第三章　导数的应用

3.1.1 拉格朗日中值定理

定理1（拉格朗日中值定理） 若函数 $f(x)$ 满足：

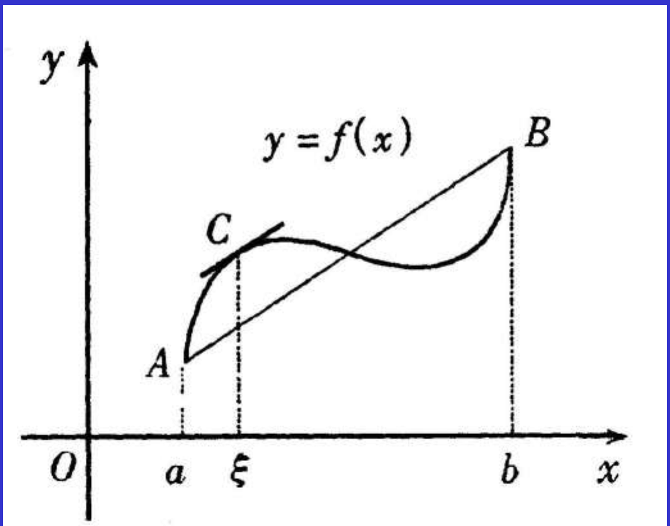
（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续

（2）在开区间（a,b）上可导

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.



定理的几何意义： 如果连续曲线 $y=f(x)$ 的弧 AB 上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，那末孤上至少有一点 C，在该点处的切线平行于弦 AB.

例 1 验证函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$在区间$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$是否满足拉格朗日中值定理的条件？如果满足求出符合定理的ξ值.

解 $f(x)$在$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$上连续, 在$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$内可导, 满足拉格朗日中值定理的条件.

因为$\dfrac{f(\sqrt{3})-f(-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}=\dfrac{0-0}{2\sqrt{3}}=0$

并且$f'(x)=x^2-1$, 解方程 $x^2-1=0$, 得$x=\pm1$,取$\xi=\pm1$

这说明在$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$内有$\xi=\pm1$, 使$f'(\xi)=0$

推论 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在开区间(a,b)内$f'(x)=0$, 则

$$f(x)=C\text{（}C\text{为常数）}\qquad x\in[a,b]$$

3.1.2 罗比塔法则

1. $\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 1 设 (1) 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 都趋于零，

(2) 在点 x_0 的某邻域内（点 x_0 本身可以除外），

$f'(x)$ 及 $\varphi'(x)$ 都存在且 $\varphi'(x) \neq 0$，

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ 存在（或为无穷大），

那么，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\ .$$

说明：

(1) 如果 $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$，当 $x \to x_0$ 时仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型时，且这时 $f'(x)$、$\varphi'(x)$能满足定理中$f(x)$、$\varphi(x)$所要满足的条件，那末可继续再用罗必塔法则.

(2) 定理中的 $x \to x_0$ 换为 $x \to \infty$（或其他趋势）时，结论也成立.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\ (b\neq 0)$

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$

例 2　**求**$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

注意：上式中的$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$已不是未定式，不能再应用罗必塔法则. 否则将导致错误结果.

2. $\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

定理 2 设 $f(x)$、$\varphi(x)$在点 x_0的某个去心邻域内有定义，若

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$；

（2）$f(x)$、$\varphi(x)$在点 x_0的某个去心邻域内可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$存在（或为无穷大），

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

定理 2 中$x\to x_0$换为$x\to\infty$（或其它情形）时，结论也成立.

例 3 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

例 4 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} (n > 0)$

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{nx^n} = 0$

3. 其它类型的未定式

说明 其他一些$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、1^∞、∞^0型的未定式，我们也可通过转换为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式来进行计算.

例 5 求$\lim\limits_{x\to+0} x^n \ln x (n>0)$

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^n \ln x = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{n}}{-nx^{-n-1}} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{-x^n}{n} = 0$

例 6 求$\lim\limits_{x\to+0} x^x$

解 设$y = x^x$及$\ln y = x\ln x$

$\lim\limits_{x\to+0} \ln y = \lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$

又$\because y = \mathrm{e}^{\ln y}$,而$\lim y = \lim \mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{\lim \ln y}$

$\therefore \lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} y = \mathrm{e}^0 = 1.$

注意：罗必塔法则是求未定式的一种有效方法，但最好能与其他求极限的方法结合使用. 例如能化简时应尽可能先化简，可以应用等价无穷小替代或应用重要极限时，应尽可能应用，这样可以使运算更简捷.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{\sin x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x - x}{x^3}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}.$$

3.2.1 函数的单调性

定理 2（判定法） 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导

（1）如果在(a,b)内$f'(x)>0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

（2）如果在(a,b)内$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

说明： 判定法中的闭区间换成其他各种区间，包括无穷区间，结论也成立.

