

准饱和正冻土水热力耦合模型的扩展有限元程序研发

何 敏^{1, 2}, 冯孝鹏¹, 李 宁¹

(1. 西安理工大学 岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2. 中国电建集团 西北勘测设计研究院有限公司, 陕西 西安 710065)

摘要: 针对冻土冻融过程中存在移动相变界面及材料分区不断变化的特点, 基于已建立的能全面地描述冻土的水、热、力与变形实际状态的准饱和冻土耦合模型, 推导土颗粒、水和冰颗粒的温度场、变形场及水分场的扩展有限元解析格式, 构建水热力相互作用在程序中实现的具体方法, 开发一款能够为实际冻土工程服务的耦合分析平台 3GEXFEM, 利用程序对 Fukuda 系列试验进行数值模拟, 分析得到的温度场、水分场与变形场与试验结果较一致, 验证了程序的合理性和先进性。此外, 基于程序系统地研究不同环境条件: 上覆压力、温度梯度、变温模式、变温速率对冻土冻结过程中水热力耦合的影响, 为模型及程序的工程应用奠定了基础。

关键词: 土力学; 准饱和正冻土; 水热力耦合; 程序研发

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2017)11 - 2798 - 12

Development of the extended finite element program for the thermo-hydro-mechanical coupling model of quasi-saturated freezing soil

HE Min^{1, 2}, FENG Xiaopeng¹, LI Ning¹

(1. *Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China;*

2. *PowerChina of Xibei Engineering Corporation Limited of the Power Construction Corporation, Xi'an, Shaanxi 710065, China*)

Abstract: A method based on the extended finite element(EFM) was proposed to overcome the problem in modeling the multi-field coupling in permafrost engineering which has the characteristics of moving interface of phase transition and changing material zones. A theory capturing various couplings among the liquid transport within the pores, the force interaction between the soil skeleton and crystal ice, the energy jump during the phase-changing between ice and water was used. The governing equations for solving the primary field variables such as temperature, liquid pressure and solid displacement were derived and an analysis platform 3GEXFEM was developed. The validation of the program was accomplished by means of the numerical simulation to an experiment published by Fukuda. The results of the simulation of the temperature field, moisture distribution and heave agreed well with the experimental results. In addition, the moisture-heat-stress coupling of frozen soil during freezing process was solved under different environmental conditions such as overburden pressure, temperature gradient, temperature change mode and cooling rate, showing that 3GEXFEM program are well adapted for practical engineering.

Key words: soil mechanics; quasi-saturation freezing soil; thermo-hydro-mechanical coupling model; program development

收稿日期: 2017 - 04 - 25; **修回日期:** 2017 - 08 - 08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51179153); 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(17JK0557)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 51179153) and Special Scientific Research Plan of Shaanxi Provincial Department of Education(Grant No. 17JK0557)

作者简介: 何 敏(1981 -), 男, 博士, 2004 年毕业于西安理工大学水利水电工程专业, 现任副教授, 主要从事岩土工程三场耦合等方面的教学与研究工作。E-mail: hem81@163.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.0513

1 引 言

我国多年冻土面积约为 $206.8 \times 10^4 \text{ km}^2$, 约占国土面积的 1/5, 冻土面积位居世界第三位^[1]。如此广阔的冻土区不仅有着丰富的矿产资源, 也有诸多工程冻害问题。冻害的实质是岩土介质带相变的水、热、力多场耦合问题^[2]。因此, 冻土多场耦合问题研究成为了岩土工程界关注的焦点。关于冻土试验和耦合模型方面的研究工作已经开展^[3], 并已建立了相对成熟的冻土理论框架^[4-6]。但关于冻土工程多场耦合分析程序方面的研究却相对较少。欧美及日本在这方面的研究远领先于国内, 已开发出了不少相关的分析程序^[7-8], 近年来国内学者也开始关注这方面的工作。张玉军^[9-10]基于 Galerkin 方法先后建立了岩土介质多场弹塑性耦合二维和三维分析程序, 并通过相关实例进行了验证。刘亚晨^[11]建立了 THM 耦合数学模型并编制了相应的有限元程序。韦立德等^[12]研制出了考虑饱和和非饱和条件下渗流场和温度场对应力场作用的三维弹塑性有限元程序。陈益峰等^[13]研发了多相流 THM 全耦合有限元程序 THYME^{3D}。张学富等^[14]建立了冻土渗流场和温度场耦合问题的数学模型, 并编制了有限元分析程序。贾善坡等^[15]则以 ABAQUS 软件为求解器, 在 Matlab 语言环境下编制相应的计算程序。刘泉声等^[16-19]则开展了岩体多场耦合方面的研究, 并研发了相应的分析程序。何 敏等^[20-23]以 Final 源程序为平台开发了饱和正冻土全耦合分析程序 3G2012。分析以上各耦合程序可以看出, 这些程序考虑冻土的本构关系时往往局限于线弹性, 或者只是借助于商业程序的二次开发, 没有形成相对成熟且可应用于工程实际的分析平台。

冻土冻胀数值分析程序^[24-26]仍主要采用基于次冻胀理论与冰分凝理论提出和发展的刚性冰模型, 这显然与实际冻土工程的需要不符合。此外, 冻土冻结过程中水热力耦合问题求解的重要特征是移动冰水界面及冻结区、未冻区等材料分区不断随时间变化, 而传统有限元往往需要更高密度的有限元网格, 大大限制了程序的实际应用。

鉴于此, 本文拟根据已建立的可以考虑水分迁移引起的对流传热、黏弹性耗散和热力耦合耗散等多因素影响, 且能全面地描述冻土的水、热、力与变形的实际状态的准饱和冻土耦合模型, 推导土颗粒、水和冰颗粒的温度场、变形场及水分场的扩展

有限元解析格式, 构建水热力相互作用在程序中实现的分析计算方法, 尝试开发了一款能够为实际冻土工程服务的耦合分析平台, 通过与标准冻胀试验成果对比, 验证程序的正确性与合理性, 并利用程序系统研究了不同环境条件下(上覆压力、温度梯度、变温模式、温变速率等)冻土冻结过程中水热力耦合效应。

2 准饱和正冻土水热力耦合模型

基于冻土骨架黏弹性本构关系, 并通过考虑水体的可压缩性以及冻融过程中冰/水相变、水分迁移引起的对流传热现象等建立了准饱和正冻土水热力耦合模型^[27], 模型基本假定如下:

- (1) 土体是饱和或者准饱和的, 气体以封闭于土颗粒之间、溶于未冻水 2 种形式存在。
- (2) 冻土体的变形包括四大部分: 由于外力作用而使冻土体发生的线弹性变形或黏弹塑性变形, 未冻水(含迁移水)发生相变成冰引起的体积膨胀, 封存气体导致土颗粒与水的密度变化而引起的变形; 土颗粒的热胀冷缩变形。
- (3) 土体中水体的流动服从达西定律。
- (4) 土骨架中能量传播包括传导、对流及功能转化。
- (5) 水分驱动力模型为吸附薄膜模型^[28]。

2.1 平衡方程

平衡方式可表示为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \sigma'_{ij} + \nabla p_w - \rho \bar{X} &= 0 && \text{(未冻区)} \\ \nabla \sigma'_{ij} + (1 - \chi) \nabla p_{ij} + \chi \nabla p_w - \rho \bar{X} &= 0 && \text{(冻结缘 II 区)} \\ \nabla p_{ij} - \rho \bar{X} = 0, \quad \sigma'_{ij} = -\chi p_w &&& \text{(冻结区和冻结缘 I 区)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: σ'_{ij} , p_{ij} 和 p_w 分别为土骨架、冰和未冻水的有效应力张量; χ 为冻土体内未冻水的孔隙水压力系数。

2.2 质量守恒方程

根据准饱和冻土体各相成分的连续性条件, 可以推导得到具有统一形式的质量守恒方程:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{v}_w - \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} n_w + \frac{\Delta \rho_{wi}}{\rho_i} \dot{n}_{wi} \quad (2)$$

