

# 基于热力学理论的水泥石热 - 力耦合本构模型 和有限元分析

王 浩<sup>1</sup>, 张志超<sup>1, 2</sup>, 程晓辉<sup>1</sup>

(1. 清华大学 土木工程系, 北京 100084; 2. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:** 深层地热井中, 水泥环在温度作用下的塑性和应力非线性对井下系统的封固性有重要影响。基于热力学理论, 建立适用于水泥石的黏弹塑性热 - 力耦合本构模型。模型考虑了密度、弹性应变与温度之间的耦合关系以及弹性应变与耗散方程的耦合关系, 能够模拟水泥石在等温试验中的诸多重要力学特性, 以及在非等温试验中随温度升高而产生的强度和刚度衰减。在本构模型基础上开发瞬态传热的平面有限元程序, 对中石油肯尼亚地热开发项目的套管 - 水泥环 - 围岩系统进行了温度和应力分析。研究发现, 系统会在套管 - 水泥环界面和水泥环 - 围岩界面处产生应力集中, 且界面处的温度附加应力在单调的温度荷载作用下呈现非单调性发展; 能量耗散的考虑对于准确模拟水泥石的滞回特性和塑性变形发展十分重要。

**关键词:** 地下工程; 水泥石; 热 - 力耦合; 热力学本构模型; 深层地热井; 有限元分析

**中图分类号:** TU 94

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2018)01 - 0067 - 10

## A thermal-mechanical constitutive model for cement rock based on thermodynamics and its finite element application

WANG Hao<sup>1</sup>, ZHANG Zhichao<sup>1, 2</sup>, CHENG Xiaohui<sup>1</sup>

(1. *Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*; 2. *School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China*)

**Abstract:** The plasticity and stress non-linearity of cement sheaths under thermal loadings have significant influence on the integrity logging of deep geothermal well systems. A thermal-mechanical elasto-viscoplastic model based on the thermodynamics is established with the density and the elastic strains coupled with the temperature and the dissipative equations coupled with the elastic strains. The model is able to simulate many important properties of cement stones in isothermal tests and the degradation of strength and stiffness with the rising of temperature in non-isothermal tests. A finite element code with transient heat conduction is developed based on the constitutive model. The code is then applied for the temperature and stress analysis of a CNPC geothermal well in Kenya. Results show that the thermal-induced mechanical stresses, especially at interfaces, are non-monotonic during the monotonic thermal loading. The consideration of energy dissipation is essential for the reasonable estimations of hysteresis and plastic deformations of cement stones.

**Key words:** underground engineering; cement stone; thermal-mechanical coupling; thermodynamic constitutive model; deep geothermal well; finite element analysis

**收稿日期:** 2017 - 06 - 19; **修回日期:** 2017 - 09 - 10

**基金项目:** 欧盟第七框架“玛丽居里”国际学者交流计划(FR7 - IRSES)(612665)

Supported by the 7th Framework Programme for Research of European Commission: International Research Staff Exchange Scheme(Grant No. 612665)

**作者简介:** 王 浩(1989 -), 男, 2012年毕业于清华大学土木工程系, 现为博士研究生, 主要从事岩土体本构模型及有限元模拟方面的研究工作。E-mail: wh-12@mails.tsinghua.edu.cn. 通讯作者: 程晓辉(1971 -), 男, 博士, 现任副教授、博士生导师。E-mail: chengxh@tsinghua.edu.cn

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2017.0766

## 1 引言

在深层地热开采过程中,由套管、水泥环、围岩组成的井下系统的封固性,对于地热井全生命周期运行的稳定性和安全性十分重要<sup>[1]</sup>。随着井深的增加,地温和蒸汽温度不断升高,最高可超过 200 °C。于是高温就成为封固性问题的关键难点:一方面,整个系统受套管内压和围岩外压的高压作用,高温条件下,水泥环会随温度升高而产生强度衰减;另一方面,套管、水泥环和围岩都有可能因为高温产生的热应力而损坏、破裂。因此,研究固井材料的热-力耦合性质,对于合理预测地热井封固性有着至关重要的作用。

之前针对油气井套管-水泥环-围岩系统的研究多为单应力场分析<sup>[2-11]</sup>,而多场耦合研究则相对较少,例如,赵新波等<sup>[12]</sup>应用弹性力学理论建立了系统的热-力耦合稳态解析解,文良凡等<sup>[13]</sup>采用理想弹塑性理论推导了水泥环热-力耦合的变形表达式。目前还没有针对套管-水泥环-围岩系统的复杂热-力耦合本构模型研究或瞬态传热有限元研究。