确定函数的单调性的一般步骤是:

(1)确定函数的定义域;

(2)求出使 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点,并以这些点为分界点把定义域分成若干个子区间;

(3)确定 $f'(x)$ 在各个子区间内的符号,从而判定出 $f(x)$ 的单调性.

例 2 讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1$, 函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

在 $(-\infty, 0)$ 内 $y' < 0$ ，所以此函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调减少;

在 $(0, +\infty)$ 内 $y' > 0$, 所以函数在 $[0, +\infty]$ 上单调增加.

例 3 确定 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解 定义域：$(-\infty, +\infty)$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x) = 0$, 即 $6(x-1)(x-2) = 0$

得 $x_1 = 1, x_2 = 2$

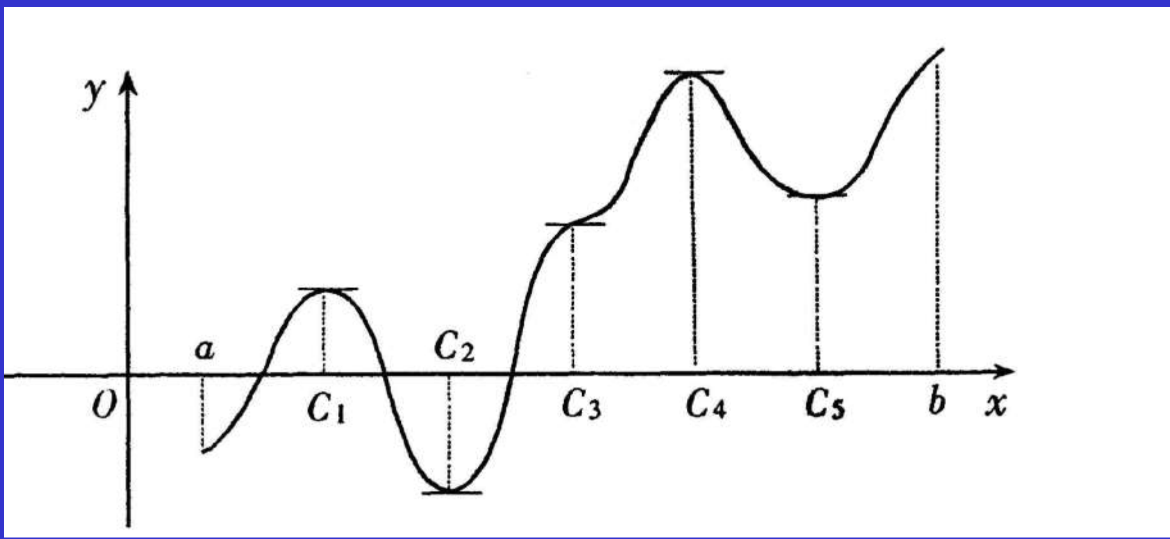
这两点把定义区间分成三个区间 $(-\infty, 1)$, $[1, 2]$, $[2, +\infty]$

$f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调增加, 在 $[1, 2]$ 单调减少, 在 $[2, +\infty]$ 上单调增加.

3.2.2 函数的极值

1. 函数的极值的定义

观察下图，函数$y=f(x)$在C_1、C_4的函数值$f(C_1)$、$f(C_4)$比它们近旁各点的函数值都大，而在点 C_2、 C_5的函数值$f(C_2)$、$f(C_5)$比它们近旁各点的函数值都小．对于这种性质的点和对应的函数值，我们给出如下的定义：



定义 1：设函数$y=f(x)$在 x_0 的左右近旁有定义,若对于x_0的左右近旁（异于x_0 ）的x 恒有:

(1) $f(x_0)>f(x)$ 称$f(x_0)$ 为函数$f(x)$ 的极大值, x_0 称为$f(x)$的极大值点.

(2) $f(x_0)<f(x)$ 称$f(x_0)$ 为函数$f(x)$ 的极小值, x_0 称为$f(x)$的极小值点.

函数的极大值与极小值统称为极值,极大值点与极小值点统称为极值点.