式(2)表示: 单位时间冻土微元体的变形等于迁移进入的水分量、温度及压力变化导致液相体积变化(水体密度变化)及土体内的未冻水分相变成冰后增加的附加体积之和。

2.3 能量守恒方程

能量守恒方程可表示为

$$\bar{C}_3 \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{C}_1 \bar{v}_s \nabla T + \bar{C}_2 \bar{v}_w \nabla T = \nabla(\bar{\lambda} \nabla T) - \bar{\beta} T \frac{\partial \text{tr} \varepsilon}{\partial t} - n_w \frac{\partial p_w}{\partial T} T \nabla \bar{v}_w + \frac{1}{2} \beta' \dot{\theta} \dot{\varepsilon} + L \rho_i \frac{\partial n_{wi}}{\partial t} \quad (3)$$

式中： \bar{C}_1 、 \bar{C}_2 和 \bar{C}_3 均为与冻土各组分导热系数、热容等相关的系数，其中 $\bar{C}_1 = n_s \rho_s C_s + n_i \rho_i C_i$ ， $\bar{C}_2 = n_w \rho_w C_w$ ， $\bar{C}_3 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$ ； $\bar{\beta} = n_s \beta_s + n_i \beta_i$ ， $\bar{\lambda} = n_s \lambda_s + n_i \lambda_i + n_w \lambda_w$ ； n_s 、 n_i 和 n_w 分别为土颗粒、冰和未冻水的体积含量； ρ_s 、 ρ_i 和 ρ_w 分别为土颗粒、冰和未冻水的密度； n_{wi} 为相变水体积含量； \bar{v}_w 为未冻水迁移速率； λ_s 、 λ_i 和 λ_w 分别为土粒、冰和未冻水的热传导系数； C_i 、 C_s 、 C_w 分别为土粒、冰和未冻水的热容。各相成分的混合温度 $T = T_s = T_i = T_w$ 。

2.4 控制微分方程

综合式(1)~(3)即构成了准饱和黏弹性冻土体的水热力耦合模型的控制微分方程组。由于控制微分方程组并不是一个封闭的微分方程组，因此在求解冻土体的三场耦合问题时，还得补充一些联系各个变量的方程。

3 耦合模型扩展有限元解析

节2耦合方程呈高度非线性，需要借助数值方法进行求解。本节首先利用扩展有限元将上述耦合方程在空间域内离散，然后利用向后差分原理在时间域内离散，为后续耦合程序开发做准备。

3.1 空间域内的有限元离散

采用迦辽金法来建立有限元基本方程式。耦合模型控制微分方程组中，所涉及的未知量包括5个量：3个位移矢量以及孔压标量和温度标量，即冻土内任意一点自由度包括 (x, y, z) 方向的位移 (u, v, w) ，孔压 p_w 和温度 T 。与常规有限元类似，把整个求解区域 D 划分为 m 个单元，从中任取一单元 e ，则单元 e 内的任意一点的未知函数 u, v, p_w, T 可用下式中近似函数表示：

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(x, y, z) u_i(t) \\ v &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(x, y, z) v_i(t) \\ p_w &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(x, y, z) p_{wi}(t) \\ T &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(x, y, z) T_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中： $\bar{N}_i(x, y, z)$ 为所定义的权函数。

对于规则节点，可表示为

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_i &= [N_1, N_2, \dots, N_n] \\ \mathbf{u} &= [u_1, u_2, \dots, u_n] \\ \mathbf{v} &= [v_1, v_2, \dots, v_n] \\ \mathbf{w} &= [w_1, w_2, \dots, w_n] \\ \mathbf{T} &= [T_1, T_2, \dots, T_n] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对于受界面穿越影响的节点，可表示为

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_i &= [N_1, N_2, \dots, N_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{ne}] \\ \bar{\mathbf{u}} &= [u_1, u_2, \dots, u_n, a_1, a_2, \dots, a_{ne}] \\ \bar{\mathbf{v}} &= [v_1, v_2, \dots, v_n, b_1, b_2, \dots, b_{ne}] \\ \bar{\mathbf{w}} &= [w_1, w_2, \dots, w_n, c_1, c_2, \dots, c_{ne}] \\ \bar{\mathbf{T}} &= [T_1, T_2, \dots, T_n, d_1, d_2, \dots, d_{ne}] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

按照权函数的性质，可把准饱和冻土水热力耦合模型控制微分方程组离散化，可得到 $5n$ 个剩余(误差)函数的加权积分形式，即

$$\iiint_V \bar{N}_i \left\{ E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (E_2 + E_3) \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} - (1 - \chi) \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + E_1' \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} + E_3' \left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial z^2} \right) + (E_2' + E_3') \left(\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial z} \right) + \beta' \frac{\partial \dot{T}}{\partial x} + \frac{\partial(p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial x} - \rho X_x \right\} dx dy dz = 0 \quad (7a)$$

$$\iiint_V \bar{N}_i \left\{ E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + E_3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (E_2 + E_3) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + \beta \frac{\partial T}{\partial y} - (1 - \chi) \kappa \frac{\partial T}{\partial y} + E_1' \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial y^2} + E_3' \left(\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial z^2} \right) + (E_2' + E_3') \left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y \partial z} \right) + \beta' \frac{\partial \dot{T}}{\partial y} + \frac{\partial(p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial y} - \rho X_y \right\} dx dy dz = 0 \quad (7b)$$

$$\iiint_V \bar{N}_i \left\{ E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + E_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (E_2 + E_3) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) + \beta \frac{\partial T}{\partial z} - (1 - \chi) \kappa \frac{\partial T}{\partial z} + E_1' \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial z^2} + E_3' \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right) + (E_2' + E_3') \left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial y \partial z} \right) + \beta' \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} + \frac{\partial(p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial z} - \rho X_z \right\} dx dy dz = 0 \quad (7c)$$

$$\iiint_V \bar{N}_i \left\{ -\rho_w \bar{C}_4 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial(u + u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v + v_a)}{\partial y} \right] + \left[\frac{k_x}{g} \frac{\partial^2(p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial x^2} + \frac{k_y}{g} \frac{\partial^2(p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial y^2} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{k_z}{g} \frac{\partial^2 (p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial z^2} \right] - \beta_{ST} \rho_w \frac{\partial T}{\partial t} n_s + \beta_{SP} \rho_w \frac{\partial P}{\partial t} n_s - \rho_{w0} \beta_{wT} \frac{\partial T}{\partial t} n_w + \rho_{w0} \beta_{wP} \frac{\partial P}{\partial t} n_w - \Delta \rho \frac{\partial n_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \Big\} dx dy dz \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_V \bar{N}_i \left\{ \bar{C}_3 \frac{\partial T}{\partial t} - \bar{C}_2 \left(k_x \frac{\partial (p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \right. \right. \\ & k_y \frac{\partial (p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k_z \frac{\partial (p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \Big) = \\ & \left(\bar{\lambda}_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \bar{\lambda}_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \bar{\lambda}_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \bar{\beta} T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ & n_w \frac{\beta_{wT}}{\beta_{wP}} T \left[k_x \frac{\partial^2 (p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 (p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. k_z \frac{\partial^2 (p_{wT} + \tilde{p}_w)}{\partial z^2} \right] + L \rho_i \frac{\partial n_{wi}}{\partial t} + W \Big\} dx dy dz \quad (7e) \end{aligned}$$

式中: p_{wT} 为温度影响下的水分驱动力; β_{wT} 为水的热膨胀性系数, $\beta_{wT} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial T} \Big|_{P=\text{con}}$; \tilde{p}_w 为由于冻土体受外载发生变形引起冻土体内部的水分受压而产生的超孔隙水压力; ρ_w 为水的密度, $\rho_w = \rho_{w0} [1 - \beta_{wT} (T - T_0) + \beta_{wP} (P - P_0)]$, 其中, ρ_{w0} 为 $T = T_0$, $P = P_0$ 时水的密度, P 为孔隙水压力, β_{wP} 为水的压缩性系数, $\beta_{wP} = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial P} \Big|_{T=\text{con}}$ 。

式(7)中各方程被积函数都是高阶偏微分形式, 因此必须降阶。本文采用分部积分法对式(7)的被积函数分别进行降阶。限于篇幅, 文中仅以 x 方向平衡方程为例进行说明。 x 方向的平衡方程可变换为

