南京理工大学

2013年春博士学位研究生入学考试试题

科目代码：2259　　　科目名称：泛函分析与概率论　　满分：100分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(15 分) 设 X 是赋范空间。求证：X 是完备的，当且仅当对任意的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

二、(10 分) 设 X 是一个无穷维 Banach 空间，证明：若 A 是从 X 到 X 的紧算子，则 A 没有有界逆。

三、(15 分) 设 X 是赋范空间，f 是 X 上的线性泛函，证明 f 是有界的，当且仅当 f 的零空间 $\mathrm{N}(f)=\{x\in X: f(x)=0\}$ 是闭子空间。

四 (10 分) 求证赋范线性空间 $(X,\|.\|)$ 中范数是弱下半连续的，即若序列 (x_n) 弱收到 x_0，则：$\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|\geq\|x_0\|$。

五、(10 分) 设 f 为可测空间 (Ω,F) 上的非负可测函数，试证明：存在递增的非负简单函数序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f.

六、(15 分) 设 ξ_k $(k=1,2,\cdots)$ 为相互独立同分布的随机序列。且

$$a=E(\xi_k),\sigma^2=D(\xi_k),(k=1,2,\cdots),$$

试用勒维——克拉美定理证明：$\{\xi_k\}_{k\geq1}$ 服从中心极限定理。

七 (25 分) 设 f 和 g 为概率空间 (Ω,F,P) 上的随机变量，并假定：

$$\int_\Omega|f(\omega)|P(d\omega)<\infty,\int_\Omega|g(\omega)|P(d\omega)<\infty。$$

试用积分的定义证明：

$$\int_\Omega\big(f(\omega)+g(\omega)\big)P(d\omega)=\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)+\int_\Omega g(\omega)P(d\omega)。$$