

考虑主应力轴旋转作用的一个增量模型

万 征, 秋仁东, 赵晓光

(中国建筑科学研究院地基基础研究所, 北京 100013)

摘要: 为了探究主应力轴旋转作用下土体的变形规律, 采用如下思路构建模型: (1) 分析二维铝棒的单剪试验结果可知, 剪应力与正应力之比(剪应力比)与剪应变的类似双曲线关系, 采用威布尔函数作为描述上述二者的关系表达式, 不仅可反映双曲线型关系, 还能充分考虑到应力比的应变软化现象。(2) 利用应力莫尔圆上的应力比表达式, 与威布尔函数联立得到了剪应变的隐函数。该隐函数认为有 3 个影响剪应变的因素: 反映等向压缩或偏压作用下产生剪应变的球应力 p , 对于一般剪切作用下产生相应剪应变的滑动摩擦角 φ_m , 在莫尔圆上剪应力与大主应力之间的夹角半角 α 。(3) 通过对上述隐函数求导可得到剪应变与剪应力比之间的增量表达式, 联立 Rowe 剪胀方程, 建立二维条件下的考虑主应力轴旋转的增量本构模型, 上述二维方程可通过 SMP 准则拓展为三维增量本构模型。所提 WB 模型不仅能反映土体的压硬性、剪切体缩、体胀、应变硬化、软化, 还能充分反映主应力轴旋转作用下的土体一般应力 - 应变关系。通过莫尔圆圆周应力路径以及单剪试验和等向压缩试验的结果与预测结果对比, 验证了所提模型的适用性及合理性。

关键词: 土力学; 单剪; 剪应力比; 应变软化; 剪胀方程; 主应力轴旋转

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2017)09 - 2275 - 13

An incremental model considering the effect of rotation of principal stress axes

WAN Zheng, QIU Rendong, ZHAO Xiaoguang

(Research Institute of Base and Foundation, China Academy of Building Research, Beijing 100013, China)

Abstract: In order to explore the deformation of soil due to the rotation of principal stress axes, the following ideas are adopted to establish a model. (1) The results of single shear test on two dimensional aluminum rods are analyzed. The relationship of the ratio of the shear stress to the normal stress (shear stress ratio) with the shear strain is similar to the hyperbolic curve. The Weibull function is adopted to describe the relationship of shear stress ratio and shear strain which describes both the strain hardening and softening. (2) An implicit function about the shear strain is established by combining the shear stress ratio equation in Mohr's circle and Weibull function. There are three factors influencing the shear strain, including the mean stress p under isotropic or deviatoric compressions, the mobilized friction angle φ_m corresponding to the general deviatoric stress state and the half of angle α between the shear stress and larger principal stress axe. (3) An incremental equation about the shear strain and shear stress ratio is established by differentiating the above implicit equation. A two dimensional incremental

收稿日期: 2016 - 12 - 29; **修回日期:** 2017 - 03 - 20

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(11402260); 中国建筑科学研究院应用技术研究基金项目(20141602330730038); 住建部科技计划研究基金项目(20161602420730011)

Supported by the National Natural Science Foundation of China for Young Scholars(Grant No. 11402260), Foundation of China Academy of Building Research for Young Scholars(Grant No. 20141602330730038) and Department of Housing and Urban-rural Development of Science and Technology Plan Projects(Grant No. 20161602420730011)

作者简介: 万 征(1979 -), 男, 2012 于北京航空航天大学道路与铁道工程专业获博士学位, 现任副研究员, 主要从事地下结构与土相互作用, 混凝土及土的本构关系方面的研究工作。E-mail: zhengw111@126.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2016.1637

constitutive equation is established by combining the above stress ratio equation and Rowe dilatancy equation. A three-dimensional incremental constitutive equation is derived by expanding the above model adopted by SMP criterion. The compression hardening, shear shrinkage, shear dilation, hardening and softening are reflected in the proposed model(WB). A general stress-strain relationship considering the rotation of principal stress axes is thus derived. The applicability and rationality of the proposed model are verified by comparison of the experimental and calculated results.

Key words: soil mechanics; single shear; shear stress ratio; strain softening; dilatancy equation; principal stress axes rotation

1 引言

室内试验以及现场实测皆表明,土体在主应力轴发生旋转而主应力值大小不变的情况下,也会产生不可逆的变形^[1-11]。在一定的变形控制条件下或者不排水条件下,土体会产生较大的塑性剪切变形或者相当大的孔压,某些循环加载条件下土体甚至产生破坏。目前,室内土工试验中,可模拟主应力轴旋转应力路径的仪器有空心圆柱扭剪仪。包含主应力轴旋转路径的试验有直剪试验以及单剪试验,对于空心圆柱扭剪试验,由于可实现在垂直于径向应力的平面内进行大小主应力轴旋转,因此更具有针对性,而直剪以及单剪试验,由于试样内部土体单元包含了主应力轴旋转以及偏应力 q 增大的耦合复杂加载路径,其应力路径相当复杂^[12]。

目前,针对岩土材料构建的本构模型,大多基于3个主应力变量或者其等价变量形式,如 (p, q, θ) 等^[13-23],大都是关注于主应力值的变化对应的塑性变形,而对于主应力轴的方向变化所引起的土体塑性变形的问题尚考虑不够。对于主应力轴旋转所引起的土体变形的考虑,目前构建模型的主要思路有3种。第一种是继续在主应力变量为基础的模型上,增加考虑主应力轴转角的变量,将由主应力轴转角变化引发的塑性剪切应变与塑性体积应变引入到原有的本构模型中,使之能反映主应力轴旋转的影响。比较典型的如陈生水等^[24]构建的无黏性土弹塑性模型,通过将某一平面内主应力轴旋转所引其的塑性应变与塑性剪应变与纯 q 变化所导致的2种塑性应变相等,来等效求取两者的修正系数,这样即可通过转角来求取相应的塑性变形。上述方法能够考虑转角所导致的塑性变形影响,但由于仍然基于3个主应力来构建模型,因而无法反映一般应力(如剪应力)作用下的剪应变,不能从本质和机制上,对土体的主应力轴旋转变形做出合理解释。刘元雪等^[25-26]也采用的是类似的思路。第二种则是从一般

应力-应变关系出发构建模型,比如 H. Matsuoka 和 K. Sakakibara^[27],其先从二维直剪试验来建立剪应力比 τ/σ 与剪应变 γ 之间的关系,而后通过所建立的剪胀方程联立求得二维条件下一般应力-应变方程,通过 SMP 空间滑动面思想推广至三维。虽然上述模型能反映一些基本特性,如摩擦性、剪胀性,但由于构建的基本函数为双曲型函数,无法反映一般土体达到峰值后应变软化的基本特性。第三种是利用主应力作为变量,通过在主应力空间中屈服面的非典型塑性变形来实现。典型模型为 K. Hashiguchi 等^[28-32]提出的矢量弹塑性模型,认为在主应力空间中,屈服面不仅服从相关联流动法则,同时认为不同的材料都具有黏滞性,表现为沿屈服面切向方向作用有加载路径时,也会产生切向塑性应变。而主应力轴旋转即对应屈服面上沿切向应力路径运动。上述矢量模型虽可考虑较为广泛的一类岩土材料的变形特性,但由于上述模型所依据的是非典型塑性变形理论,因此在对具体的岩土材料的参数物理意义以及参数值确定方面,尚不明确。

针对一般应力中剪应力比 τ/σ 与剪应变 γ 之间的关系,可采用能描述峰值后应变软化的威布尔函数来描述。利用应力莫尔圆上一般应力之间的关系,联立威布尔函数,可得到关于剪应变与剪应力比之间的隐函数方程。认为该方程中对于影响剪应变大小及方向的3个变量分别为球应力、滑动摩擦角以及剪应力与大主应力夹角半角,通过一般应力作为变量将上述3个变量表示出来,并对隐函数方程全微分得到剪应变增量与一般应力增量之间的增量关系式。再利用 Rowe 剪胀方程来建立剪应变增量与塑性体变、塑性偏应变增量之间的关联表达式。上述基于剪应力作用下构建的二维方程,为考虑到等方向压缩下的体变特性,假设等方向压缩下为弹塑性变形,而卸载阶段为纯弹性变形,则可利用等方向压缩再回弹试验,可得到压缩线斜率以及回弹线斜率,由此推导得到等方向压缩作用下的体变方程。将上述方程综合考虑,可得到在单一平面