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} N_i \left[E_1 \frac{\partial u}{\partial x} l_x + E_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} l_y + \frac{\partial u}{\partial z} l_z \right) + E_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} l_x + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial w}{\partial z} l_x \right) + E_3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} l_y + \frac{\partial w}{\partial x} l_z \right) + \beta T l_x - (1 - \chi) \kappa T l_x + \\ & E_1 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} l_x + E_3 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} l_y + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} l_z \right) + E_2 \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} l_x + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} l_x \right) + \\ & \left. E_3 \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} l_y + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} l_z \right) + \beta' \dot{T} l_x + p_w l_x \right] d\Omega = \\ & \iiint_V \left\{ \left[E_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + E_3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \right. \\ & \left[E_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \left[E_3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta T \frac{\partial N_i}{\partial x} - (1 - \chi) \kappa T \frac{\partial N_i}{\partial x} + \left[E_1' \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + E_3' \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) \Big] + \left[E_2' \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. \left[E_3' \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \beta' \dot{T} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. p_w \frac{\partial N_i}{\partial x} - \rho X_i \right] \right\} dx dy dz \quad (8) \end{aligned}$$

式中: l_x, l_y, l_z 分别为边界外法线与 x, y, z 坐标轴正向夹角的方向余弦, 积分 Σ 是沿着所有边界的, 引入边界上 Σ 的已知应力条件:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x &= \sigma'_{xx} l_x + \tau_{xy} l_y + \tau_{xz} l_z - \beta T l_x + (1 - \chi) \kappa T l_x + \\ & \sigma'_{xx} l_x + \dot{\tau}_{xy} l_y + \dot{\tau}_{xz} l_z - \beta' \dot{T} l_x + p_w l_x \quad (9) \end{aligned}$$

将式(9)代入式(8)整理可得 x 方向平衡方程为

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \left[E_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + E_3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] u_j + \right. \\ & \left(E_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + E_3 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) v_j + \left(E_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \right. \\ & E_3 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} \Big) w_j + \left[E_1' \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + E_3' \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \dot{u}_j + \left(E_2' \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + E_3' \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \dot{v}_j + \\ & \left(E_2' \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} + E_3' \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \dot{w}_j + \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j p_{wj} + \\ & \left. \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j T_j - (1 - \chi) \kappa \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j T_j + \beta' \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \dot{T}_j \right\} \cdot \\ & dx dy dz = \iiint_V N_i \rho X_i dx dy dz - \oint_{\Sigma} \tilde{f}_x N_i d\Omega \quad (10) \end{aligned}$$

根据降阶后的各方程, 并进行整理可得

$$\left. \begin{aligned} & \sum_j^n (k_{ij}^{11} u_j + k_{ij}^{12} v_j + k_{ij}^{13} w_j + k_{ij}^{14} p_{wj} + k_{ij}^{15} T_j + \\ & k_{ij}^{11} \dot{u}_j + k_{ij}^{12} \dot{v}_j + k_{ij}^{13} \dot{w}_j + k_{ij}^{15} \dot{T}_j) = F_i^1 \\ & \sum_j^n (k_{ij}^{21} u_j + k_{ij}^{22} v_j + k_{ij}^{23} w_j + k_{ij}^{24} p_{wj} + k_{ij}^{25} T_j + \\ & k_{ij}^{21} \dot{u}_j + k_{ij}^{22} \dot{v}_j + k_{ij}^{23} \dot{w}_j + k_{ij}^{25} \dot{T}_j) = F_i^2 \\ & \sum_j^n (k_{ij}^{31} u_j + k_{ij}^{32} v_j + k_{ij}^{33} w_j + k_{ij}^{34} p_{wj} + k_{ij}^{35} T_j + \\ & k_{ij}^{31} \dot{u}_j + k_{ij}^{32} \dot{v}_j + k_{ij}^{33} \dot{w}_j + k_{ij}^{35} \dot{T}_j) = F_i^3 \\ & \sum_j^n (k_{ij}^{41} (\dot{u}_j + \dot{u}_{aj}) + k_{ij}^{42} (\dot{v}_j + \dot{v}_{aj}) + k_{ij}^{43} (\dot{w}_j + \\ & \dot{w}_d) + k_{ij}^{44} p_w + k_{ij}^{45} \dot{p}_w + k_{ij}^{46} \dot{T}_j) = F_i^4 \\ & \sum_j^n (k_{ij}^{51} u_j T_j + k_{ij}^{52} v_j T_j + k_{ij}^{53} w_j T_j + k_{ij}^{54} p_w T_j + \\ & k_{ij}^{55} T_j + k_{ij}^{55} \dot{T}_j) = F_i^5 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

限于篇幅, k_{ij} 的具体形式不再给出。由于水分迁移及原位冻胀引起的附加变形 u_a, v_a, w_a 可通过附加等效节点力来表示, 考虑到附加变形:

$$\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p_{wf} - \frac{\Delta \rho}{\rho_w} \frac{\partial n_{wi}}{\partial t} \quad (12)$$

可以根据附加变形形成等效节点力:

$$\{F^f\} = \iiint_V [B]^T [D] \{\varepsilon_a\} dx dy dz \quad (13)$$

则控制方程可以采用总变形 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 改写为

$$\sum_j^n (k_{ij}^{11} \bar{u}_j + k_{ij}^{12} \bar{v}_j + k_{ij}^{13} \bar{w}_j + k_{ij}^{14} p_{wj} + k_{ij}^{15} T_j + k_{ij}^{11} \dot{\bar{u}}_j + k_{ij}^{12} \dot{\bar{v}}_j + k_{ij}^{13} \dot{\bar{w}}_j + k_{ij}^{15} \dot{T}_j) = F_i^1 + F_x^f \quad (14a)$$

$$\sum_j^n (k_{ij}^{21} \bar{u}_j + k_{ij}^{22} \bar{v}_j + k_{ij}^{23} \bar{w}_j + k_{ij}^{24} p_{wj} + k_{ij}^{25} T_j + k_{ij}^{21} \dot{\bar{u}}_j + k_{ij}^{22} \dot{\bar{v}}_j + k_{ij}^{23} \dot{\bar{w}}_j + k_{ij}^{25} \dot{T}_j) = F_i^2 + F_y^f \quad (14b)$$

$$\sum_j^n (k_{ij}^{31} \bar{u}_j + k_{ij}^{32} \bar{v}_j + k_{ij}^{33} \bar{w}_j + k_{ij}^{34} p_{wj} + k_{ij}^{35} T_j + k_{ij}^{31} \dot{\bar{u}}_j + k_{ij}^{32} \dot{\bar{v}}_j + k_{ij}^{33} \dot{\bar{w}}_j + k_{ij}^{35} \dot{T}_j) = F_i^3 + F_z^f \quad (14c)$$

$$\sum_j^n (k_{ij}^{41} \dot{\bar{u}}_j + k_{ij}^{42} \dot{\bar{v}}_j + k_{ij}^{43} \dot{\bar{w}}_j + k_{ij}^{44} p_{wj} + k_{ij}^{45} \dot{p}_{wj} + k_{ij}^{46} \dot{T}_j) = F_i^4 \quad (14d)$$

$$\sum_j^n (k_{ij}^{51} \dot{\bar{u}}_j T_j + k_{ij}^{52} \dot{\bar{v}}_j T_j + k_{ij}^{53} \dot{\bar{w}}_j T_j + k_{ij}^{54} p_{wj} T_j + k_{ij}^{55} T_j + k_{ij}^{56} \dot{T}_j) = F_i^5 \quad (14e)$$

3.2 时间域内的有限元离散

由于建立模型的应力平衡、渗流及相变传热均随时间变化(具有瞬时效应), 模型的求解还应该在时域内进行离散, 本文采用向后差分格式对其在时域内进行离散:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{u}}_j^t &= \frac{\bar{u}_j^t - \bar{u}_j^{t-\Delta t}}{\Delta t}, \quad \dot{\bar{v}}_j^t = \frac{\bar{v}_j^t - \bar{v}_j^{t-\Delta t}}{\Delta t}, \quad \dot{\bar{w}}_j^t = \frac{\bar{w}_j^t - \bar{w}_j^{t-\Delta t}}{\Delta t} \\ \dot{p}_{wj}^t &= \frac{p_{wj}^t - p_{wj}^{t-\Delta t}}{\Delta t}, \quad \dot{T}_j^t = \frac{T_j^t - T_j^{t-\Delta t}}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

