南京理工大学

2013 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：616　科目名称：数学分析　满分：150 分

注意：(1) 认真阅读答题纸上的注意事项；(2) 所有答案必须写在答题纸上，写在本试题或草稿纸上无效；(3) 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一. 填空（本题共 45 分）

1. (5 分) 设函数 $f(x)=x^2, 0\le x<1$，而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x,\quad -\infty<x<+\infty$$

其中，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n=1,2,\cdots$，则 $S(-\frac{1}{2})=$_____.

2. (8 分) 设函数 $u=x+y+z$ 及球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$. 则球面 S 上的点 $P(x,y,z)$ 的坐标分别是 $x=$_____，$y=$_____，$z=$_____时，能使 u 在 P 沿 S 的外法线方向的方向导数为最大。

3. (8 分) 设函数 $y=x^3\sin x$，求 $y^{(6)}(0)$.

4. (8 分) 设曲线 C 是菱形边界 $|x|+|y|=1$ 的正向，则

$$\oint_C \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\_\_\_\_\_$$

5. (8 分) 设 $f(x)$ 是满足下列方程的可微函数：$\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$，

则 $f(x)=$__________

6. (8 分) 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 9\}$，则

$$\iint_D |x^2+y^2-4|dxdy=\_\_\_\_\_$$

二. (10 分)

(1) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

(2) 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

三. (10 分)　给定两个正数 a_1 与 b_1，其中 $a_1>b_1$，令

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, n=2,3,\cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的极限都存在且相等。

四. (10 分)　证明：$f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

五. (10 分)　证明：数列 $\{x_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 的任一子列都存在其收敛子列。

六. (10 分) 若函数 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积，试证明闵可夫斯基(Minkowski)不等式：

$$\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx\}^{\frac{1}{2}}\le[\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}+[\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}$$

七. (10 分)　设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任何阶导数，f 的 n 阶导数记为 F_n，即 $F_n=f^{(n)}$，假设在任何有限区间内 F_n 一致收敛到函数 φ.

试证：对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有　$\varphi(x)=Ce^x$，其中，C 为常数

八. (15 分)　证明：若函数 f 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 且当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 是比 $\frac{1}{x}$ 高阶的无穷小。

九. (15 分)　证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛，这里 $[\sqrt{n}]$ 表示 $\sqrt{n}$ 的整数部分，.

十. (15 分)　证明公式

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{r}=\frac{1}{2}\oint_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS,$$

其中，S 是包围 V 的曲面，$\vec{n}$ 是 S 的外法线方向，

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \vec{r}=(x,y,z)$$