内主应力旋转模型，属于二维模型。为考虑三维条件下一般应力 - 应变关系，利用 SMP 空间滑动面^[33]的思想，即某一主应力方向的塑性应变增量应由与该方向非平行的 2 个滑移面所贡献的塑性应变增量之和来考虑。由此可建立考虑主应力轴旋转的一般应力 - 应变关系增量本构模型(WB 模型)。

本文建立的模型摒弃了以往传统的采用主应力轴与某一沉积面呈一定夹角的表达思路，而是直接分析一般剪应力与剪应力比之间的应力 - 应变关系，对主应力轴旋转作用产生体变的根源上，即一般剪应变所导致的体变进行剖析，从而直接用一般应力来构建三维模型，避免了采用主应力轴转角表述的转换过程，物理概念更为明确清晰。

2 剪应力比 - 剪应变曲线

2.1 试验规律

为考察二维条件下颗粒体之间剪切的宏观应力 - 应变关系，采用截面直径分别为 3 和 5 mm 两种铝棒堆积体模拟砂土颗粒的二维等效体，按照两者总体质量比为 3 : 2 来配比得到铝棒堆积体。堆积体正表面上作用均布荷载 52 kPa。图 1 为对应的剪应力比与剪应变关系^[27]。由图 1 可见，曲线整体类似双曲线函数曲线，出现峰值，在峰值后出现应变软化现象。

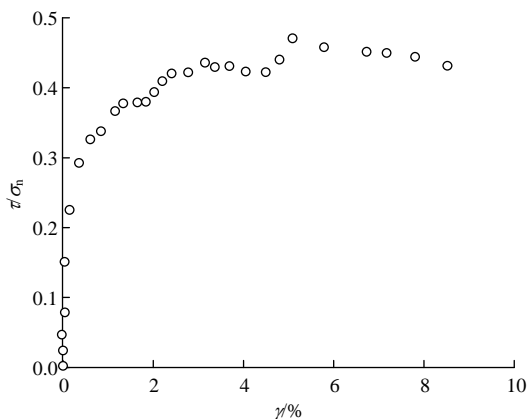


图 1 二维铝棒堆积体单剪试验的剪应力比与剪应变关系
Fig.1 Relationship of shear stress ratio and shear strain of single shear test for aluminum rods of two dimensions

在峰值点后，伴随有应变软化阶段。考虑到加载条件为平面应变条件，因此正应变与体应变相等，于是，图 2 也可视为体应变与剪应变的关系曲线。由图 2 可见，在剪切初始时刻，体变为体积收缩，发生剪缩，在随后的加载过程中，体变逐渐增大，产生剪切体胀现象，体胀应变最大值为 1.63%。

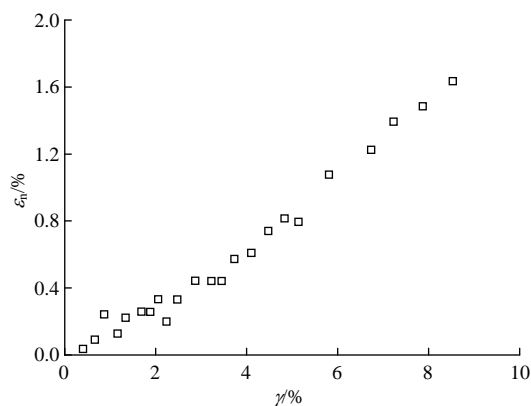


图 2 二维铝棒堆积体单剪试验的正应变与剪应变关系
Fig.2 Relationship of normal strain and shear strain of single shear test for aluminum rods of two dimensions

2.2 剪应变增量方程

对于能够产生应变软化现象的全量函数，可用威布尔函数来描述。其中剪应力比 R_1 可表示为

$$R_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \tag{1}$$

式中： τ_{xy} 为一般六面体土体单元某一面上的剪应力， σ_x 为垂直于上述侧面的正应力。根据威布尔函数表达式，则可令应力比 R_1 表示为

$$R_1 = \frac{a\gamma_{xy}}{e^{\left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c}} \tag{2}$$

式中： a, b, c 为对应的 3 个参量； γ_{xy} 为在剪应力作用下产生的一般剪应变。

图 3 为参量 c 取不同值，而 a, b 为固定值时所对应的函数曲线形态。当 c 值较小时，曲线形态倾向于双曲线形态，而当 c 值逐渐增大时，曲线在达到峰值点后出现软化段。分析上述曲线形态，可根据 3 个条件来确定函数中 3 个参量 a, b, c ：(1) 曲线原点 O 处，曲线切线斜率为一可确定的参量，显

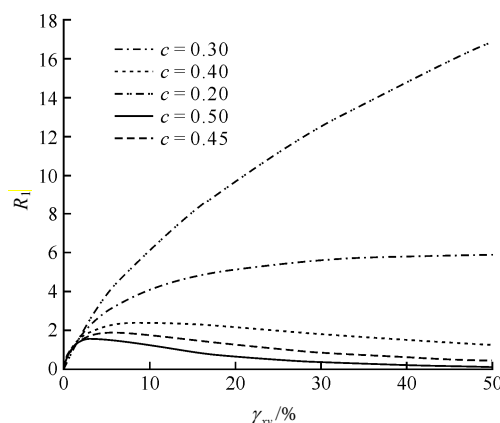


图 3 威布尔函数曲线形态
Fig.3 Curves of Weibull function

然，根据土的压硬性，围压越大，则所对应的初始切线斜率越大。根据初始切线斜率值可确定出曲线初始时的陡缓特点。(2) 显然，无论是否存在应变软化段，无论曲线形态怎样，都存在一个曲线峰值点，曲线峰值点所对应的点为一典型特征点，其表征了土体单元在剪切过程中所能达到的最大摩擦角。(3) 对于应变软化段曲线，由于在软化下降阶段，曲线存在残余应力比，则此时对应的土体单元摩擦角保持不变。当 $\gamma_{xy} = 0$ 时，曲线斜率为剪应力比的增长率为

$$R'_1 \Big|_{\gamma_{xy}=0} = \frac{ae \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c - a\gamma_{xy} e \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^{c-1} \frac{c}{b} \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^{c-1}}{e^{2\left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c}} = \frac{a - a_0 \frac{c}{b} \left(\frac{0}{b}\right)^{c-1}}{e^{2\left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c}} = a \quad (3)$$

随着围压增大，第三主应力增大，导致球应力增大，根据试验结果，可表示为

$$a = \frac{k_1}{\ln \frac{p}{p_b}} \quad (4)$$

式中： p_b 为量纲一的参数， k_1 为剪应力比 - 剪应变关系曲线初始斜率的调整系数。

如图 4 所示，对于 $\tau\sigma$ 平面内，按照莫尔应力圆，可表示出峰值点对应的峰值应力比。对于峰值点，峰值应力比 R_{1f} 为

$$R_{1f}(\varphi_m = \varphi_f) = \frac{\sin(2\alpha)\sin\varphi_f}{1 + \cos(2\alpha)\sin\varphi_f} \quad (5)$$

式中： φ_m 为在当前应力下所形成的滑动摩擦角，

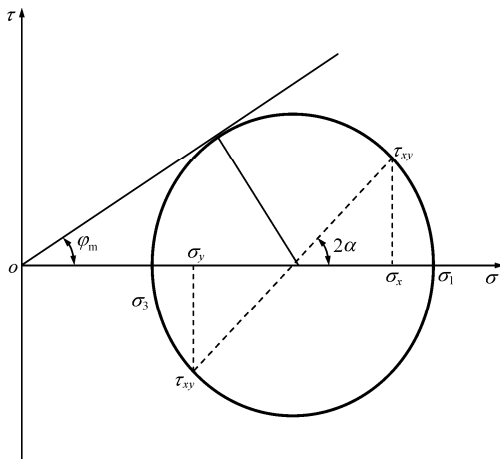


图 4 一般应力状态的莫尔圆表示图

Fig.4 General stresses described with Mohr circle

当土样破坏时，则 $\varphi_m = \varphi$ ，即自动退化为内摩擦角； α 为一般剪应力与大主应力之间夹角的 1/2。

对式(2)求导可得

$$R'_1 \Big|_{\varphi_m=\varphi} = \frac{ae \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c - a\gamma_{xy} e \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^{c-1} \frac{c}{b} \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^{c-1}}{e^{2\left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c}} \Big|_{\varphi_m=\varphi} = 0 \quad (6)$$

分析式(6)可知，分母 $e^{2\left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c} \neq 0$ ，因此分子必为 0，因此可导出：

$$ae \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c \left[1 - \frac{c\gamma_{xy}}{b} \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^{c-1} \right] = 0 \quad (7)$$

同理可得

$$\gamma_{xy} = b \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \quad (8)$$