根据式(15)对式(14a)~(14e)在时间域内进行离散, 并整理成矩阵形式为

$$\{\tilde{K}\} \{\delta\}^t = \{\tilde{F}\}^t \quad (16)$$

式中: $\{\delta\}^t = \{u_j, v_j, w_j, h_j, T_j\}^t$ 为当前待求解的位移列阵(含附加节点); $\{\tilde{F}\}^t = \{\tilde{F}_i^1, \tilde{F}_i^2, \tilde{F}_i^3, \tilde{F}_i^4, \tilde{F}_i^5\}^t$ 为单元的等效荷载列阵(含附加节点); $\{\tilde{K}\}^t$ 为单元的等效刚度矩阵, 即

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ 分别为土体的等效刚度子矩阵、渗流对土骨架影响子矩阵、温度对土骨架影响子矩阵、土骨架对渗流影响子矩阵、等效渗透子矩阵、温度对渗流影响子矩阵、土骨架对温度影响子矩阵、渗流对温度影响子矩阵、等效温度传导子矩阵。

本文耦合模型的刚度矩阵实际包含 9 个部分, 且有

$$A = \begin{bmatrix} \Delta t k_{ij}^{11} + k_{ij}^{11} & \Delta t k_{ij}^{12} + k_{ij}^{12} & \Delta t k_{ij}^{13} + k_{ij}^{13} \\ \Delta t k_{ij}^{21} + k_{ij}^{21} & \Delta t k_{ij}^{22} + k_{ij}^{22} & \Delta t k_{ij}^{23} + k_{ij}^{23} \\ \Delta t k_{ij}^{31} + k_{ij}^{31} & \Delta t k_{ij}^{32} + k_{ij}^{32} & \Delta t k_{ij}^{33} + k_{ij}^{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \Delta t k_{ij}^{14} \\ \Delta t k_{ij}^{24} \\ \Delta t k_{ij}^{34} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \Delta t k_{ij}^{15} + k_{ij}^{15} \\ \Delta t k_{ij}^{25} + k_{ij}^{25} \\ \Delta t k_{ij}^{35} + k_{ij}^{35} \end{bmatrix}$$

$$D = [k_{ij}^{41} \quad k_{ij}^{42} \quad k_{ij}^{43}]$$

$$E = [\Delta t k_{ij}^{44} + k_{ij}^{44}]$$

$$F = [k_{ij}^{46}]$$

$$G = [k_{ij}^{51} T_j^{t-\Delta t} \quad k_{ij}^{52} T_j^{t-\Delta t} \quad k_{ij}^{53} T_j^{t-\Delta t}]$$

$$H = [\Delta t k_{ij}^{54} T_j^{t-\Delta t}]$$

$$I = [\Delta t k_{ij}^{55} + k_{ij}^{55}]$$

从式(17)可以看出, 由于能量方程中考虑了热对流引起的能量变化, 使得耦合模型的等效刚度矩阵中渗流与温度的耦合项不对称; 由于考虑了冻土骨架的热阻力耗散, 使得平衡方程中温度对土骨架的作用项与能量方程中土骨架对温度的作用项不对称, 渗流与应力相互作用也不对称。对类似问题, 陈波^[22]通过改变相应的荷载向量使方程对称化, 但考虑到模型复杂性, 本文直接采用交叉迭代方式分别求解温度场及变形场。

3.3 耦合过程数值分析方法

(1) 三场耦合关系

① 温度场对水分场的影响

温度场变化引起的水分迁移通过基于吸附薄膜理论建立的土水势模型反应, 该模型认为冻土中薄膜水压力 p_{wf} 与未冻水膜厚度和温度有关。考虑 Clapeyron 方程及没有压力情况下未冻水含量, 得到

水分迁移驱动力模型:

$$p_{wf}(n_w, T) = \frac{\left[\frac{\alpha_1}{(n_w - \alpha_2)} - 100\alpha_1 \right] \beta T}{\frac{1}{[0.12775(-T)^{-0.5228} - \alpha_2]^2} - 100} \quad (18)$$

式中: n_w 为未冻水的体积含量; α_1, α_2 为试验参数; $\beta = 1220 \text{ kPa}/^\circ\text{C}$ 。

可以看出, 温度变化对水分迁移驱动力影响包括两方面: 一方面温度变化直接引起水分迁移动力的变化, 另外一方面, 温度变化先是引起未冻水含量改变, 继而引起水分迁移动力的变化。

② 水分场对温度场的影响

水分迁移对温度场的影响, 通过在渗流方程中考虑水分迁移引起的水与土骨架之间热对流交换(见式(3)左边第三项)来实现, 对应有限元刚度矩阵见 \mathbf{H} 子矩阵。

③ 变形场对温度场的影响

变形引起温度场的变化, 主要通过功能转化来体现, 包括热胀冷缩效应以及温变速率引起的热变化(见式(3)右边的第二、四项)。

(2) 数值分析流程

求解三场耦合问题的有限元程序非常复杂。必须根据具体的实际过程来确定计算时使用的有限元网格和计算时步长, 初始条件和边界条件。本文求解过程的具体步骤如下所述:

① 根据温度场的边界条件求解 Laplace 方程, 得到初始温度场。

② 根据初始温度场确定各计算参数(包括水、热、力参数), 并判断冻结区和未冻区。

③ 根据初始温度场和边界条件, 假定应变能为 0, 求解式(14e), 得到下一时刻的温度场。

④ 根据此温度场确定各种水、热、力计算参数, 判断冻结区和未冻区。

⑤ 根据水分迁移驱动力模型, 计算出水分驱动力, 并由此计算由水分驱动力造成的水分迁移, 再加上在本时步内的水分原位冻胀量, 从而利用式(13)得到由水分迁移和冰水相变造成的附加变形 ε_a , 并由此附加变形确定等效节点力 $\{\Delta F_x^{\varepsilon_a}\}$ 和 $\{\Delta F_y^{\varepsilon_a}\}$ 。

⑥ 根据边界条件、附加变形引起的等效节点力以及修正后的计算参数, 求解式(14a)~(14d), 从而得到冻土体中的孔隙水压力 p_w 和总变形场 \bar{u}, \bar{v} ; 根据总变形场和附加变形场(u_a, v_a 或 ε_a), 求解冻

土体中的应力场 σ'_s (或固体相等效力 σ_s)。

⑦ 根据此总变形场、附加变形场、水分场和应力场所确定的黏性耗散能、热力耗散耦合项, 对流传热项及相变潜热, 重新求解式(14e), 得到新的温度场。

⑧ 重复第④步至第⑦步, 循环迭代直到稳定。

⑨ 逐时步进行计算, 直到所需时刻, 得到整个过程的温度场、水分场、应力场和变形场。

4 扩展有限元分析程序开发

由分析模型的有限元求解格式可以看出, 耦合模型求解十分复杂, 本文借鉴大型有限元分析平台 Final 编程思想, 完成耦合模型扩展有限元分析平台 3GEXFEM 的设计与开发。

(1) 3GEXFEM 功能模块

参照 FINAL 源程序^[21], 3GEXFEM 程序主要由以七大模块组成, 详见表 1。

表 1 3GEXFEM 程序功能模块

Table 1 Functional modules of 3GEXFEM program

模块名称	基本功能
MACRO	宏控制: 控制整个程序流程
3GEXFEM1	数据输入及检查块
3GEXFEM2	等效荷载向量块,
3GEXFEM3	等效刚度矩阵块
3GEXFEM4	质量、阻尼、热容矩阵块
3GEXFEM5	方程解法块
3GEXFEM6	数据输出或模型参数修正块

(2) 3GEXFEM 循环结构

3GEXFEM 程序中主要有荷载循环、时步循环和 Loop 循环三类循环结构, 详见表 2。

表 2 3GEXFEM 程序循环结构

Table 2 Circulation structure of 3GEXFEM program

循环结构	功能
荷载循环	如模拟施工过程的分期开挖
时步循环	如动力问题、流变问题、固结问题、非稳定定渗流及本文所涉及的多场耦合问题
LOOP 循环	物理非线性循环与几何非线性循环, 如摩擦接触问题的弹塑性分析时的迭代循环