注意：（1）函数的极大值和极小值概念是局部的.

（2）函数的极大值未必比极小值大. 如上图, $f(C_1)$就比$f(C_5)$小.

（3）函数的极值一定出现在区间内部, 在区间端点处不能取得极值；而函数的最大值、最小值可能出现在区间内部, 也可能在区间的端点处取得.

（4）从上图可看到, 在函数取得极值点处, 曲线上的切线是水平的；反之, 曲线上有水平切线的地方函数不一定取得极值.。

2. 函数的极值的判定和求法

定理 1（必要条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且在 x_0 处取得极值，那么 $f'(x_0)=0$

驻点： 使函数导数为 0 的点（即 $f'(x)=0$ 的实根）叫函数 $f(x)$ 的驻点.

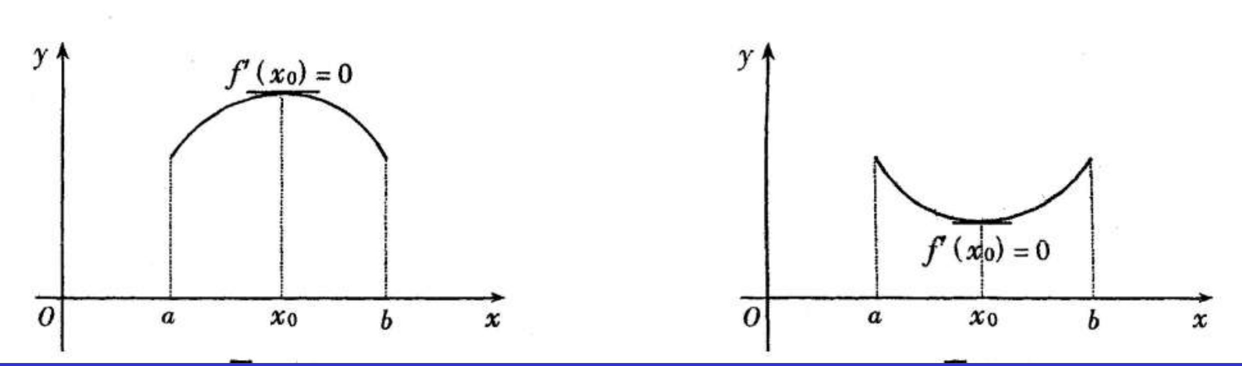
注意： 可导函数的极值点必定是驻点. 反过来，函数的驻点却不一定是极值点.

定理 2（第一种充分条件） 设函数$f(x)$在点x_0 的一个邻域内可导且$f'(x_0)=0$.

（1）如果 x取 x_0 左侧邻近的值时，$f'(x)$恒为正；当 x 取 x_0右侧邻近的值时，$f'(x)$恒为负，那么$f(x)$在x_0 取得极大值.

（2）如果 x取 x_0 左侧邻近的值时，$f'(x)$恒为负；当 x 取 x_0右侧邻近的值时，$f'(x)$恒为正，那么$f(x)$在x_0 取得极小值.

（3）如果 x取 x_0 左、右侧邻近的值时，$f'(x)$恒为正或为负；那么$f(x)$在 x_0 处没有极值.



如上图所示, 当 x 渐增地经过 x_0 时, 如果 $f'(x)$ 的符号由正变负, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值; 如果 $f'(x)$ 的符号由负变正, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值. 注意, 如果当 x 渐增地经过 x_0 时, $f'(x)$ 的符号并未改变, 那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

结论： 可导函数求极值点的步骤：

（1）求出函数的定义域；

（2）求出导数 $f'(x)$；

（3）求出 $f(x)$ 的全部驻点及导数不存在的点；

（4）用驻点及导数不存在的点把函数的定义域划分为若干区间，考察每个部分区间内的 $f'(x)$ 的符号，利用定理 2 确定是否是极值点，是极大点还是极小点；

（5）求出各极值点的函数值，即得函数 $f(x)$ 的全部极值.

例 1 求$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$的极值

解 （1） $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$；

（2） $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-2)(x+1)$；

（3） 函数$f(x)$在定义域内无不可导的点，令$f'(x)=0$得驻点为$x_1=-1$，$x_2=2$；

（4） 列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 10	↘	极小值-17	↗

由上表可知，函数$f(x)$的极大值为$f(1)=10$，极小值为$f(2)=-17$.