对于峰值点，以下方程式成立：

$$\left. \begin{aligned} R_{1f}(\varphi_m = \varphi_f) &= \frac{\sin(2\alpha)\sin\varphi_f}{1 + \cos(2\alpha)\sin\varphi_f} = \frac{a\gamma_{xy}}{e \left(\frac{\gamma_{xy}}{b}\right)^c} \\ \gamma_{xy} &= b \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

联立并求解式(9)，可得

$$b = \frac{(ec)^{\frac{1}{c}} \sin(2\alpha)\sin\varphi_f}{a[1 + \cos(2\alpha)\sin\varphi_f]} \quad (10)$$

存在残余强度应力比 R_{1r} ，使得应力比不变，剪应变增大，即满足如下条件：

$$dR_{1r} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin(2\alpha)\sin\varphi_r}{1 + \cos(2\alpha)\sin\varphi_r} = \frac{a\gamma_r}{e \left(\frac{\gamma_r}{b}\right)^c} \quad (12)$$

式中： φ_r 为对应残余应力比时刻的摩擦角， γ_r 为对应残余应力比时刻的 γ_{xy} 。

由式(11)，(12)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{a\gamma_r}{e \left(\frac{\gamma_r}{b}\right)^c} &= R_{1r} \\ b &= \frac{(ec)^{\frac{1}{c}}}{a} R_{1r} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

联立式(13)可得

$$ec \ln \frac{a\gamma_r}{R_{1r}} = \left(\frac{a\gamma_r}{R_{1r}}\right)^c \quad (14)$$

令

$$\left(\frac{\gamma_r a}{R_{1r}}\right)^c = x \tag{15}$$

则可得到

$$\ln x = \frac{x}{e} \tag{16}$$

为确定出式(16)的解析解，可将式(16)等号两端各视为一个初等函数，则如图 5 所示，根据函数 $y_1 = \ln x$ 与函数 $y_2 = x/e$ 的关系，显然当 $x = e$ 时，满足如下方程：

$$y_1'|_{x=e} = y_2'|_{x=e} = \frac{1}{e} \tag{17}$$

$$y_2|_{x=e} = y_1|_{x=e} = 1 \tag{18}$$

即在坐标点(e, 1)， y_2 直线与 y_1 对数曲线相切，因此有

$$c = \frac{1}{\ln \frac{a\gamma_r}{R_{1r}}} \tag{19}$$

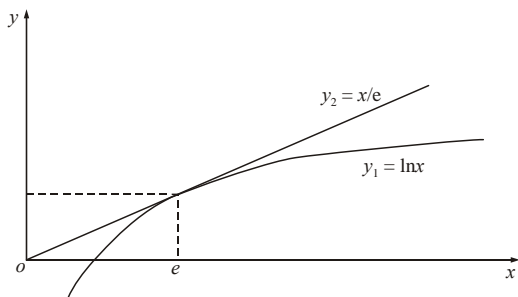


图 5 两曲线相切形态分布
Fig.5 A line tangential to a curve

则由此推导出了 3 个参数 a, b, c 的计算公式：

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{k_1}{\ln \frac{p}{p_b}} \\ b &= \frac{(ec)^c}{a} R_{1r} \\ c &= \frac{1}{\ln \frac{a\gamma_r}{R_{1r}}} \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

对于一般应力状态，联立式(2)，(5)可得到如下方程式：

$$\frac{\sin(2\alpha) \sin \varphi_m}{1 + \cos(2\alpha) \sin \varphi_m} - \frac{a\gamma}{e \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c} = 0 \tag{21}$$

假设上述方程中的剪应 γ 存在 3 个相关变量，对其具有不可忽视的影响。分别为球应力 p ；主应力轴旋转时剪应力 τ 与大主应力 σ_1 的夹角 α ；另外由于关注的是应力 - 应变关系，则对应于任意一点的

应力状态，都存在着一个滑动摩擦角 φ_m 与之相对应，该摩擦角表示强度发挥程度。上述 p, α, φ_m 三个变量所主导的因素基于岩土材料的 3 个根本性质来确定的，第一个因素与球应力相关，表明岩土材料具有压硬性，因此随着球应力的增大，其变形模量以及刚度也随之相应增大。第二个因素由主应力轴旋转时剪应力 τ 与大主应力 σ_1 的夹角 α 所主导，表明岩土材料具有典型的非共轴性，即应变增量方向与主应力方向不一致，其根本原因是一般剪应力作用下产生的不可逆体变，传统基于主应力为变量的模型无法考虑一般剪应力所引发的体变，因而无法考虑主应力轴旋转作用下发生的体变现象。第三个因素由滑动摩擦角 φ_m 所主导，主要基于岩土材料是一种典型的摩擦型材料这一基本依据，其强度及变形受到滑动摩擦角的支配，事实上，在未达到破坏前的任一点的应力 - 应变状态点，其应力状态都对应一个摩擦角。因此，摩擦角可用来表征一般的应力组合状态。

令关于 p, α, φ_m 的隐函数为

$$f(p, \alpha, \varphi_m) = \frac{\sin(2\alpha) \sin \varphi_m}{1 + \cos(2\alpha) \sin \varphi_m} - \frac{a\gamma}{e \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c} = 0 \tag{22}$$

对式(22)进行全微分，可得

$$df = \frac{[1 + \cos(2\alpha) \sin \varphi_m] d[\sin(2\alpha) \sin \varphi_m]}{[1 + \cos(2\alpha) \sin \varphi_m]^2} - \frac{\sin(2\alpha) \sin \varphi_m d[1 + \cos(2\alpha) \sin \varphi_m]}{[1 + \cos(2\alpha) \sin \varphi_m]^2} - \frac{e \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c d(a\gamma) - a\gamma d \left[e \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c \right]}{e^2 \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c} = 0 \tag{23}$$

根据对式(20)进行求微分，并代入到式(23)中可得到关于 $d\gamma$ 与 $d\alpha, d\varphi_m, dp$ 之间的增量关系式：

$$d\gamma = \frac{e \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c}{a \left[1 - c \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c \right]} \cdot \left\{ \frac{2 \sin \varphi_m [\sin \varphi_m + \cos(2\alpha)] d\alpha + \sin(2\alpha) \cos \varphi_m d\varphi_m}{[1 + \cos(2\alpha) \sin \varphi_m]^2} + \left\{ \left[\frac{(\gamma/b)^c \ln(\gamma/b)}{[\ln(a\gamma_r/R_{1r})]^2} + \frac{c}{ab} \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c (ec)^{\frac{1}{c}} R_{1r} \right] \cdot \left\{ \frac{\ln c}{c^2 [\ln(a\gamma_r/R_{1r})]^2} - 1 \right\} + 1 \right\} / e \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c \frac{\gamma k_1 dp}{p [\ln(p/p_b)]^2} \right\} \tag{24}$$

对于 $d\alpha$ 部分，由于主应力轴方向与应变主轴方向存在角度 δ ，即设应变增量方向落后于主应力方向一个角度 δ ，则表达于 $d\alpha$ 部分中的 $\cos(2\alpha)$ 可替换为 $\cos[2(\alpha - \delta)]$ 。

3 剪胀关系及剪应变增量式

3.1 剪胀关系

根据 P. W. Rowe^[34]剪胀试验所得到的规律可知，第一、第三主应力比 $R = \sigma_1 / \sigma_3$ 与第三主应变增量与第一主应变增量比 $d\varepsilon_3 / d\varepsilon_1$ 的关系可表示为一线性方程：

$$R = -k_2 \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} + k_3 \quad (25)$$

式中： k_2, k_3 为待定参数，可根据在不同 α 值时刻的剪切试验结果拟合得到：

$$k_2 = \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_e}{2}\right) \quad (26)$$

式中： φ_e 为等效内摩擦角。

由图 6 可见，大、小主应力之比与小、大主应变增量比存在直线型关系。上述试验结果分别由应力莫尔圆中剪应力与横坐标轴之间的夹角 α 为恒定值以及单剪和沿着应力莫尔圆路径得到的测试结果。结果表明，无论何种路径，上述二者的关系曲线可采用直线来表达。分析式(25)可知，当 R 为一个大于 0 的极小数值，则 $k_3 > 0$ 时， $-k_2 \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} < 0$ ，

此时由于 $k_2 > 0$ 是确定的，因此有 $d\varepsilon_3 > 0$ 且 $d\varepsilon_1 > 0$ ，此时，发生体缩，而当应力比 R 逐渐增大为足够大的数值，则 $R - k_3 > 0$ 成立时，此时 $d\varepsilon_3 > 0$ 且 $d\varepsilon_1 < 0$ 或者 $d\varepsilon_3 < 0$ 且 $d\varepsilon_1 > 0$ ，此时发生体胀。因此该剪胀方程能够有效模拟砂土颗粒在剪切作用下先剪缩后剪胀的特性。