其中本文求解过程中与时间有关的耦合问题的循环结构控制图如图 1 所示。

(3) 3GEXFEM 数据结构

① 内存中的数据结构

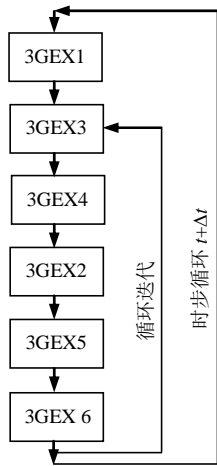


图1 三场耦合循环结构流程图

Fig.1 The flow chart of loop structures for THMC

程序将分析中通用的环境变量、初始条件、有限元基本信息等按一定的顺序存放在一个大数组“B”中，并将数组“B”存放在内存中。

② 硬盘中的数据结构

在硬盘中定义各种功能文件，数据存取直接通过调用这些文件进行。在硬盘中的数据结构型式主要包括 IDA, IDB, IDC, IDD, 用来存取各种矩阵和向量。具体情况参见表 3。

表 3 硬盘中的数据结构

Table 3 The data structure in hard disk

数据结构	IDA	IDB	IDC	IDD
1	Element	$\{F_s\}$	$[k_{so}]$	$\{u\}^t$
2		$\{F_w\}$	$[k_{se}]$	$\{p_{wT}\}^t$
3		$\{F_T\}$	$[k_{Te}]$	$\{\bar{p}_w\}^t$
4		$\{\sigma_0\}$	$[k_{seso}]$	$\{T\}^t$
5		$\{u\}^{t-\Delta t}$	$[k_{sose}]$	
6		$\{p_{wT}\}^{t-\Delta t}$	$[k_{Teso}]$	
7		$\{\bar{p}_w\}^{t-\Delta t}$	$[k_{soTe}]$	
8		$\{T\}^{t-\Delta t}$	$[k_{Tese}]$	
9		F_{elim}	$[k_{seTe}]$	

注：限于篇幅，各分区的具体含义参见何敏^[27]研究成果。

(4) 3GEXFEM 整体控制图

3GEXFEM 程序整体控制图，如图 2 所示。

5 程序验证

为了检验准饱和正冻土三场耦合模型及基于扩展有限元开发的准饱和正冻土耦合程序的正确性，以 M. Fukuda 等^[29]的试验资料对其进行全面验证。

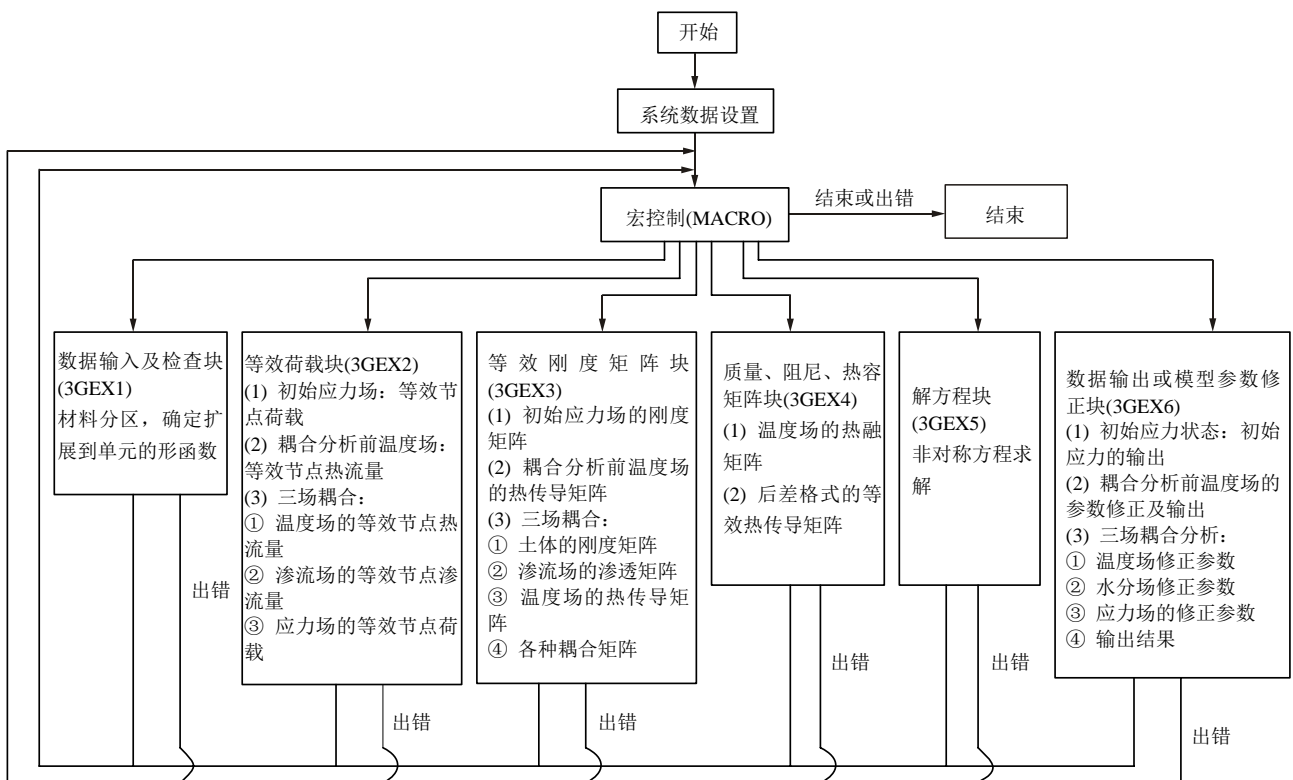


图2 3GEXFEM 程序的整体控制框图

Fig.2 The flow chart of the 3GEXFEM program

5.1 试验简介

M. Fukuda 等^[29]在研究冻土体内的冻胀规律时, 对长 7 cm、直径 10 cm 的圆柱体饱水黏土土样, 按照标准试验程序开展不同荷载, 不同降温梯度下单向冻结的冻胀试验。

5.2 冻土参数及初边值条件

土样初始温度为 0 °C, 试验时土样的初始条件和边界条件如表 4 所示。以 4[#]试验条件为基准算例反演算水分迁移动力模型参数, 根据试算确定 $\alpha_1 = 1.13$, $\alpha_2 = -0.0187$ 。冻土体的基本热力学参数如表 5^[30-31]所示。

表 4 试验与数值模拟初始条件
Table 4 Boundary/initial conditions

编号	暖端温度/°C	冷端温度/°C	荷载/kPa
1 [#]	7~0.042t	-0.042t	25
2 [#]	5~0.042t	-0.042t	25
3 [#]	4~0.042t	-0.042t	25
4 [#]			25
5 [#] , 6 [#]	3~0.042t	-0.042t	150, 300
7 [#] , 8 [#]			400, 600
9 [#]	2~0.042t	-0.042t	25
10 [#]	3	-0.022t	25
11 [#]	3	-0.042t	25
12 [#]	3	-0.062t	25
13 [#]	3	-0.082t	25

表 5 冻土体参数^[30-31]
Table 5 Parameters of frozen soil^[30-31]

组分	热容 C/ (J · m ⁻³ · K ⁻¹)	传导系数 λ /(W · m ⁻¹ · K ⁻¹)	密度/ (kg · m ⁻³)
土颗粒	2.20×10 ⁶	0.907	2768
冰	1.93×10 ⁶	2.220	900
未冻水	4.18×10 ⁶	0.602	1000

土体的初始孔隙率为 0.43, 未冻水与温度的关系式如下:

$$w = w^* + (\bar{w} - w^*)e^{a(T-T_0)} \quad (19)$$

式中: w^* 为极限含水量, \bar{w} 为初始含水量, T_0 为冻结温度, a 为衰减指数。参照 L. Radoslaw^[32], 取 $\bar{w} = 0.285$, $w^* = 0.058$, $a = 0.16 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 。

导热系数利用 K. Horiguchi 和 R. D. Miller^[33]的试验资料, 可有

$$k = \begin{cases} 3.072 \times 10^{-11} & (T \geq 0^\circ\text{C}) \\ 3.453 \times 10^{-11} e^{13.438T} & (T < 0^\circ\text{C}) \end{cases} \quad (20)$$

