

# 南京航空航天大学

## 2016 年硕士研究生招生考试初试试题 ( A 卷 )

科目代码: 601

满分: 150 分

科目名称: 数学分析

注意: 认真阅读答题纸上的注意事项; 所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

1. 求极限(每题 6 分, 共 12 分)

(1) 设  $a, b > 0, x_1 > 0, x_2 = a + \frac{b}{x_1}, \dots, x_n = a + \frac{b}{x_{n-1}}, n = 1, 2, \dots$ , 求证  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

(2) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}.$$

2. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续,  $0 < \alpha < 1$  是常数, 且对任一  $x \in [a, b]$ , 存在  $y \in [a, b]$  使得  $|f(y)| < \alpha |f(x)|$ . 证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  中有零点. (13 分)

3. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的二阶导函数,  $f(0) = f(1) = 0$ , 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) \neq 0$ . 证明

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4. \quad (13 \text{ 分})$$

4. 设  $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ , 建立一个计算  $I_n$  的递推公式. (12 分)

5. 计算积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ . (12 分)

6. 讨论反常积分  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$  的敛散性. (13 分)

7. 证明级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$  条件收敛. (13 分)

8. 设二元函数  $f(x, y)$  具有连续偏导数, 满足  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 4$ , 函数  $g(u, v)$  是  $f(x, y)$  通过引入变量代换

$$\begin{cases} x = uv \\ y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$
 得到, 试求满足  $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2$  中的常数  $a, b$ . (12分)

9. (12分) 给定方程  $x^2 + y + \sin(x^2 y) = 0$ ,

(1) 在原点的邻域内, 此方程是否可以唯一确定连续函数  $y = y(x)$  使得  $y(0) = 0$ ? 说明理由.

(2) 若存在上述函数  $y = y(x)$ , 试求其导函数, 并判断在原点邻域内的单调性与极值.

(3) 在原点的邻域内, 此方程是否可以唯一确定连续函数  $x = x(y)$  使得  $x(0) = 0$ ? 说明理由.

10. 设函数  $f(x, y)$  以及它的二阶偏导数在全平面连续, 且

$$f(0, 0) = 0, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq 2|x - y|, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq 2|x - y|,$$

(借助曲线积分) 证明  $|f(5, 4)| \leq 1$ . (13分)

11. 设函数  $f(u)$  在  $u = 0$  处可导,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = a$ , 令  $D: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2tz$ , 求

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^5} \iiint_D f(x^2 + y^2 + z^2) dV. \quad (12分)$$

12. 求积分  $\oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$ , 其中  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx$  与柱面

$x^2 + y^2 = 2ax$  ( $b > a > 0$ ) 的交线 ( $z \geq 0$ ),  $L$  的方向规定为沿  $L$  的方向运动时, 从  $z$  轴正向往下看, 曲线  $L$  所

围球面部分总在左边. (13分)