第二章　导数与微分

2.1 导数的定义及基本初等函数导数公式

2.2　函数的四则运算的求导法则

2.3　复合函数的求导法则、高阶导数

2.4　隐函数的导数、对数求导法

2.5　微 分

2.6　微 分的应用

2.1　导数的概念及基本初等函数导数公式

2.1.1 导数的定义

引例

例 1. 变速直线运动的瞬时速度

已知$s=f(t)$，求物体在某点t_0时刻的速度$v(t_0)$.

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

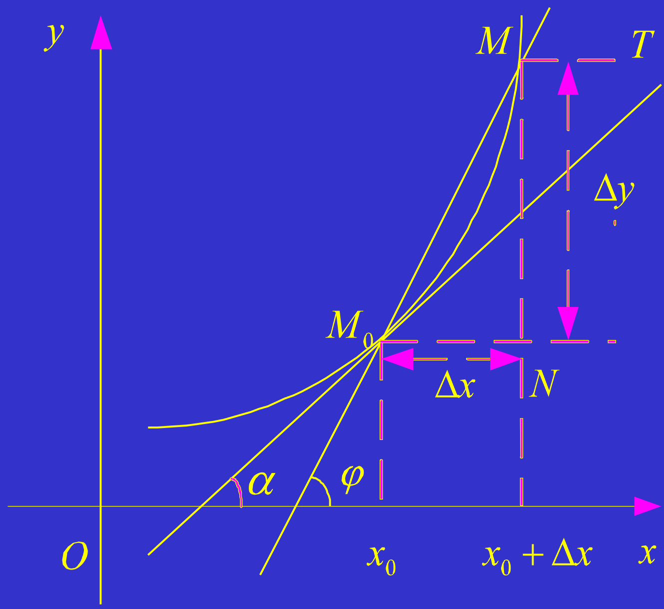
这就是说，物体运动的瞬时速度就是位置函数的增量Δs和时间增量Δt的比值当时间增量Δt趋于零时的极限.

例 2. 平面曲线的切线斜率

已知曲线 $y = f(x)$，

求曲线在点 M_0 的切线斜率 k：

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



这就是说，曲线 $y = f(x)$ 在

点 M_0 处的纵坐标 $\boldsymbol{y}$ 的增量 Δy

与横坐标 $\boldsymbol{x}$ 的增量 Δx 的比值，

当 $\Delta x \to 0$ 时的极限为曲线在 M_0 点处切线的斜率.

1 导数的概念

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当x从 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，相应地，函数有改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数$y=f(x)$在点x_0处可导，并称此极限为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，记作$f'(x_0)$，或$y'\big|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果极限不存在，则称函数$y=f(x)$在点x_0 处不可导.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

后一式中的 h 就是定义式中的自变量的增量 Δx.

根据导数的定义，两个实际问题可叙述为：

(1) 变速直线运动的物体在时刻 t_0 的瞬时速度，就是位置函数 $s=f(t)$ 在 t_0 处对时间 t 的导数，即

$$v(t_0)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}.$$

(2) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线斜率，就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处对自变量 $\boldsymbol{x}$ 的导数，即

$$k=y'\big|_{x=x_0}.$$

例 3 设 $f(x)=x^2$，求 $f'(1)$，$f'(x_0)$.

解 设在点 $x_0=1$ 处有改变量 Δx，则函数的改变量为

$\Delta y = f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1=2\Delta x+(\Delta x)^2$，

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x,$$

从而

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2,$$

所以 $f'(1)=2$.

类似地，

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

导函数 如果函数$y=f(x)$在区间(a,b)内的每一点处都可导，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内可导. 这时，对于(a,b)内的每一个确定的值x，都对应着惟一确定的函数值$f'(x)$，于是就确定了一个新的函数，这个函数叫做函数的导函数，记作$f'(x)$，或y'，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$等. 导函数通常简称为导数.

显然，函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$就是导函数$f'(x)$在点$x=x_0$处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

2. 左、右导数

左可导 如果极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则这个极限称为函数$y = f(x)$在点 x_0处的左导数，并且说$f(x)$在点 x_0处左可导，记作$f'_-(x_0)$.