定理 3（第二种充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

例 2　求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值

解　(1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

(2) 由 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$ 得 $f(x)$ 的驻点为 $x=-1$，$x=0$，$x=1$，且无导数不存在的点；

(3) 由 $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$, 可知 $f''(0)=6>0$, $f''(-1)=f''(1)=0$, 由定理可知$(x^2-1)^3+1$为极小点, 极小值 $f(0)=0$. 但定理 3 对于$x=\pm1$失效, 因此需用定理 2 确定.

(4) 列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	非极值点	↘	极小值 0	↗	非极值点	↗

由上表可知, $x=0$为极小点, 极小值为 $f(0)=0$;

$x=-1$和$x=1$不是极值点.

3.2.3 函数的最值及应用

1. 函数的最大值和最小值

定义 2 已知闭区间 $[a,b]$上的连续函数 $f(x)$, 当 $[a,b]$上任一点 x_0处的函数值 $f(x_0)$与区间上其余各点的函数值 $f(x)$相比较时, 若

（1）$f(x) \le f(x_0)$成立, 则称 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$上的最大值, 称点 x_0为函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$上的最大点;

（2）$f(x) \ge f(x_0)$成立, 则称 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$上的最小值, 称点 x_0为函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$上的最小点.

最大值和最小值统称为最值.

结论: 最值点的可能点①驻点: $x_1, x_2, \cdots, x_n$; ②端点的值; ③导数不存在的点.

例 3　求 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值

解　（1）因为 $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$；令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x_1=-2$，$x_2=1$. 函数值为 $f(-2)=34$，　$f(1)=7$；

（2）区间 $[-3，4]$ 端点处的函数值为 $f(-3)=23$，　$f(4)=142$；

（3）比较以上各函数值，可知在 $[-3，4]$ 上，函数的最大值为 $f(4)=142$，最小值为 $f(1)=7$.

例 4　铁路线上 AB 段的距离为 100 公里，工厂 C 距离 A 处为 20 公里，AC 垂直 AB，为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路. 已知铁路上每吨公里货运的运费与公路上每吨公里货运的运费之比为 3:5. 为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 每吨货物的总运费最省，问 D 应选在何处？

解　设 D 点选在距离 A 点 x 公里处, 则

$$DB = 100 - x,\ CD = \sqrt{20^2 + x^2} = \sqrt{400 + x^2}.$$

设铁路上每吨公里货运的运费为 $3k$, 则公路上每吨公里货运的运费为 $5k$（k为常数）. 货物从 B 点运到 C 点每吨货物需要的总运费为 y, 则

$$y = 3k \cdot CD + 3k \cdot DB,$$

即

$$y = 5k\sqrt{400 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \le x \le 100).$$

下面，来求 x 在区间 $[0, 100]$ 上取得何值时，函数 y 的值最小.

求导数得，$y' = 5k\dfrac{x}{\sqrt{400+x^2}} - 3k = \dfrac{k(5x - 3\sqrt{400+x^2})}{\sqrt{400+x^2}}$.

令 $y' = 0$ 解得 $x = \pm 15$,

因为 $x > 0$，所以 $x = 15$，此时 $y\big|_{x=15} = 380k$,

与闭区间 $[0, 100]$ 端点的函数值相比较，

由于 $y\big|_{x=0} = 400k$, $\quad y\big|_{x=100} = 5\sqrt{10400}k > 500k$,

因此，当 $x = 15$ 时，y 取得最小值，

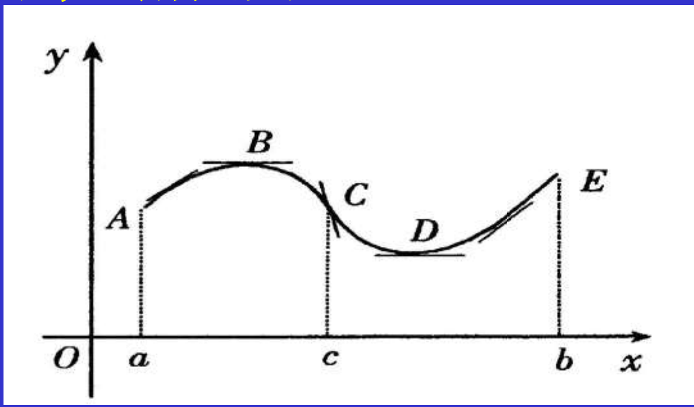
即 D 点应选在距离 A 点 15 公里处，这时每吨货物的总运费最省.

3.3.3 内容小结

1. 函数极值的概念;
2. 函数极值的求法;
3. 函数最值的概念;
4. 函数最值的求法.