5.3 基准算例分析结果

图 3 给出了试样冻结深度随时间的变化, 从图中可以看出, 随着时间的发展, 试样的温度逐渐下降, 冻结深度逐渐向上发展, 冻结深度移动速率规律计算结果与实测结果基本一致。图 4 给出了冻胀量随时间的变化图, 可以看出随时间的发展, 试样经历了一个预冷阶段, 降温的初始阶段几乎没有冻胀, 随着温度继续降低, 冻胀变形不断发展, 这一规律与试验成果及工程经验吻合较好。

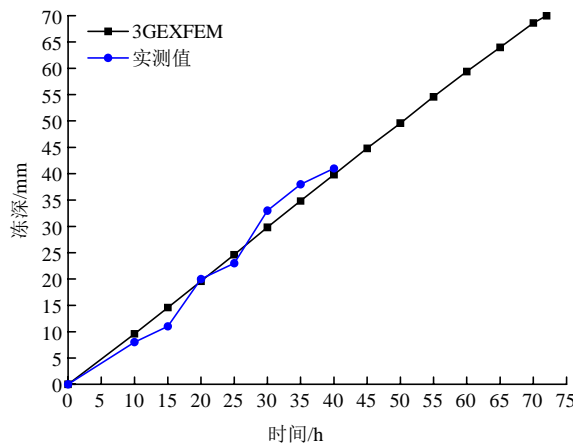


图 3 冻结深度变化曲线

Fig.3 Variation curves of frozen depths

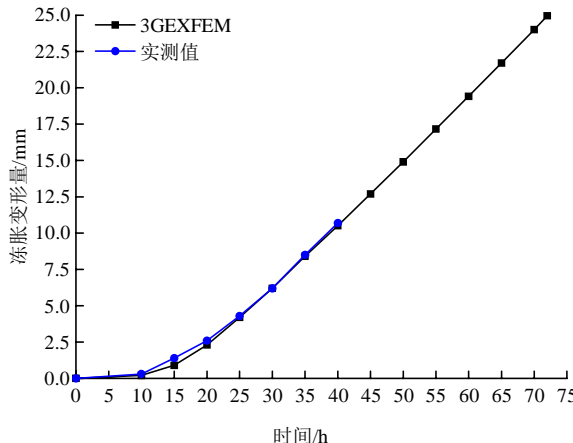


图 4 冻胀量变化曲线

Fig.4 Variation curves of frost-heaving deformation

图 5 给出了不同时刻试样总含水量沿试样深度的分布。由图可以看出, 随着冻结锋面的推移, 冻结区不断从未冻区及外界吸收水分, 在冻结锋面下方冻结区的总含水量由初始的 0.43 逐步增加到 0.70。值得注意的是, 标准算例采用的是等温度梯度且低降温速率的温度边界, 冻结锋面推进速率较为均匀(见图 3), 使得试样冻结区各部位均经历了一个较慢的冻结阶段, 各部位吸收的水分较为均匀, 也即完全冻结区的总含水量稳定在 0.70 左右, 这与

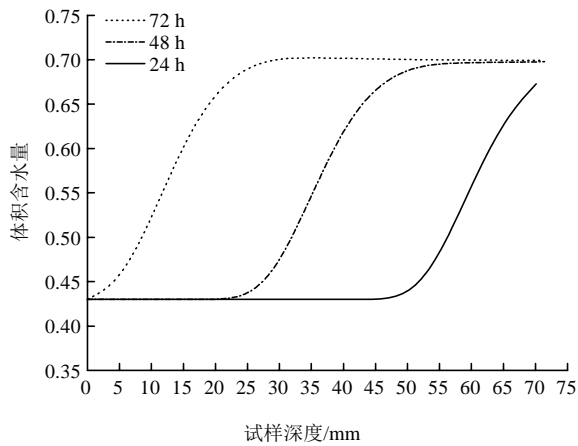


图5 不同时刻含水量分布曲线

Fig.5 Distribution curves of water contents at different times

冻结锋面非均匀推进情况下试样总含水量分布有着本质区别(见后降温模式分析部分)。

5.4 影响因素分析

(1) 荷载的影响

根据试验 4[#]~8[#]开展外部荷载对冻胀量的影响分析。图 6 给出了不同荷载条件下冻胀量随时间的变化。3GEXFEM 程序所分析得到的计算值与试验成果差值在±0.5 mm 范围内,基本一致,分析规律与 X. Y. Zhang 等^[34]反映规律一致。由于受到上覆荷载作用,降低了水分迁移的动力,阻止了冻胀的发展,荷载越大,冻胀变形越小。

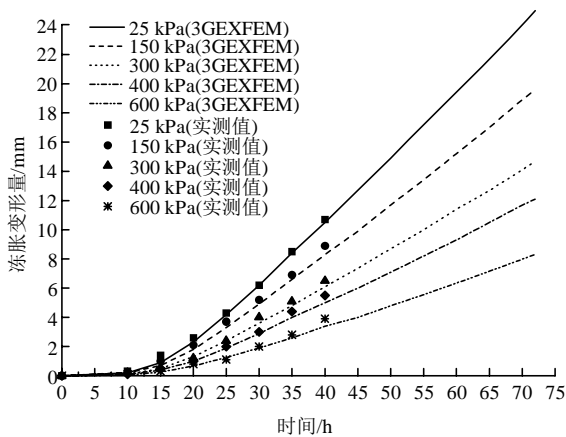


图6 不同荷载条件下的冻胀量变化曲线

Fig.6 Variation curves of frost-heaving deformation for different overburden stresses

(2) 温度梯度的影响

根据试验 1[#]~4[#]及 9[#]开展温度梯度对冻胀量的影响分析,图 7 给出了不同温度梯度下冻胀量随时间的变化。模拟分析成果与试验成果有着较好的一致性。

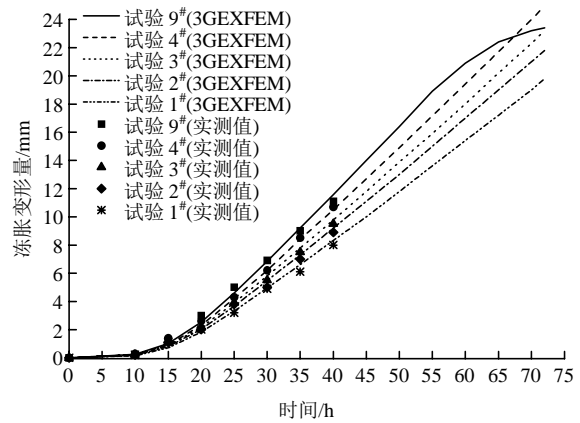


图7 不同温度梯度下的冻胀量变化曲线

Fig.7 Variation curves of frost-heaving deformation for different temperature gradients

从图 7 可以看出,在相同时刻,土样温度梯度越小,冻胀量越大,这与梯度越大,水分迁移动力越大似乎有着矛盾,造成这种结果的主要原因是由于温度边界条件不同导致冻结区范围有着显著不同,温度梯度越大的试验工况对应冻结区范围越大,从而导致整体冻胀量越大。通过分析冻结率(冻胀量与冻结区长度比值)来消除冻结范围的影响,试验 1[#]~4[#]及 9[#]的冻结率分别为 0.473, 0.377, 0.324, 0.264, 0.196,即在相同冻结长度情况下,温度梯度越大,冻胀量越大。还需要指出的是,9[#]试验进行到 72 h 时,试样顶部温度降到-1.024 °C,整个试样完全冻结,导致冻胀量曲线尾部趋于平缓,进入原位冻胀发展阶段。

(3) 降温模式及降温速率的影响

根据试验 10[#]~13[#]的试验条件,即保持土样顶部温度维持在 3 °C 不变,底部温度分别以不同的降温速率开始下降,开展降温模式与降温速率的影响分析。

图 8 给出了试验 13[#]不同时刻试样总含水量沿试验深度的分布曲线,图 9 给出了冻深随时间的变化曲线。可以看出,随着冻深的增加,在冻结前缘附近的含水量达到最大值;由于降温过程中温度梯度逐步加大,导致冻结缘区域的含水量也逐步增大;试验 72 h 结束时,冻结缘区最大含水量达到 0.85,对应土颗粒含量只有 0.15,即将出现分凝冰。