右可导 如果极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则这个极限称为函数$y = f(x)$在点 x_0处的右导数，并且说$f(x)$在点 x_0处右可导，记作$f'_+(x_0)$.

根据极限存在的充要条件，我们有下面的定理：

定理 函数$f(x)$在点 x_0处的左、右导数存在且相等是$f(x)$在点x_0处可导的充要条件.

3. 导数的几何意义

由切线问题的讨论和导数的定义知，函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$在几何上表示曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0,y_0)$处的切线的斜率.

过切点$M_0(x_0,y_0)$且垂直于切线的直线叫做曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0,y_0)$处的法线.

如果$f'(x_0)$存在，则曲线$y=f(x)$在$M_0(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0);$$

曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0,y_0)$处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad，\ (f'(x_0)\neq 0).$$

当$f'(x_0)=0$ 时，切线方程为平行于 $\boldsymbol{x}$ 轴的直线$y=f(x_0)$，法线方程为垂直于$\boldsymbol{x}$轴的直线$x=x_0$；

当$f'(x_0)=\infty$时，切线为垂直于 $\boldsymbol{x}$ 轴的直线$x=x_0$，法线为平行于$\boldsymbol{x}$轴的直线$y=f(x_0)$.

例 4　求抛物线$y=x^2$在点（1, 1）处的切线方程和法线方程.

解　由导数及导数的几何意义可知，$k=y'\big|_{x=1}=2$，因此，所求的切线方程为

$$y-1=2(x-1),$$

即

$$y=2x-1$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1),$$

即

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

4　求导举例

由导数的定义可知，求$y=f(x)$的导数y'的一般步骤如下：

（1）　求函数的改变量$\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$；

（2）　算比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

（3）　求极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 5　求 $y=x^n (n\in N)$ 的导数.

解（1）求增量：

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n\text{；}$$

（2）算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}$，

（3）取极限：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$，

即 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

可以证明，幂函数 $y=x^\alpha$（α 为任意实数）的导数为：

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

例如

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{，}\quad (\frac{1}{x})'=(x^{-1})'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

例 6 求函数$y=\log_a x$的导数

解（1）求增量：$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$；

（2）算比值：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$；

（3）取极限：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a},$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，若$a=\mathrm{e}$，则得$(\ln x)'=\frac{1}{x}$．

4　可导与连续

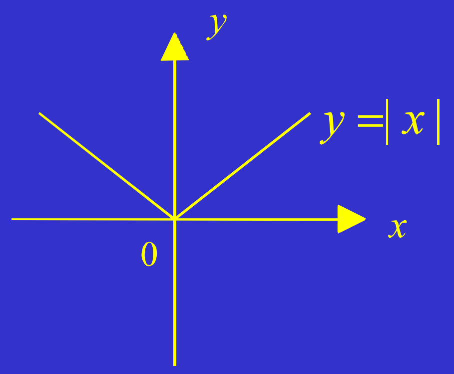
定理　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注意　定理的逆命题不成立，即如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，但函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不一定可导.

例如　函数 $y=|x|$ 在点 $x_0=0$ 处连续，但它在点 $x_0=0$ 处不可导.

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases},$$



所以

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1,$$

因而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，即 $y=|x|$ 在点 $x_0=0$ 处不可导.

2.1.2　六种基本初等函数的导数公式

基本初等函数的导数公式

（1）$(C)'=0$（C为常数）;　　（2）$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$;

（3）$(e^{x})'=e^{x}$;　　（4）$(a^{x})'=a^{x}\ln a$;

（5）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;　　（6）$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;

（7）$(\sin x)'=\cos x$;　　（8）$(\cos x)'=-\sin x$;

（9）$(\tan x)'=\sec^2 x$;　　（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x$;

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$;　　（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

（13）$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　　（14）$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

（15）$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$;　　（16）$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