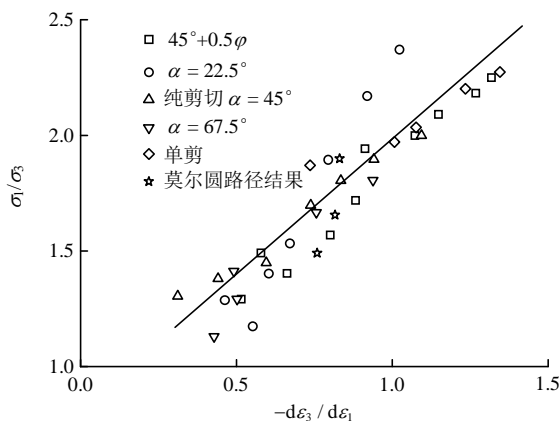


图 6 剪胀关系试验结果

Fig.6 The test results of shear dilation

剪应变增量与大小主应变增量之间关系式采用如下公式进行表达：

$$d\gamma = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \sin(2\alpha + 1.2\delta) = \left(1 + \frac{R - k_3}{k_2}\right) \sin(2\alpha + 1.2\delta) d\varepsilon_1 \quad (27)$$

$$d\varepsilon_x (d\varepsilon_y) = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{2} \pm \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2} \cos(2\alpha + 1.2\delta) = 0.5 \left[\left(1 - \frac{R - k_3}{k_2}\right) \pm \left(1 + \frac{R - k_3}{k_2}\right) \cos(2\alpha + 1.2\delta) \right] d\varepsilon_1 \quad (28)$$

式(28)中，加号表示对应的求取 $d\varepsilon_x$ 的方程，而减号表示求取 $d\varepsilon_y$ 的方程。考虑平面上单元体中任一楔形体，其斜面上的主剪应力以及主正应力的主应力表述形式都与主剪应变及正应变表述形式是相同的，因而可类比应力表达形式，将剪应变及一般应变用主应变表述为式(27)与(28)。

3.2 剪应变增量式

根据上述式(27)与(28)，可得到正应变与剪应变增量比为

$$d\varepsilon_x / d\gamma (d\varepsilon_y / d\gamma) = \frac{\frac{k_2 - (R - k_3)}{k_2 + (R - k_3)} \pm \cos(2\alpha + 1.2\delta)}{2 \sin(2\alpha + 1.2\delta)} = \frac{k_2 - (R - k_3)}{2 \sin(2\alpha + 1.2\delta) [k_2 + (R - k_3)]} \pm \frac{1}{2 \tan(2\alpha + 1.2\delta)} \quad (29)$$

式(29)中，加号表示求取 $d\varepsilon_x / d\gamma$ 的方程，而减号则表示求取 $d\varepsilon_y / d\gamma$ 的方程。根据莫尔圆上的几何关系，可得到由应力量表示的滑动摩擦角、剪应力与主应力夹角半角、球应力关系式，分别为

$$\sin \varphi_m = \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{\sigma_x + \sigma_y} \quad (30)$$

$$\alpha = 0.5 \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (31)$$

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (32)$$

将 $d\gamma$ 分解为三部分，即 $d\gamma = d\gamma_\alpha + d\gamma_\varphi + d\gamma_p$ 。由于 $d\alpha, d\varphi_m, dp$ 可分别由一般应力增量表示，将式(30), (31), (32)分别求微分，并代入到式(24)中可得到三部分增量关系式：

$$d\gamma_\alpha = \frac{e^{\left(\frac{\gamma}{b}\right)^c}}{a \left[1 - c \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c\right]} \frac{2 \sin \varphi_m \{ \cos[2(\alpha - \delta)] + \sin \varphi_m \}}{\{1 + \cos[2(\alpha - \delta)] \sin \varphi_m\}^2} \cdot \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y) d\tau_{xy} - \tau_{xy} (d\sigma_x - d\sigma_y)}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] \quad (33)$$

$$d\gamma_\phi = \frac{e\left(\frac{\gamma}{b}\right)^c \sin(2\alpha)}{a\left[1 - c\left(\frac{\gamma}{b}\right)^c\right] [1 + \cos(2\alpha) \sin^2 \phi_m] (\sigma_x + \sigma_y)^2} \cdot \left\{ \left[\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] d\sigma_x - \left[\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] d\sigma_y + \frac{4(\sigma_x + \sigma_y)\tau_{xy} d\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right\} \quad (34)$$

$$d\gamma_p = \left\{ \left[\frac{\left(\frac{\gamma}{b}\right)^c \ln\left(\frac{\gamma}{b}\right)}{\left(\ln \frac{a\gamma_r}{R_{lr}}\right)^2} + \frac{c}{ab} \left(\frac{\gamma}{b}\right)^c (ec)^{\frac{1}{c}} R_{lr} \right] \left[\frac{\ln c}{c^2 \left(\ln \frac{a\gamma_r}{R_{lr}}\right)^2} - 1 \right] + 1 \right\} \left\{ 2a \left[1 - c\left(\frac{\gamma}{b}\right)^c \right] \right\} p \left(\ln \frac{p}{p_b} \right)^2 k_1 \gamma (d\sigma_x + d\sigma_y) \quad (35)$$

3.3 等方向压缩应变增量式

由式(33), (34), (35)联立可得到剪应变的增量表达式:

$$d\gamma = d\gamma_\alpha + d\gamma_\phi + d\gamma_p \quad (36)$$

$$d\varepsilon_x (d\varepsilon_y) = \left\{ \frac{k_2 - (R - k_3)}{2 \sin(2\alpha) [k_2 + (R - k_3)]} \pm \frac{1}{2 \tan(2\alpha)} \right\} d\gamma \quad (37)$$

式(37)中, 加号表示求取 $d\varepsilon_x$ 的方程, 而减号则表示求取 $d\varepsilon_y$ 的方程。等方向路径下的体变, 则可根据在 $e - (p/p_b)^\zeta$ 坐标系中整理得到:

正常压缩线, 则

$$e_N = e_{N0} - c_c \left(\frac{p}{p_b} \right)^\zeta \quad (38)$$

式中: e_N 为正常压缩线上在任一点球应力 p 下所对应的孔隙比, e_{N0} 为正常压缩线的截距, c_c 为正常压缩线的斜率。

回弹线, 则

$$e_s = e_{s0} - c_e \left(\frac{p}{p_b} \right)^\zeta \quad (39)$$

式中: e_s 为回弹线上在任一点 p 下所对应的孔隙比,

e_{s0} 为回弹线的截距, c_e 为回弹线的斜率。

初始孔隙比为 e_0 , 压缩再回弹所得到的孔隙比变化量为

$$\Delta e = (c_c - c_e) \left[\left(\frac{p}{p_b} \right)^\zeta - \left(\frac{p_0}{p_b} \right)^\zeta \right] \quad (40)$$

塑性体应变为

$$\varepsilon_v^p = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{(c_c - c_e)}{1 + e_0} \left[\left(\frac{p}{p_b} \right)^\zeta - \left(\frac{p_0}{p_b} \right)^\zeta \right] \quad (41)$$

如图 7 所示, 由于主应变增量可分解为 4 个分量, 其中 3 个分量为共轴增量, 另一个为异轴分量。若假设在二维条件下, 沿着 x 方向或者 y 方向, 两者塑性应变增量相同, 即忽略二者间存在的各向异性影响, 则

$$d\varepsilon_{ix}^p = d\varepsilon_{iy}^p \quad (42)$$

$$d\varepsilon_{ix}^p = d\varepsilon_{iy}^p = \frac{\zeta(c_c - c_e)}{2p(1 + e_0)} \left(\frac{p}{p_b} \right)^\zeta (d\sigma_x + d\sigma_y) \quad (43)$$

$$d\varepsilon_{iv}^p = d\varepsilon_{i1}^{ic} + d\varepsilon_{i2}^{ic} \quad (44)$$

$d\varepsilon_{is}$, $d\varepsilon_{iac}$, $d\varepsilon_{ir}$ 三者可通过式(36), (37)联立求解得到。对于等向压缩塑性增量部分, 可通过式(43)得到。