对比两端均匀降温情况下不同时刻总含水量分布(见图 5),2 种不同降温模式下冻结区域总含水量分布不同的主要原因是冻结锋面推进方式的不同,一端降温模式下冻结锋面推进先快后慢,试样下部有个快速冻结阶段,先冻结区域吸收水分的冻结时间短,且受温度梯度小的影响,吸收水分小,呈

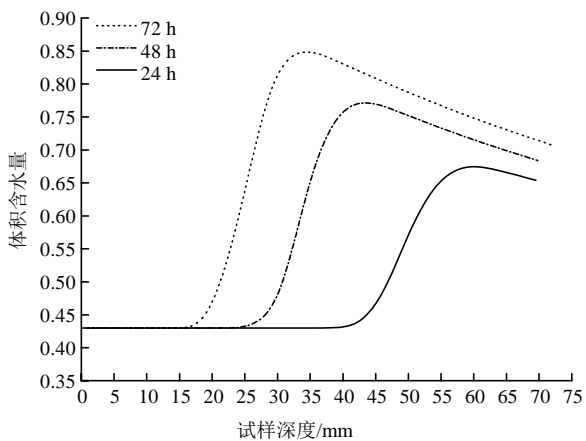


图 8 不同时刻含水量分布曲线

Fig.8 Distribution curves of water content at different times

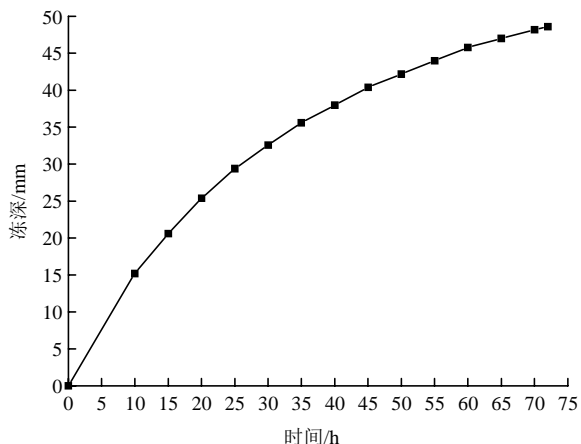


图 9 冻结深度变化曲线

Fig.9 Variation curves of frozen depths

现出后冻结区域含水量大于先冻结区域含水量的情况。

图 10 给出了不同降温速率下最终冻胀量的变化曲线，可以看出，当冻结指数即试样冷端温度与冻结时间的乘积相同时，冻胀量随着降温速率的增

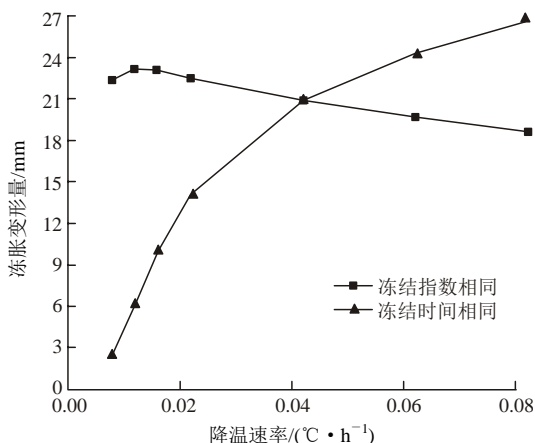


图 10 不同降温速率下的冻胀量变化曲线

Fig.10 Variation curves of frost-heaving deformation for different cooling rates

大而先增大后减小。当冻结时间相同时，冻胀量随着降温速率的增大而增大。分析成果与盛岱超等^[25]规律一致，但盛岱超等^[25]是基于一维的刚冰模型的分析，不能考虑骨架的变形的影响，而本文的模型可以考虑土骨架、冰、水三相介质水、热、力与变形真正的耦合作用，且可以应用于工程中的二维及三维问题研究。

6 结 论

(1) 基于前期已建立的能够考虑多种因素作用的冻土多场耦合理论，从推导冻土微元体的静力平衡方程、渗流连续性方程及能量平衡方程的扩展有限元求解格式入手，确定了耦合模型的刚度矩阵、荷载向量及程序实现方法，从而建立了准饱和冻土水热力耦合模型的数值分析方法，在大型有限元分析 final 平台上开发了一款能够为实际冻土工程服务的耦合分析平台 3GEXFEM。

(2) 通过对经典室内冻胀试验进行数值模拟，结果表明，程序可以较为准确模拟不同荷载、温度梯度、降温模式、降温速率等情况下冻土冻结过程中的水热力耦合过程。

(3) 利用研发的程序对水热力影响因素进行敏感性分析，结果表明：外荷载能够降低冻结过程中的水分迁移动力，从而降低冻胀量；温度梯度增加，将增加水分迁移速度，从而增加冻胀率，但由于受试样尺寸及边界条件变化的影响，温度梯度的增加不一定直接增加冻胀量；降温模式的不同，冻结锋面推进方式的不同，将导致冻结过程中总含水量分布的不同，恒定梯度冻结过程中，试样冻结区含水量是均匀分布的，而增大梯度冻结过程中，试样新冻结区总含水量明显大于先冻结区；降温速率对冻胀量也有着显著影响，在冻结指数相同的情况下，降温速率越大，冻胀量越小，在相同冻结时间下，降温速率越快，冻胀量越大。

(4) 研发的程序是基于全面考虑冻土中土骨架、冰、水三相介质水、热、力与变形真正的耦合作用的数理方程，包括空间 3 个方向的耦合方程，故利用研发程序可以进行实际冻土工程的二、三维问题的研究。

参考文献(References):

[1] 徐教祖, 王家澄, 张立新. 冻土物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 9 - 11.(XU Xiaozu, WANG Jiacheng, Z HANG Lixin. Physics