例 7 求$y=\arcsin x$的导数

解 $y=\arcsin x$，$x\in(-1,1)$为$x=\sin y, y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$的反函数

$$\therefore (\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1$$

同理：$(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

例 6 求$y=\log_a x,(a>0且a\neq 1)$的导数

解 $y=\log_a x,(a>0且a\neq 1)$是$x=a^y$的反函数

$$(\log_a{}^x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

$$\therefore (\log a^x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

特别地：$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

2.2 求导法则

2.2.1 四则运算求导

2.2.2 复合函数求导

2.2.3 隐函数求导

2.2.4 高阶求导

1. 函数的四则运算的求导法则：

法则 1 设$u=u(x)$和 $v=v(x)$都在点x处可导，则 $u\pm u$也在x处可导， 且$(u\pm v)'=u'\pm v'$.

法则 2 设$u=u(x)$和 $v=v(x)$都在点x处可导， 则 $u\cdot v$也在x处可导， 且$(u\cdot v)'=u'v+uv'$

注：以上两个法则可推广到有限个函数的情形：$(cu)'=cu'$

法则 3 设$u=u(x)$和 $v=v(x)$都在点x处可导，$v(x)\neq 0$,则$\dfrac{u}{v}$也在点x处可导， 且

$$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

特别地 $(\dfrac{1}{v})'=-\dfrac{1}{v^2}$

特别注意 $(uv)'\neq u'v',\left(\dfrac{u}{v}\right)'\neq\dfrac{u'}{v'}$.

例 1 $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}$，求 $f'(\frac{\pi}{2})$

解 $f'(x)=3x^2-4\sin x$；

$$f'(\frac{\pi}{2})=3\times(\frac{\pi}{2})-4\sin\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi^2-4.$$

例 2 求 $y=\tan x$ 的导数

解 $y'=(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore (\tan x)'=\sec^2 x$$

同理：$(\cot x)'=-\csc^2 x$

2. 复合函数的求导法则

设$u=\varphi(x)$在x可导，函数$y=f(u)$在相应的点u可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在x处也可导，且

$$(f[\varphi(x)])'=f'(u)\cdot u'(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

说明：应用复合函数求导时，首先要分析所给函数可看作又哪些函数复合而成，如果所给函数能分解成比较简单的函数，而这些函数的导数我们已经会求，那么应用复合函数的求导法则就可以求出所给函数的导数.

例 1　$y=\ln\tan x$, 求 y'

解

$$(\ln\tan x)'=(\ln u)'\cdot(\tan x)'=\frac{1}{u}\cdot\sec^2 x$$

$$=\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

例 2　$y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解

$$\left[\ln\cos(\mathrm{e}^x)\right]'=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot(\cos(\mathrm{e}^x))'$$

$$=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\left[-\sin(\mathrm{e}^x)\right]\cdot(\mathrm{e}^x)'$$

$$=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$$

3.　高阶导数

定义：一般地，$y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y'=f'(x)$ 的导数称为 $y=f(x)$ 的二阶导数，

记作　y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

例 3　$y=ax+b$，求 y''.

解　$y'=a,\quad y''=0$

例 4　指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶导数.

解　$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ ，$(\mathrm{e}^x)''=\mathrm{e}^x$，…

$$\therefore (\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$$

3. 隐函数的导数

例 1　　求由方程$e^y + xy - e = 0$所确定的隐函数y的导数$\frac{dy}{dx}$

解　把方程两边对x求导，注意y是x的函数

左边对x求导：$\frac{d}{dx}(e^y + xy - e) = e^y \cdot \frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx}$

右边对x求导：$(0)' = 0$

$$\therefore \mathrm{e}^{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x-\mathrm{e}^{y}}(x+\mathrm{e}^{y}\neq 0)$$

（在这个结果中，分式中的y是由方程$e^{y}+xy-e=0$所确定隐函数）

例 8 求由方程$y^{5}+2y-x-3x^{7}=0$所确定的隐函数$\boldsymbol{y}$在$x=0$处的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$

解

$$5y^{4}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^{6}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+21x^{6}}{5y^{4}+2}$$

当$x=0$时，由原方程得$y=0$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

5 对数求导法

这种方法适用于幂指函数. 先在$y=f(x)$的两边取对数然后再求出y的导数.