3.4.1 曲线的凹向及其判别法

观察下图，理解定义



定义 1 如果在某区间内的曲线弧位于其上任意一点处切线的上方，则称此曲线弧在该区间内是凹的，此区间称为凹区间；如果在某区间内的曲线弧位于其上任意一点处切线的下方，则称此曲线弧在该区间内是凸的，此区间称为凸区间.

定理 1（曲线凹向的判定定理） 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数, 则

（1）如果在 (a,b) 内， $f''(x)>0$， 则曲线在 (a,b) 内是凹的；

（2）如果在 (a,b) 内， $f''(x)<0$， 则曲线在 (a,b) 内是凸的.

例 1　判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解　定义域　$x\in(-\infty,+\infty)$;

$y'=3x^2,\ y''=6x$

当 $x<0,\ y''<0$, 故 $y=x^3$ 在 $(-\infty,0]$ 上是凸的.

当 $x>0,\ y''>0$, 故 $y=x^3$ 在 $[0,+\infty)$ 上是凹的.

3.4.2　曲线的拐点

定义 2　连续曲线上凹的曲线弧与凸的曲线弧的分界点叫做曲线的拐点.

求函数拐点的步骤:

(1) 求 $f''(x)$

(2) 令 $f''(x)=0$, 解出这方程在区间 (a,b) 内的实根 x_0;

求 $f''(x)$ 不存在的点 x_0;

(3) 在点 x_0 的左右两侧, 检查 $f''(x)$ 在 x_0 左右两侧附近的符号: 如果 $f''(x)$ 的符号相反, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 就是拐点; 如果 $f''(x)$ 的符号相同, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 就不是拐点.

例 2 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点与凹凸区间.

解 定义域 $x \in (-\infty, +\infty)$;

$y' = 12x^3 - 12x^2$, $y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3})$;

令 $y'' = 0$, 及 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$

当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, 在 $(-\infty, 0]$ 上曲线是凹的;

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时, $y'' < 0$, 在 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 上曲线是凸的;

当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y'' > 0$, 在 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right]$ 上曲线是凹的.

当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 点 $(0,1)$ 是曲线一个拐点;

当 $x = \frac{2}{3}$ 时, $y = \frac{11}{27}$, 点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ 是曲线另一个拐点.

3.4.3 曲线的渐近线

1. 水平渐近线

定义 3 若自变量$x\to\infty$(有时仅当 $x\to+\infty$或$x\to-\infty$)时，函数$f(x)$以常数 C为极限，即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$，则直线$y=C$叫做曲线$y=f(x)$的水平渐近线.

例如： $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ y=\dfrac{\pi}{2}$和$y=-\dfrac{\pi}{2}$是曲线$y=\arctan x$的两条水平渐近线.

2． 垂直渐近线

定义 4 若当自变量$x \to x_0$（有时仅当 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$）时，函数$f(x)$为无穷大量，即$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则直线$x = x_0$叫做曲线$y = f(x)$的垂直渐近线.

例如：$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$

$\therefore x = 1$是曲线$y = \ln(x-1)$的垂直渐近线.

3.4.4　作函数图形的一般步骤

描绘函数图形的一般步骤：

(1) 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$；

(2) 求 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在定义域内的全部实根. 用这些根把定义域分成几个部分区间；

(3) 确定每个部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号. 由此确定图形的升降和凹向，极值点和拐点；

(4) 确定图形的水平，垂直渐近线及其他变化趋势；

(5) 算出 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)$ 的根所对应函数值. 定出图形上相应的点.

例 3 作函数 $y=3x^2-x^3$ 的图像.

解 （1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）$y'=3x(2-x)$，由 $y'=0$，得 $x=0$ 和 $x=2$，