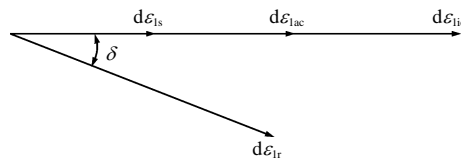


图 7 应变增量分解图

Fig.7 The decomposition of strain increment

4 加、卸载准则

由前述分析可知, 引起剪应变发展的 3 个变量, 即由 α , ϕ_m , p 三变量造成的剪应变增量, 可分别由增量式(33), (34), (35)来表达。而由球应力所引发的应变增量可由式(43)来表述。

由图 8 可见, 在剪应力与球应力坐标系中, 在任意一点状态, 其应力点当前应力比为 η , 则对于下一个应力增量, 可有 4 个区域进行选择, 当应力增量进入 1 区域时, 显然应力比增大, 且球应力增大, 则剪切硬化与等向压缩硬化同时产生, 因此, 为加载区域。当进入 2 区域时, 应力比增大而球应力减小, 剪切硬化产生而等向压缩硬化未产生, 也为加载区域。当进入 3 区域时, 可判断应力比与球应力同时减小, 剪切硬化与等向压缩硬化均未产生,

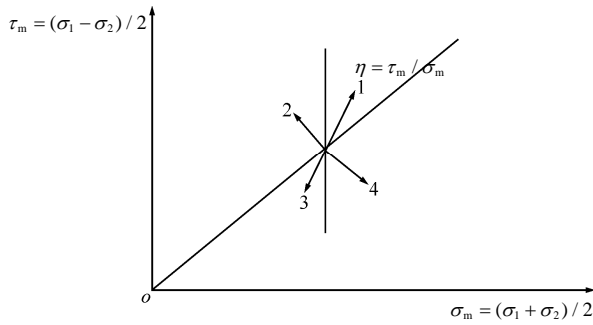


图8 加载区域分区图

Fig.8 The partition of loading areas

因此可判断为卸载。当进入4区域时，应力比减小，而球应力增大，此时，剪切硬化未产生而等向压缩硬化产生，可判断为加载。

5 二维增量本构模型方程

假定应变增量可分解为两部分，即弹性增量部分和塑性增量部分，则弹性模量可表示为

$$E = \frac{3(1-2\nu)p_b^\zeta}{\zeta c_e p^{\zeta-1}} \quad (45)$$

式中：\$p\$ 为有效平均应力，\$\nu\$ 为泊松比，\$\zeta\$ 为等方向压缩的幂次参数，\$c_e\$ 为回弹曲线在 \$e-(p/p_b)^\zeta\$ 坐标系中的斜率。

弹性剪切模量可表示为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3(1-2\nu)p_b^\zeta}{2(1+\nu)\zeta c_e p^{\zeta-1}} \quad (46)$$

拉梅系数可表示为

$$L = \frac{E}{3(1-2\nu)} - \frac{2}{3}G \quad (47)$$

按照以应力增量控制来表达，本构方程可表示为

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

$$d\sigma_i = D_{ij}^e d\epsilon_j^e = D_{ij}^e (d\epsilon_j - d\epsilon_j^p) = D_{ij}^e d\epsilon_j - D_{ij}^e d\epsilon_j^p \quad (49)$$

$$d\sigma_i = D_{ij}^e d\epsilon_j - D_{ij}^e M_{jk} d\sigma_k \quad (50)$$

$$d\sigma_k = (\mathbf{A}_{kk} + D_{ij}^e M_{jk})^{-1} D_{ij}^e d\epsilon_j \quad (51)$$

式中：\$\mathbf{A}_{kk}\$ 为单位张量。令

$$\mathbf{D}_{ij}^{ee} = (\mathbf{A}_{kk} + D_{ij}^e M_{jk})^{-1} \quad (52)$$

弹塑性刚度矩阵张量为

$$\mathbf{D}_{kj} = \mathbf{D}_{ki}^{ee} \mathbf{D}_{ij}^e \quad (53)$$

$$\mathbf{D}_{ij}^e = L \delta_i \delta_j + G(\delta_i \delta_j + \delta_i \delta_k) \quad (54)$$

式中：\$\mathbf{M}_{jk}\$ 为塑性部分柔度矩阵张量。

6 三维增量本构模型方程

如图9所示，对于任意一个三维单元体，在三个方向正应力作用下会产生相应的正应变，则应变可表示为两者之和的形式：

$$\begin{cases} d\epsilon_x = d\epsilon_{xy} + d\epsilon_{xz} \\ d\epsilon_y = d\epsilon_{yz} + d\epsilon_{yx} \\ d\epsilon_z = d\epsilon_{zx} + d\epsilon_{zy} \end{cases} \quad (55)$$

式中：\$d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\epsilon_z\$ 分别为沿着正应力方向的应变增量；\$d\epsilon_{xz}\$ 为在 \$xz\$ 二维条件下得到的沿着 \$x\$ 方向的应变增量；\$d\epsilon_{xx}\$ 为二维条件下，2个正应力值相等条件下的应变增量。

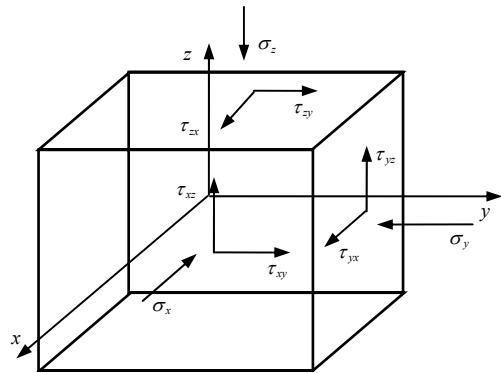


图9 单元体的一般应力分解图

Fig.9 The decomposition of general stress for an element

(1) 三轴压缩条件下，可确定出如下应变增量算式：

$$\begin{aligned} \sigma_z > \sigma_x = \sigma_y \\ d\epsilon_{xz} = d\epsilon_{yz} < d\epsilon_{zx} \\ d\epsilon_z = 2d\epsilon_{zx} \end{aligned}$$

(2) 三轴伸长条件下，有如下应变增量公式：

$$\begin{aligned} \sigma_z < \sigma_x = \sigma_y \\ d\epsilon_{xz} = d\epsilon_{yz} > d\epsilon_{zx} \\ d\epsilon_z = 2d\epsilon_{zx} \end{aligned}$$

因此，可得

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\epsilon_z^p \\ d\gamma_{xy}^p \\ d\gamma_{yz}^p \\ d\gamma_{zx}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

仿照前文二维的做法，对于 xoz 平面、 $yo z$ 平面，都可得到相似的塑性柔度矩阵张量。

根据三维塑性柔度矩阵以及二维塑性柔度矩阵，可联立式(56)以及 3 个表示式相似的二维柔度矩阵张量方程，可得到三维矩阵张量公式：

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}^e = D_{ijkl}^e (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) = D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} - D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}^p \quad (57)$$

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} - D_{ijkl}^e C_{klmn} d\sigma_{mn} \quad (58)$$

$$d\sigma_{mn} = (\Delta_{ijmn} + D_{ijkl}^e C_{klmn})^{-1} D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} \quad (59)$$

$$D_{mnlk} = (\Delta_{ijmn} + D_{ijkl}^e C_{klmn})^{-1} D_{ijkl}^e \quad (60)$$

式中： D_{mnlk} 为三维弹塑性刚度矩阵张量， Δ_{ijmn} 为单位张量。

7 模型参数及预测

7.1 模型参数

所建议的 WB 模型，其所用的参数分别为 k_1 , p_b , R_{1f} , R_{1r} , γ_r , k_2 , k_3 , c_c , c_e , ζ ，共计 10 个参数。

7.2 模型参数确定

对于所提 WB 模型的 10 个参数，其中， k_1 , p_b , R_{1f} , R_{1r} , γ_r 为对应单剪试验得到的应力 - 应变关系曲线所得到的参数。 k_2 , k_3 为对应的多种应力路径根据主应力比与应变增量比之间的线性关系得到的参数。 c_c , c_e , ζ 为由等向压缩及回弹试验所确定的参数。其中， k_1 , p_b 的确定按照如下思路进行，根据不同平均应力值进行单剪试验而得到一系列曲线，再整理剪应力比和剪应变的关系曲线，可得到对应某一平均应力下的初始斜率值，由斜率值再来拟合得到 k_1 , p_b 取值。根据式(4)可知， a 即为对应的初始斜率值。将式(4)变形，可得

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{k_1} \ln p - \frac{1}{k_1} \ln p_b \quad (61)$$