例 2 求$y=x^{\sin x}$的导数

解 $\ln y=\sin x\ln x$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$$

6. 参数方程求导法

设由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t\in(\alpha,\beta)$确定的函数为$y=f(x)$，其中函数$\varphi(t),\psi(t)$可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，则$y=f(x)$可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, t\in(\alpha,\beta)$$

例 3 已知椭圆的参数方程为$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$，求椭圆在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解 当$t = \dfrac{\pi}{4}$时，椭圆上的相应点 M_0 的坐标是

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, y_0 = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

曲线在点M_0的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}$$

切线方程：$y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

$$bx + ay - \sqrt{2}ab = 0.$$

2.3 微分

2.3.1 微分的概念

2.3.2 微分的基本公式与微分的运算法则

2.3.1 微分的概念

例 1 一块正方形金属薄片受温度的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少？

解 设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 $A=x^2$

当自变量 x 在 x_0 有增量 Δx 时，

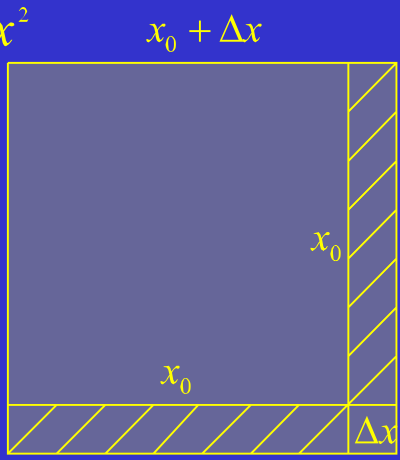
相应的面积增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

ΔA 由两部分组成，第一部分是 $2x_0\Delta x$

是 Δx 的线性函数，当 $\Delta x\to 0$ 时，

第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，



由此可见，如果边长改变很微小时，面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分代替.

定义 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

其中,A是与Δx无关的量,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微,称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分,记作 $\mathrm{d}y$,即 $\mathrm{d}y = A\Delta x$.

定理 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且当 $f(x)$ 在点 $f(x)$ 在点 x_0 可微时, 其微分一定是

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$$

例 2 求 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分

解 函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y = (x^2)'\Big|_{x=1}\Delta x = 2\Delta x$$

函数 $y=x^2$ 在 $x=3$ 处的微分

$$\mathrm{d}y = (x^2)'\Big|_{x=3}\Delta x = 6\Delta x$$

可微的充要条件

定理 2 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充要条件是 $f(x)$ 在点 x 处可导, 且

$$A=f'(x).$$

由此可得

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x.$$

当 $y=x$ 时, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x$, 即 $dx=\Delta x$, 因此, 微分通常写成:

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

两边同除以 $\mathrm{d}x$, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

在导数中, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是一个完整的记号, 表示函数 $\boldsymbol{y}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的导数, 而现在可以看成函数的微分与自变量的微分的商, 所以, 导数又叫微商.

特别注意：

(1) 微分与导数虽然有着密切的联系，但它们是有区别的；

(2) 导数是函数在一点处的变化率，而微分是函数在一点处由自变量增量所引起的函数增量的主要部分；

(3) 导数的值只与 x 有关，而微分的值一般与 x 和 Δx 都有关.

例 3 求函数 $y=x^2+1$ 在 $x=1$, $\Delta x=0.1$ 时的改变量 Δy 和 $\mathrm{d}y$.