当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=4$；$y''=6(1-x)$，

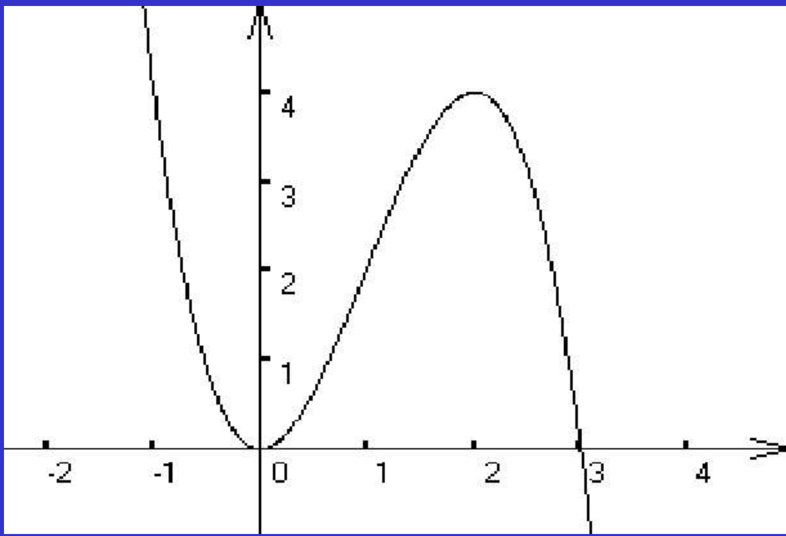
由 $y''=0$，得 $x=1$，这时 $y=2$.

（3）列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	+	3	+	0	$-$
y''	+	+	+	0	$-$	$-$	$-$
y	$\searrow\cup$	极小值 0	$\nearrow\cup$	拐点（1，2）	$\nearrow\cap$	极大值 4	$\searrow\cap$

由上表可知，函数有极小值 $f(0)=0$，极大值 $f(2)=4$，曲线有拐点 $(1,2)$.

(4) 取辅助点$(-1,4)$, $(3, 0)$, 结合上述讨论, 作出函数的图像.



函数$y=3x^2-x^3$的图像

3.5 微分学在经济中的应用

一、边际问题：由导数定义知，函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$描述因变量y随自变量x变化的快慢情况.

在经济分析中，通常用“边际”概念来描述因变量y关于自变量x变化的快慢情况. 对经济学中的函数而言，因变量对自变量的导数称为“边际”. 例如，总成本函数$C=C(Q)$，则总成本C对产量Q的导数称为边际成本(函数)，记作MC，即$MC=\frac{dC}{dQ}$.

边际成本是成本的变化率，在经济学中它表示产量增加一个单位时所增加的成本，或增加这一个单位产品的生产成本. 又如，总收益函数$R=R(Q)$(收入$=$价格$\times$产量)，则总收益R对产量Q的导数称为边际收益(函数). 记作MR，即$MR=\frac{dR}{dQ}$.

二、弹性问题

1. 函数的弹性

对函数$y=f(x)$，当自变量x的改变量为Δx时，其自变量的相对改变量是$\frac{\Delta x}{x}$，函数$f(x)$相对应的相对改变量则是$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$．函数的弹性是为考察相对变化而引入的.

【定义 8】 设函数$y=f(x)$在点x可导，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{f(x)}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=x\frac{f'(x)}{f(x)}$$

存在，则称此极限值为函数$y=f(x)$在点x处的弹性，记作$\frac{Ey}{Ex}$或$\frac{Ef(x)}{Ex}$，即

$$\frac{Ey}{Ex}=x\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}.$$

2. 弹性的经济意义

我们以需求函数的弹性来说明弹性的经济意义.

设需求函数为 $Q=Q(p)$，按函数弹性定义，需求函数的弹性记作 E_d 为：

$$E_d=\frac{p\,dQ}{Q\,dp}=p\frac{Q'}{Q},$$

上式称为需求函数在点 p 处的需求价格弹性，简称为需求价格弹性.

一般情况下，因 $p>0$，$Q(p)>0$，而 $Q'(p)<0$（因为一般地 $Q=Q(p)$ 为单调减少函数），所以 $E_d<0$.

需求价格弹性 E_d 的经济意义：在价格为 p 时，如果价格提高或降低 1% 需求由 Q 起, 减少或增加的百分数是 $|E_d|$.

当 $|E_d|<1$ 时，称需求是低弹性的；当 $|E_d|>1$ 时，称需求是弹性的；当 $|E_d|=1$ 时, 称需求是单位弹性的.

三 、最优化问题

1. 利润最大

在假设产量与销量一致的情况下，总利润函数 $L(Q)$ 定义为：总收益函数 $R(Q)$ 与总成本函数 $C(Q)$ 之差， 即

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

如果企业以利润最大为目标而控制产量，那么应选择产量 Q 的值，使总利润函数 $L = L(Q)$ 取最大值. $L = L(Q)$ 取得最大值的必要条件为 $L'(Q) = 0$， 即 $R'(Q) = C'(Q)$. 因此，取得最大利润的必要条件是边际收益等于边际成本.