

南京航空航天大学

2017 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 601

满分: 150 分

科目名称: 数学分析

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

1. (13 分) 计算下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 - 1} \right]$$

2. (12 分) 写出点 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点的定义, 并证明: 区间 (a, b) 上的单调函数的间断点必是第一类的.

3. (13 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可微, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. 证明: 存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

4. (12 分) 已知 $y = \arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

5. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) \leq 0, x \in [0, 1]$, 证明:

$$\int_0^1 f(x^2) dx \leq f\left(\frac{1}{3}\right).$$

6. (13 分) (1) 写出反常积分 $I = \int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx$, ($a > 0$) 在变换 $x = \frac{a^2}{t}$ 下的形式;

(2) 计算反常积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx (a > 0)$.

7. (13 分) 若 $f_n(x) = xn^k e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 求 k 的取值范围.

8. (12 分) 设二元函数 $f(x, y) = |x - y|g(x, y)$, 其中 $g(x, y)$ 连续且 $g(0, 0) = 0$.

(1) 求 $f_x'(0, 0)$ 和 $f_y'(0, 0)$;

(2) 判断 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的可微性.

9. (13分) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 1)$ 的邻域内存在一阶连续偏导数, 且 $f(0, 1) = 0, f'_y(0, 1) \neq 0$,

令 $g(x, y) = f\left(x, \int_0^y \sin t dt\right)$.

(1) 根据隐函数定理验证方程 $g(x, y) = 0$ 在点 $(0, \frac{\pi}{2})$ 的邻域内能确定一单值函数 $y = \varphi(x)$;

(2) 求 $\varphi'(0)$.

10. (12分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dV$, 其中 Ω 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 围成的有界区域.

11. (12分) 设函数 $f(x, y)$ 在 xoy 平面上二阶连续可微, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线.

(1) 证明曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$ 与路径无关;

(2) 若 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (ax + 1)e^{ax-y}$, 且 $f(0, y) = ey$, 求 $I(t)$ 的最小值.

12. (13分) 设第二型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{e^{\sqrt{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中 Σ 为由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1, z = 2$ 所围成立体表面的外侧.

(1) 分析该曲面积分能否用 Gauss 公式计算;

(2) 求 I 的值.