解 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2+1-(x^2+1)=2x\Delta x+(\Delta x)^2$,

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=2\times1\times0.1+(0.1)^2=0.21$$

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x=(x^2+1)'\Delta x=2x\Delta x,$$

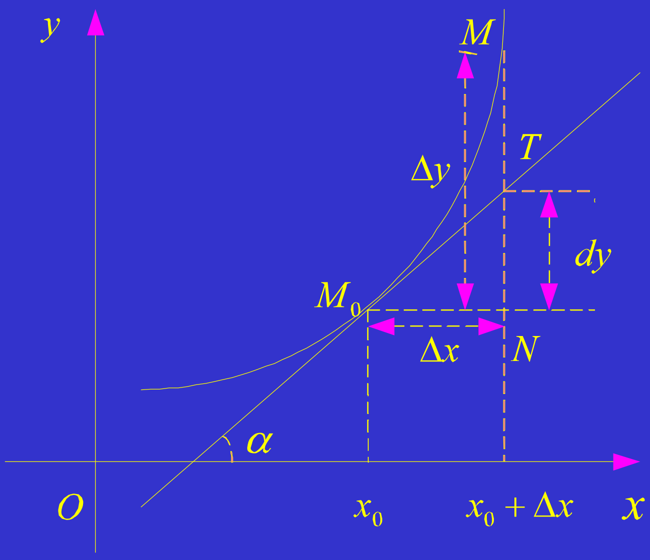
$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=2\times1\times0.1=0.2$$

微分的几何意义

函数 $y=f(x)$ 的图像是一条曲线，它在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是该曲线在点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $\tan\alpha$.

因此

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x=\tan\alpha\cdot M_0N=NT.$$



结论 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的微分在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 处切线的纵坐标的改变量.

2.3.2 微分的基本公式及微分的运算法则

1. 微分基本公式

（1）$\mathrm{d}(C)=0$（C 为常数）;

（2）$\mathrm{d}(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$；

（4）$\mathrm{d}(a^{x})=a^{x}\ln a\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（6）$\mathrm{d}(\log_{a}x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$；

（8）$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$；

（9）$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^{2}x\mathrm{d}x$；

（10）$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^{2}x\mathrm{d}x$；

（11）$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$；

（12）$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$；

（13）$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$；

(14) $\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$；

（15）$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$；

（16）$\mathrm{d}(\operatorname{arccot}x)=-\dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$；

（17）$\mathrm{d}(\ln|x|)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

2. 微分的四则运算法则

设函数$u=u(x), v=v(x)$在点 处可微, 则

(1) $\mathrm{d}(u \pm v)=\mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$;

(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$;

(3) $\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$, ($C$ 为常数);

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}, (v \neq 0)$;

(5) $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{v}\right)=-\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2}$.

复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 都可微, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy=f'(u)\varphi'(x)dx=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx\ .$$

由于 $du=\varphi'(x)dx$, 所以, 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分也可以写成:

$$dy=f'(u)du.$$

可见, 无论 u 是自变量还是中间变量, 微分形式 $dy=f'(u)du$ 总保持不变, 这一性质称为微分形式不变性.

例 4 设 $y=\sin\sqrt{2x}$, 求 dy.

解法一 由公式 $dy=y'dx$, 得

$$dy=\left(\sin\sqrt{2x}\right)'dx=\frac{1}{\sqrt{2x}}\cos\sqrt{2x}dx.$$

解法二 由微分形式不变性, 得

$$dy=\cos\sqrt{2x}d\left(\sqrt{2x}\right)=\cos\sqrt{2x}\frac{1}{2\sqrt{2x}}d(2x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}\cos(\sqrt{2x})dx.$$

2.4　微分的应用

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，有

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

(1)　$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$

(2)　$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

(3)　$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

取 $x_0=0$，得

(4)　$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$

应用第 4 个公式，可以得以下几个工程上常用的近似公式：

假设 $|x|$ 很小，有

① $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$　② $\ln(1+x)\approx x$　③ $\mathrm{e}^x\approx 1+x$

④ $\sin x\approx x$（x取弧度数）　⑤ $\tan x\approx x$（x 取弧度数）

例 1　求$\sqrt[3]{126}$的近似值.

解　因为$\sqrt[3]{126}=\sqrt[3]{125+1}=5\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{125}}$，

由公式$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}$得

$$\sqrt[3]{126}\approx 5\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{125}\right)\approx 5.013 .$$

例 6　求$\ln 1.01$的近似值.

解　因为$\ln 1.01=\ln(1+0.01)$,

所以, 由公式$\ln(1+x)\approx x$得

$$\ln 1.01\approx 0.01.$$