- of frozen soils[M]. Beijing: Science Press, 2001: 9 - 11.(in Chinese)
- [2] 李 宁, 程国栋, 谢定义. 西部大开发中的岩土力学问题[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(3): 268 - 272.(LI Ning, CHENG Guodong, XIE Dingyi. Geomechanics development in civil construction in Western China[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(3): 268 - 272.(in Chinese))
- [3] 赖远明, 吴紫汪, 朱元林. 寒区隧道温度场和渗流场耦合问题的非线性分析[J]. 中国科学: D 辑, 1999, 29(增 1): 21 - 26.(LAI Yuanming, WU Ziwan, ZHU Yuanlin. Nonlinear analyses for the couple problem of temperature and seepage in cold region tunnels[J]. Science in China: Series D, 1999, 29(Supp.1): 21 - 26.(in Chinese))
- [4] 陈飞熊, 李 宁, 程国栋. 饱和正冻土多孔多相介质的理论框架[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(2): 213 - 217.(CHEN Feixiong, LI Ning, CHENG Guodong. The theoretical frame of multi-phase porous medium for the freezing soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(2): 213 - 217.(in Chinese))
- [5] 何 平, 程国栋, 朱元林. 冻土黏弹塑性损伤耦合本构理论[J]. 中国科学(D 辑), 1999, 29(增 1): 34 - 39.(HE Ping, CHENG Guodong, ZHU Yuanlin. Constitutive theory of visco-elastoplastic damage for frozen soil[J]. Science in China: Series D, 1999, 29(Supp.1): 34 - 39.(in Chinese))
- [6] 杨更社, 周春华, 田应国, 等. 软岩类材料冻融过程水热迁移的实验研究初探[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(9): 1 765 - 1 770.(YANG Gengshe, ZHOU Chunhua, TIAN Yingguo, et al. Primary experimental study on moisture and heat transfer of soft rock material during its freezing and thawing[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(9): 1 765 - 1 770.(in Chinese))
- [7] RUTQVIST J, BÖRGESSON L, CHIJIMATSU M, et al. Thermo-hydrmechanics of partially saturated geological media: governing equations and formulation of four finite element methods[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38(1): 105 - 127.
- [8] OHNISHI Y, KOBAYASHI A, THAMES. Coupled thermo-hydro-mechanical processes of fractured media[M]. Netherland: Elsevier, 1996: 545 - 549.
- [9] 张玉军. 热 - 水 - 应力耦合弹塑性二维有限元程序的开发与应用尝试[J]. 岩石力学, 2005, 26(2): 169 - 174.(ZHANG Yujun. Development and use try of 2D FEM code for coupled thermo-hydro-mechanical elastoplastic analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(2): 169 - 174.(in Chinese))
- [10] 张玉军. 核废物地质处置 THM 耦合三维有限元分析[J]. 地下空间与工程学报, 2009, 5(4): 664 - 669.(ZHANG Yujun. 3D model and FEM analysis for coupled thermo-hydro-mechanical processes in geological disposal of nuclear waste[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2009, 5(4): 664 - 669.(in Chinese))
- [11] 刘亚晨. 核废料贮存围岩介质 T H M 耦合过程的数值模拟[J]. 地质灾害与环境保护, 2006, 17(6): 78 - 82.(LIU Yachen. Numerical simulation for THM coupling of fractured rockmass surrounding nuclear waste repositories[J]. Journal of Geological Hazards and Environment Preservation, 2006, 17(6): 78 - 82.(in Chinese))
- [12] 韦立德, 杨春和. 考虑饱和 - 非饱和渗流、温度和应力耦合的三维有限元程序研制[J]. 岩石力学, 2005, 26(6): 1 000 - 1 004.(WEI Lide, YANG Chunhe. Program development for 3D FEM of coupling saturated-unsaturated seepage, temperature and stress[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(6): 1 000 - 1 004. (in Chinese))
- [13] 陈益峰, 周创兵, 童富果, 等. 多相流传输 THM 全耦合数值模型及程序验证[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(4): 649 - 665.(CHEN Yifeng, ZHOU Chuangbing, TONG Fuguo, et al. A numerical model for fully coupled THM process with multiphase flow and code validation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(4): 649 - 665.(in Chinese))
- [14] 张学富, 喻文兵, 刘志强. 寒区隧道渗流场和温度场耦合问题的三维非线性分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(9): 1 095 - 1 100.(ZHANG Xuefu, YU Wenbing, LIU Zhiqiang. Three-dimensional nonlinear analysis for coupled problem of seepage field and temperature field of cold regions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(9): 1 095 - 1 100.(in Chinese))
- [15] 贾善坡, 冉小丰, 王越之, 等. 变形多孔介质温度 - 渗流 - 应力完全耦合模型及有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2012, 31(2): 3 547 - 3 546.(JIA Shanpo, RAN Xiaofeng, WANG Yuezhi, et al. Full coupled thermal-hydraulic-mechanical model and finite element analysis for deformation porous media[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 31(2): 3 547 - 3 546.(in Chinese))
- [16] 刘泉声, 康永水, 刘 滨, 等. 裂隙岩体水 - 冰相变及低温温度场 - 渗流场 - 应力场耦合研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(11): 2 181 - 2 188.(LIU Quansheng, KANG Yongshui, LIU Bin, et al. Water-ice phase transition and thermo-hydro-mechanical coupling at low temperature in fractured[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(11): 2 181 - 2 188.(in Chinese))
- [17] KANG Y S, LIU Q S, HUANG S B. A fully coupled thermo-hydro-mechanical model for rock mass under freezing/thawing condition[J]. Cold Region Science and Technology, 2013, 95(1): 19 - 26.
- [18] 谭贤君, 陈卫忠, 伍国军, 等. 低温冻融条件下岩体温度 - 渗流 - 应力 - 损伤 (THMD) 耦合模型研究及其在寒区隧道中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(2): 2 039 - 2 040.(TAN Xianjun, CHEN Weizhong, WU Guojun, et al. Study of thermo- hydro-mechanical-damage (THMD) coupled model in the condition of freeze-thaw cycles and its application to region tunnels[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(2): 2 039 - 2 040.(in Chinese))

- [19] CHEN W Z, TAN X J, YU H D, et al. A fully coupled thermo-hydro-mechanical model for unsaturated porous media[J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2009, 1(1): 32 - 40.
- [20] 何敏, 李宁, 刘乃飞. 饱和冻土水热力耦合模型解析及验证[J]. *岩土工程学报*, 2012, 34(10): 1 858 - 1 865.(HE Min, LI Ning, LIU Naifei. Analysis and validation of coupled heat-moisture-deformation model for saturated frozen soils[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 34(10): 1 858 - 1 865.(in Chinese))
- [21] 陈飞熊. 饱和正冻土温度场、水分场和变形场三场耦合理论构架[博士学位论文][D]. 西安: 西安理工大学, 2001: 1 - 83.(CHEN Feixiong. The fully coupled modeling of the thermal-moisture-deformation behavior for the saturated freezing soils[Ph. D. Thesis][D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2001: 1 - 83.(in Chinese))
- [22] 陈波. 土体变形场、渗流场、温度场耦合问题的有限元分析[博士学位论文][D]. 西安: 西安理工大学, 1995.(CHEN Bo. FEM modeling for the coupling behaviors of the deformation-seepage-temperature fields in soils[Ph. D. Thesis][D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 1995.(in Chinese))
- [23] 刘乃飞, 李宁, 何敏. 水-热-力三场耦合分析平台的升级与验证[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, 33(增1): 2 750 - 2 757.(LIU Naifei, LI Ning, HE Min. Upgrade and validation of thermo-hydro-mechanical coupling analysis platform[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, 33(Supp.1): 2 750 - 2 757.(in Chinese))
- [24] 周家作, 韦昌富, 李东庆, 等. 饱和粉土冻胀过程试验研究及数值模拟[J]. *岩石力学与工程学报*, 2017, 36(2): 485 - 495.(ZHOU Jiazu, WEI Changfu, LI Dongqing, et al. Experimental study and numerical simulation to the process of frost heave in saturated silt physics of frozen soils[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2017, 36(2): 485 - 495.(in Chinese))
- [25] 盛岱超, 张升, 贺佐跃. 土体冻胀敏感性评价[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, 33(3): 594 - 605.(SHENG Daichao, ZHANG Sheng, HE Zuoyue. Assessing frost susceptibility of soils[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, 33(3): 594 - 605.(in Chinese))
- [26] 曾桂军, 张明义, 李振萍, 等. 饱和正冻土水分迁移及冻胀模型研究[J]. *岩土力学*, 2015, 36(4): 1 085 - 1 092.(ZENG Guijun, ZHANG Mingyi, LI Zhenping, PEI Wansheng. Study of moisture migration and frost heave model of freezing saturated soil[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(4): 1 085 - 1 092.(in Chinese))
- [27] 何敏. 饱和正冻土水热力耦合模型的改进及其扩展有限元解法[博士学位论文][D]. 西安: 西安理工大学, 2013.(HE Min. Modification of moisture-heat-stress coupling model for saturated freezing soil and its solution with the extended finite element method[Ph. D. Thesis][D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2013.(in Chinese))
- [28] 陈飞熊, 宋战平, 李宁. 基于吸附薄膜理论的正冻土水分驱动力模型探讨[J]. *水利建筑工程学报*, 2006, 4(3): 1 - 4.(CHEN Feixiong, SONG Zhanping, LI Ning. Study on moisture migrating force model of freezing soil base on adsorption-film moisture migration mechanism[J]. *Journal of Water Resources and Architectural Engineering*, 2006, 4(3): 1 - 4.(in Chinese))
- [29] FUKUDA M, KIM H, KIM Y. Preliminary results of frost heave experiments using standard test sample provided by TC8[C]// *Proceedings of the International Symposium on Ground Freezing and Frost Action in Soils*. Lulea, Sweden: [s.n.], 1997: 25 - 30.
- [30] Shen Mu and branko Ladanyi, modelling of coupled heat, moisture and stress field in freezing soil[J]. *Cold Regions Science and Technology*, 1987, 14(1): 237 - 246.
- [31] SELVADURAI A P S, HU J, KONUK I. Computational modelling of frost heave induced soil-pipeline interaction[J]. *Cold Regions Science and Technology*, 1999, 29(1): 229 - 257.
- [32] RADOSLAW L, MICHALOWSKI I, ZHU M. Frost heave modelling using porosity rate function[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006, 30(5): 703 - 722.
- [33] HORIZUDHI K, MILLER R D. Hydraulic conductivity functions of frozen materials. In: *Proceedings of the fourth international conference on permafrost*[M]. Washington, DC: National Academy Press, 1983: 504 - 408.
- [34] ZHANG X Y, ZHANG M Y, LU J G, et al. Effect of hydro-thermal behavior on the frost heave of a saturated silty clay under different applied pressures[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2017, 117: 462 - 467.