将初始斜率倒数表示为 $\ln p$ 的线性函数，则式(61)即为 $1/a$ 关于 $\ln p$ 的一次函数，根据不同平均应力下的一系列测试点，可拟合得到一条直线，直线的斜率为 $1/k_1$ ，截距为 $\ln p_b/k_1$ 。根据拟合得到的斜率和截距可计算出参数值 k_1 , p_b 。 R_{1f} , R_{1r} , γ_r 可根据单剪试验剪应力比与剪应变曲线试验结果确定。 k_2 , k_3 根据图 6 试验结果拟合直线得到。 c_c , c_e , ζ 根据等方向压缩与回弹曲线在 $e-(p-p_b)^\zeta$ 坐标系中拟合直线得到。

7.3 模型预测

根据 H. Matsuoka 和 K. Sakaribaran^[27] 针对铝棒

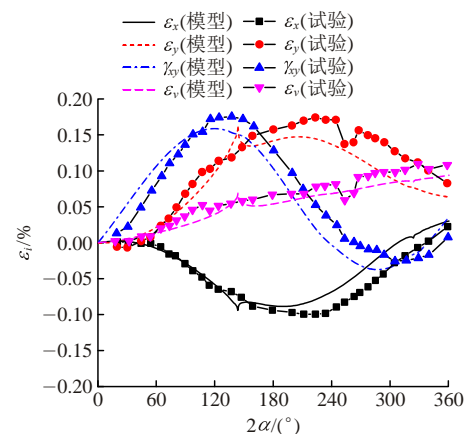
集合体所做的莫尔应力圆圆周应力路径试验，可分别进行预测，对应 2 组试验：第一组试验为大主应力保持为 48 kPa，而小主应力保持为 32 kPa；第二组试验为大主应力保持为 49 kPa，而小主应力保持为 29.4 kPa。2 组试验所选用的参数如表 1 中第一行所示。

表 1 模型参数

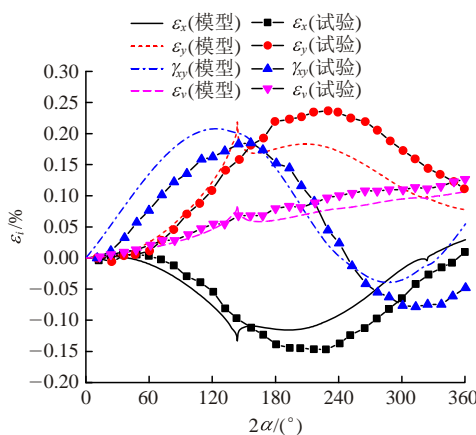
Table 1 Model parameters

k_1	p_b/kPa	R_{1f}	R_{1r}	γ_r	k_2	k_3	c_c	c_e	ζ
60	6	2.05	2	10	2	0.3	0.005 0	0.001 5	0.5
2	0.6	1.05	1	10	1.8	5.6	0.005 0	0.001 5	0.5
0.4	15	1.60	1	15	0.8	1.2	0.001 0	0.000 2	0.8
3 000	289	2.05	1	1.2	1.0	8.4	0.005 0	0.001 5	0.5
1 200	28	2.50	2	30	5.6	1.3	0.000 8	0.000 2	0.5
3 400	21	2.50	2	30	5.6	1.3	0.000 8	0.000 2	0.5

由图 10 可见，在大、小主应力值保持不变而主应力轴旋转条件下，在 x 方向即正压力方向，产生伸长应变，而在 z 方向即水平剪切方向，则产生了压缩应变。在剪应力 τ 作用下所产生的剪应变，与应力莫尔圆中剪应力与大主应力夹角(2α)关系类



(a) 第一组



(b) 第二组

图 10 应力莫尔圆圆周应力路径预测对比

Fig.10 Comparison for predicted results and test data under Mohr' circle path for second set

似于正弦曲线形态。而体变则随着角度 2α 呈现出近似于直线型正比例关系。由预测对比关系可见，WB 模型较好地模拟了在单一平面内，大、小主应力轴纯转动所导致的应力 - 应变关系。由图 10 可见，虽然应力路径沿莫尔圆为圆周路径，即主应力大小不发生变化，但由于剪应力 τ 的作用，仍然会产生一般剪应变 γ ，在一般正应力作用下产生相对应的正应变，在上述作用下，发生了塑性体变的累积效应，即发生了不可恢复的体积应变。图 10 曲线表现了体变的单调递增规律特点。本文模型能有效地对上述变形特性进行描述。

图 11 所示为铝棒堆积体的单剪试验与模型试验结果对比，其所选取参数见表 1 第二行。由图 11 可见，剪应力比随剪应变呈现逐渐增大的趋势，而与剪应力同方向的正应变 ϵ_y 则与体变相等，由此可见，体变规律呈现出先剪缩后剪胀的规律特点。由对比结果可见，模型预测的曲线与试验结果吻合较好。

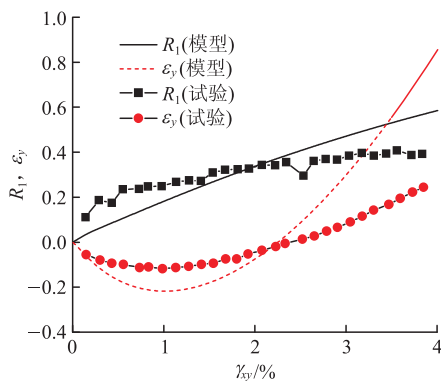


图 11 单剪试验应力 - 应变关系预测对比

Fig.11 Comparison for predicted results and test data under single shear test

图 12 为与图 11 对应条件下的应力值对比，由图可见，当竖向应力 σ_x 保持不变时，随着剪应变的

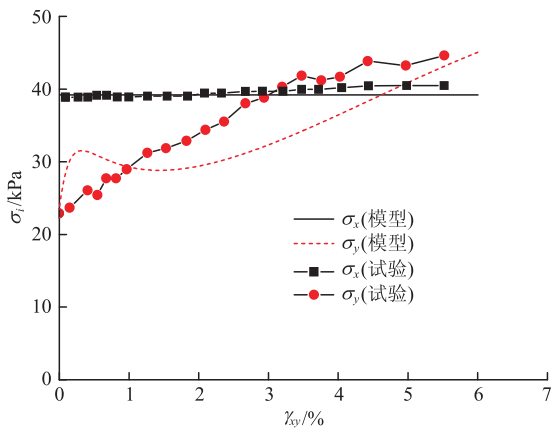


图 12 单剪试验应力预测对比

Fig.12 Comparison for predicted results and test data under single shear test

增大，水平向正应力 σ_y 随着剪应变的增大而逐渐增大，模型预测与试验结果相吻合。图 11 和 12 中的单剪路径包含了主应力旋转以及类似于三轴压缩路径的混合加载模式，其体变规律则是上述 2 种路径作用下相互叠加的结果，可看出先剪缩后剪胀的特点。

图 13 为针对 Toyoura 砂土开展的单剪试验结果，其中加载在砂土试样上的恒压力为 196 kPa。随着剪应变的增加，剪应力比逐渐增大，砂土的侧向位移即体变则表现出先剪缩后剪胀的规律。对比可见，模型预测曲线能反映砂土在主应力轴发生转动时的应力 - 应变关系。模型预测的剪缩及剪胀的体变幅值都较大，主要原因在于砂土除了是典型的密度与围压依存性材料外，其体变及强度特性还主要受到原生各向异性的影响，砂土颗粒形状以及颗粒间定向排列方式都会对其体变结果产生较大的影响。相同的加载方式，作用于各向异性程度不同的砂土试样上，会产生不同的体变结果。本文模型对于这种原生各向异性对体变的影响尚未考虑，因而会产生较大的差异。

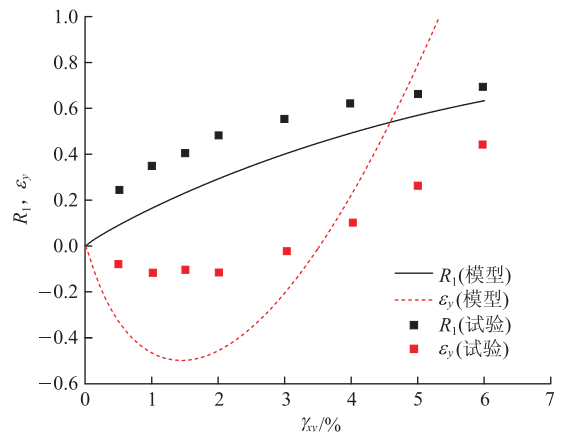


图 13 Toyoura 砂土单剪试验应力应变关系预测对比

Fig.13 Comparison for predicted results and test data under single shear test of Toyoura sands

