$, $(5,3)$ 为二元函数 $z = x^2 + 2y^2 - xy$ 在条件 $x + y = 8$ 下极小值点，极小值为28

要找函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下可能极值点，可以先构成辅助函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

其中λ为一常数。求其对x与y的一阶偏导数，并使之为零，然后与方程$\varphi(x, y)=0$联立起来

$$\begin{cases} f_x(x, y)+\lambda\varphi_x(x, y)=0 \\ f_y'(x, y)+\lambda\varphi_y(x, y)=0 \\ \varphi(x, y)=0 \end{cases}$$

由这方程组解出x, y及λ，则其中x, y就是函数$f(x, y)$在附加条件$\varphi(x, y)=0$下的可能极值点的坐标。

这方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形。

至于如何确定所求得的点是否为极值点，是极大值点还是极小值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定。

求表面积为a^2而体积最大的长方体。

设长方体的长、宽、高分别为x, y, z，则体积是

$f(x,y,z)=xyz$,附加条件为$\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2zx-a^2=0$

作辅助函数

$$F(x,y,z)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

$$=xyz+\lambda(2xy+2yz+2zx-a^2)$$

令

$$F_x'=yz+2\lambda(y+z)=0$$

$$F_y'=zx+2\lambda(z+x)=0$$

$$F_z'=xy+2\lambda(x+y)=0$$

由前三式，得 $x = y = z$

代入第四式，得 $x = y = z = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

即当长方体的长、宽、高相等时，长方体的体积最大。

例 某工厂生产两种商品的日产量分别为 x和 y **(**单位：件**)**，总成本函数$C(x,y)=8x^2-xy+12y^2$ **(**单位：元**)**，商品的限额为$x+y=42$，求最小成本.

解 约束条件为$\varphi(x,y)=x+y-42=0$.

设拉格朗日函数

$$F(x,y)=8x^2-xy+12y^2+\lambda(x+y-42),$$

求其中对 x，y，λ，的一阶偏导数，并使之为零，

得方程组

$$\begin{cases} F_x=16x-y+\lambda=0 \\ F_y=-x+24y+\lambda=0 \\ F_\lambda=x+y-42=0 \end{cases}$$

得 $x=25$件，$y=17$件，故惟一驻点**(25,17)**也是最小值点，因此，$x=25$件，$y=17$件时，成本最小，最小成本为

$$C(25,17)=8\cdot25^2-25\cdot17+12\cdot17^2=8043\text{(元)}.$$