图 14 为 K. L. Lee 和 H. B. Seed^[35]对 Sacra 砂土进行常规排水三轴压缩时的应力 - 应变关系曲线，图 14(a), (b), (c) 分别对应初始球应力为 290, 590, 1 030 kPa，由于砂土为密度状态相关材料，其变形及强度受当前围压以及密度影响很大，在此，将 p_0 视为状态变量，则当其分别为 289, 120, 50 时，可得到图 14 所示的广义偏应力与大主应变的关系及体变与大主应变之间的关系。对于不同初始围压下的砂土，用 WB 模型可以有效反映其压硬性，剪缩剪胀特性。

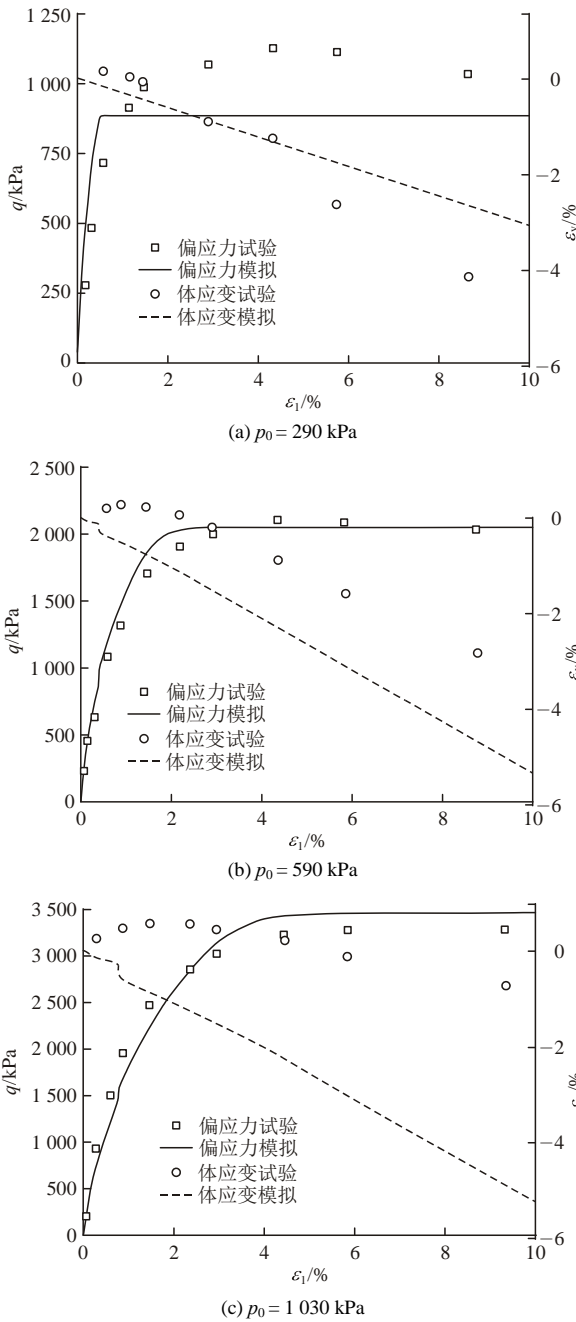


图 14 Sacra 砂土排水常三轴压缩的应力 - 应变关系预测对比
 Fig.14 Comparison for predicted results and test data under drained triaxial compression tests of Sacra sands

图 15 中数据点为 K. L. Lee 和 I. Farhoomand^[36] 针对 Sacramento 河砂土所进行的一组等方向压缩试验结果, 其所用参数见表 1 中第 5 行。对应于 4 种不同初始密度的砂土, 在等向压缩作用下孔隙比逐渐减小, 最终趋向于一致。对比图中结果可见, WB 模型可较为合理地用于描述等向压缩下砂土的变形特性。

图 16 所示数据点为 P. V. Lade 和 P. A. Bopp^[37] 针对 Cambria 砂土所进行的等向压缩试验结果。选用参数见表 1 中第 6 行。由图可见, 在较大围压作用下, 本文 WB 模型仍可用于描述等向压缩下的砂土体变。

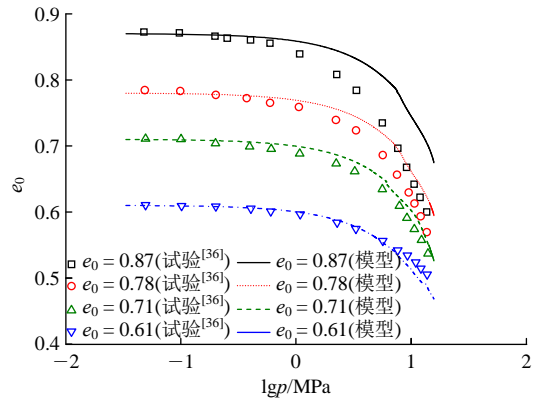


图 15 Sacramento 河砂土等向压缩预测对比

Fig.15 Comparison for predicted results and test data under isotropic compression for Sacramento sands

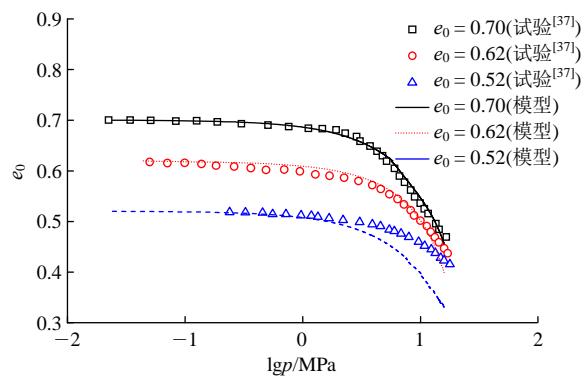


图 16 Cambria 砂土等向压缩预测对比
 Fig.16 Comparison for predicted results and test data under isotropic compression for Cambria sands

8 结 论

根据剪应力比与剪应变之间所形成的类似于双曲线型的关系曲线, 采用威布尔函数来描述二者的关系, 并根据曲线初始斜率、曲线峰值点、曲线残余值, 分别确定威布尔函数的 3 个参量, 采用莫尔应力圆所表达的剪应力比与威布尔函数联立得到应力比方程。假定上述应力比方程是关于球应力 p 、剪应力大主应力夹角 α 、任意一点应力状态对应的摩擦角 φ_m 的函数关系式。通过对上述 3 个变量的方程进行微分, 可分别得到对应于上述 3 个变量所贡献的剪应变增量, 再联立 Rowe 剪胀方程可建立二维条件下一般应力 - 应变关系式。根据 SMP 准则的思想, 对于任意一个主应变方向上所产生的主应变, 应由与其非平行的 2 个滑动面来贡献得到, 这样, 能够两两相叠加, 得到三维条件下的应变增量。根据上述思想, 可由二维应力 - 应变关系式推导得到最终的三维应力 - 应变关系式。通过上述推导, 并根据计算结果, 得到如下结论:

(1) 利用威布尔函数, 对于一般剪应变增量, 将其分解为由球应力 p 、剪应力大主应力夹角 α 、任意一点应力状态对应的摩擦角 φ_m 三个变量所贡献的增量表达式, 并联立 Rowe 剪胀方程建立了二维条件下的应力 - 应变关系式。

(2) 采用 SMP 空间滑动面思想, 通过推导得到二维应力应变关系式, 进而得到了三维条件下的本构方程。

(3) 所构建的模型摒弃了以往的传统思路, 而是从一般剪应变与剪应力比的关系入手, 通过联合 Rowe 剪胀方程以及等向体变硬化特性, 从三维单元体的 SMP 滑移面的思路拓展为三维模型。模型直接从一般应力 - 应变关系入手来构建, 避免了采用主应力轴转角这个中间转换变量, 因此也避免了采用传统思路中需要特殊路径构建主应力轴转角与塑性体变以及塑性偏应变之间的增量关系式, 减少了等效转换的过程, 也避免了一些特殊参数的确定过程。

分别采用莫尔应力圆圆周路径加载试验、直剪试验、常规三轴压缩以及等向压缩试验结果, 对所提的模型进行验证, 结果对比表明: WB 模型不仅能反映出土体的三大基本特性, 摩擦性、压硬性、剪胀性, 还能反映出应变硬化、应变软化特性。所建议的模型可合理、方便地应用于一般应力 - 应变关系的模拟。

参考文献(References):

- [1] ARTHUR J R F, CHUA K S, DUNSTAN T. Dense sand weakened by continuous principal stress direction rotation[J]. Geotechnique, 1979, 29(1): 91 - 96.
- [2] JOER H A, LANIER J, FAHEY M. Deformation of granular materials due to rotation of principal axes[J]. Geotechnique, 1998, 48(5): 605 - 619.
- [3] ISHIHARA K, TOWHATA I. Sand response to cyclic rotation of principal stress directions as induced by wave loads[J]. Soils and Foundations, 1983, 23(4): 11 - 26.
- [4] TOWHATA I, ISHIHARA K. Undrained strength of sand undergoing cyclic rotation of principal stress axes[J]. Soils and Foundations, 1985, 25(2): 135 - 147.
- [5] SIVATHAYALAN S, VAID Y P. Influence of generalized initial state and principal stress rotation on the undrained response of sands[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(1): 63 - 76.
- [6] ZDRAVKOVIC L, JARDINE R J. The effect on anisotropy of rotating the principal stress axes during consolidation[J]. Geotechnique, 2001, 51(1): 69 - 83.
- [7] 郭莹, 栾茂田, 许成顺, 等. 主应力方向变化对松砂不排水动强度特性的影响[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(6): 666 - 670.(GUO Ying, LUAN Maotian, XU Chengshun, et al. Effect of variation of principal stress orientation on undrained dynamic strength behavior of loose sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(6): 666 - 670.(in Chinese))
- [8] 郭莹, 栾茂田, 何杨, 等. 复杂应力条件下饱和松砂孔隙水压力增长特性的试验研究[J]. 地震工程与工程振动, 2004, 24(3): 139 - 144.(GUO Ying, LUAN Maotian, HE Yang, et al. Experimental study on development pattern of shaking-induced pore water pressure of saturated loose sand under complex loading[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2004, 24(3): 139 - 144.(in Chinese))
- [9] 付磊, 王洪瑾, 周星星. 主应力偏转角对砂砾料动力特性影响的试验研究[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(4): 435 - 440.(FU Lei, WANG Hongjin, ZHOU Jingxing. Effect of the initial rotation angle of principal stress on the dynamic properties of soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(4): 435 - 440.(in Chinese))
- [10] LADE P V, KIRKGARD M M. Effects of stress rotation and changes of b -values on cross-anisotropic behavior of natural K_0 -consolidated soft clay[J]. Soils and Foundations, 2000, 40(6): 93 - 105.
- [11] 严佳佳, 周建, 龚晓南, 等. 主应力轴纯旋转条件下原状黏土变形特性研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(3): 474 - 481.(YAN Jiajia, ZHOU Jian, GONG Xiaonan, et al. Deformation behavior of intact clay under pure principal stress rotation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(3): 474 - 481.(in Chinese))
- [12] 李广信. 高等土力学[J]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 2.(LI Guangxin. Advanced soil mechanics[J]. Beijing: Tsinghua University, 2004: 2.(in Chinese))
- [13] 黄茂松, 杨超, 崔玉军. 循环荷载下非饱和和结构性土的界面模型[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(6): 817 - 823.(HUANG Maosong, YANG Chao, CUI Yujun. Elasto-plastic bounding surface model for unsaturated soils under cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(6): 817 - 823.(in Chinese))
- [14] 姚仰平, 万征, 秦振华. 动力UH模型及其有限元应用[J]. 力学学报, 2012, 44(1): 132 - 139.(YAO Yangping, WAN Zheng, QIN Zhenhua. Dynamic UH model for sands and its application in FEM[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(1): 132 - 139.(in Chinese))
- [15] 王磊, 朱斌, 来向华. 砂土循环累积变形规律与显式计算模型研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(11): 2024 - 2029.(WANG Lei, ZHU Bin, LAI Xianghua. Cyclic accumulative deformation of sand and its explicit model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(11): 2024 - 2029.(in Chinese))
- [16] 李吴刚, 杨庆, 刘文化, 等. 基于SFG模型的非饱和膨胀土本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(8): 1449 - 1453.(LI Wugang, YANG Qing, LIU Wenhua, et al. Constitutive model for unsaturated expansive clays based on SFG model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(8): 1449 - 1453.(in Chinese))
- [17] 宋世雄, 张建民. 砂土流变行为的热力学本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(增1): 129 - 133.(SONG Shixiong, ZHANG

- Jianmin. Thermodynamic constitutive model for rheological behavior of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(Supp.1): 129 - 133.(in Chinese)
- [18] 孔令明, 姚仰平. 考虑时间效应的 K_0 各向异性 UH 模型[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(5): 812 - 820.(KONG Lingming, YAO Yangping. K_0 -anisotropic UH model considering time effects[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(5): 812 - 820.(in Chinese))
- [19] 杜修力, 马超, 路德春. 正常固结黏土的三维弹塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(2): 235 - 241.(DU Xiuli, MA Chao, LU Dechun. Three-dimensional elastoplastic constitutive model for normal consolidated clays[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(2): 235 - 241.(in Chinese))
- [20] 朱晟, 魏匡民, 林道通. 筑坝土石料的统一广义塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(8): 1 394 - 1 399.(ZHU Sheng, WEI Kuangmin, LIN Daotong. Generalized plasticity model for soil and coarse-grained dam materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(8): 1 394 - 1 399.(in Chinese))
- [21] 李校兵, 谷川, 蔡袁强. 循环偏应力和循环围压耦合应力路径下饱和软黏土动模量衰减规律研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(7): 1 218 - 1 226.(LI Xiaobing, GU Chuan, CAI Yuanqiang. Dynamic modulus degradation for soft saturated clay under coupling stress paths of cyclic deviatoric stress and cyclic confining pressure[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(7): 1 218 - 1 226.(in Chinese))
- [22] TAIEBAT M, DAFALIAS Y F. SANISAND: Simple anisotropic and plasticity model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2008, 32(8): 915 - 948.
- [23] DAFALIAS Y F, TAIEBAT M, PAPANITRIOU A G. SANICLAY: simple anisotropic clay plasticity model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, 30(12): 1 231 - 1 257.
- [24] 陈生水, 沈珠江, 酆能惠. 复杂应力路径下无粘性土的弹塑性数值模拟[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(2): 20 - 28.(CHEN Shengshui, SHEN Zhujiang, LI Nenghui. A elastoplastic model for cohesionless soils under complex stress paths[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(2): 20 - 28.(in Chinese))
- [25] 刘元雪, 郑颖人, 陈正汉. 含主应力轴旋转的土体一般应力 - 应变关系[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(5): 407 - 413.(LIU Yuanxue, ZHENG Yingren, CHEN Zhenghan. The general stress strain relation of soils involving the rotation of principal stress axes[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(5): 407 - 413.(in Chinese))
- [26] 董彤, 刘元雪, 郑颖人. 考虑主应力轴旋转的土体本构关系研究进展[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(4): 327 - 335.(DONG Tong, LIU Yuanxue, ZHENG Yingren. Research progress of the soil constitutive relation considering principal stress axes rotation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(4): 327 - 335.(in Chinese))
- [27] MATSUOKA H, SAKAKIBARA K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation[J]. Soils and Foundations, 1987, 27(4): 73 - 88.
- [28] HASHIGUCHI K, TSUTSUMI S. Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect[J]. International Journal of Plasticity, 2001, 17(1): 117 - 145.
- [29] KHOJASTEHPOUR M, HASHIGUCHI K. Axisymmetric bifurcation analysis in soils by the tangential-subloading surface model[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2004, 52(10): 2 235 - 2 262.
- [30] KHOJASTEHPOUR M, MURAKAMI Y, HASHIGUCHI K. Antisymmetric bifurcation in a circular cylinder with tangential plasticity[J]. Mechanics of Materials, 2006, 38(11): 1 061 - 1 071.
- [31] KHOJASTEHPOUR M, HASHIGUCHI K. The plane strain bifurcation analysis of soils by the tangential-subloading surface model[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(20): 5 541 - 5 563.
- [32] HASHIGUCHI K. General description of elastoplastic deformation/sliding phenomena of solids in high accuracy and numerical efficiency: subloading surface[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2013, 20(4): 361 - 417.
- [33] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principle stresses[C]// Proceedings of JSCE, [S. l.]: [s. n.], 1974, 232: 59 - 70.
- [34] ROWE P W. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact[C]// Proceedings of Royal Society A., [S. l.]: [s. n.], 1962, 269(1339): 500 - 527.
- [35] LEE K L, SEED H B. Drained strength characteristics of sands[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division 1967, 93(SM6): 117 - 141.
- [36] LEE K L, FARHOMAND I. Compressibility and crushing of granular soil in anisotropic triaxial compression[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, 4(1): 68 - 86
- [37] LADE P V, BOPP P A. Relative density effects on drained sand behavior at high pressures. Soils and Foundations, 2005, 45(1): 1 - 13.