以往,针对水泥石使用阶段性质的热-力耦合模型研究很少。为构建热-力本构模型,应力场本构方程的选取十分关键,采用理想弹性或理想弹塑性模型具有较大的局限性。首先,水泥石的应力-应变关系呈现较强的非线性特征,线弹性模型将低估或高估(取决于弹性模量的取值)水泥石的变形。其次,经典弹塑性模型规定,材料在卸载和达到后继屈服面之前的重加载都是完全弹性的,这使其无法合理模拟水泥石在应力循环加载时的刚度退化和变形累积行为。S. Ghabezloo 等<sup>[14]</sup>的试验结果表明,水泥石在循环应力作用下表现出明显的应力-应变滞回关系和应变累积。目前已有学者应用较为细致的本构模型对水泥石进行应力场分析,例如,张研和邵建富<sup>[15]</sup>引入剪切塑性破坏面和孔隙塑性屈服面的双屈服面塑性损伤模型,模拟水泥石的脆性/塑性特征;M. Thiercelin 等<sup>[16]</sup>采用临界状态土力学模型,对水泥石的收缩变形进行预测分析,S. Ghabezloo 等<sup>[14]</sup>采用多孔介质力学理论,对水泥石在排水和不排水三轴压缩路径下的变形和孔压进行模拟预测,结果表明多孔介质理论对于水泥石材料具有适用性。

近年来,热力学理论在固体材料本构领域的应用逐渐成为热点。Y. M. Jiang 和 M. Liu<sup>[17]</sup>基于非平

衡态热力学理论,引入在颗粒气体和颗粒流体领域被广泛采用的“颗粒熵”概念和“弹性弛豫”耗散机制,建立了适用于单相固体材料的流体动力学理论(granular solid hydrodynamics, GSH)。GSH 理论不采用传统弹塑性理论中的屈服函数、流动法则、塑性势函数、加卸载条件等机制,而引入热力学理论中的自由能函数和耗散方程,对材料的宏观能量耗散过程进行统一描述,自然满足热力学守恒方程,物理意义较为明确。

以 GSH 理论为基础,张志超等<sup>[18-23]</sup>建立了一种多孔介质的多场耦合本构理论框架(简称 TTS),可统一考虑材料的非线性变形、蠕变、刚度退化、循环加载响应、强度各向异性和温度耦合效应等行为。注意到热力学理论的普适性以及水泥石材料的多孔介质属性<sup>[24]</sup>,该理论的诸多概念和方法都可以应用于对水泥石本构模型的研究。基于这种理论考虑,本文采用 TTS 理论框架,建立水泥石的热-力耦合本构模型,进行相应的模型特性分析和点源模拟;并基于本构模型开发瞬态传热平面有限元程序,对中国石油集团肯尼亚地热井开采项目进行有限元模拟,重点分析套管-水泥环界面和水泥环-围岩界面在温度应力作用下的应力-应变行为。

## 2 水泥石热-力耦合热力学本构模型

目前,学术界就温度对岩土体的影响是弹性的、弹塑性的还是黏弹塑性(率相关)的,依旧有很大争议。温度会引起体胀,从而对本构模型弹性部分产生影响,是比较公认的。而温度究竟会直接导致塑性应变(热弹-热塑性, thermoelastic-thermoplastic),抑或是由温度应力通过弹性方程间接影响塑性应变(热弹-塑性, thermoelastic-plastic),还在广泛的学术讨论中。基于 TTS 框架建立水泥石本构模型是一个新的尝试。因此,本着科学、严谨的角度,本文暂时仅考虑温度对本构弹性方程的直接影响。由于 TTS 中耗散能和弹性能具有耦合关系,温度也会对耗散方程产生影响,但不是显式的(类似于弹塑性理论中的热弹-塑性机制),这将在下文公式中体现。

根据 TTS 理论框架<sup>[18, 20]</sup>,本文选取的热力学状态变量为:干密度  $\rho_d$ 、弹性应变张量  $\epsilon_{ij}^e$ 、温度  $T$  和颗粒温度  $T_g$ 。热-力耦合的水泥石本构模型由超弹性本构关系和耗散方程组成,其中耗散方程包括反映耗散定量机制的颗粒熵增方程和反映弹性与耗散的转化机制的弹性弛豫方程。具体方程如下。

### 2.1 超弹性本构关系

根据热力学理论，在小应变的连续力学框架下，自由能函数有 4 种定义方式<sup>[25]</sup>，即内能函数  $u = u(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, s)$ ，赫尔姆霍茨自由能函数  $f = f(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, T)$ ，热焓函数  $h = h(\boldsymbol{\sigma}_{ij}, s)$  和吉布斯自由能函数  $g = g(\boldsymbol{\sigma}_{ij}, T)$ 。其中， $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$  和  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$  分别为应变和应力二阶张量，二者为热力学共轭量； $T$  和  $s$  分别为温度和熵，二者为热力学共轭量。4 种自由能函数形式可以通过 Legendre 变换进行转化。本文基于非线性弹性赫兹接触理论<sup>[17-26]</sup>，采用赫尔姆霍茨自由能函数形式对弹性势能函数进行定义，具体形式如下：

$$\omega_e = 0.4B(\varepsilon_v^e + c)^\theta (\varepsilon_s^e)^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{\varepsilon_v^e} + \frac{\varepsilon_v^e + c}{(\theta + 1)(\varepsilon_v^e)^2} \right] \beta_T \Delta T \right\} + B\xi(\varepsilon_v^e + c)^\theta (\varepsilon_s^e)^2 \quad (1)$$

其中，

$$B = B_0 \exp(B_1 \rho_d)$$

式中： $\varepsilon_v^e$  和  $\varepsilon_s^e = \sqrt{\mathbf{e}_{ij}^e \mathbf{e}_{ij}^e}$  分别为弹性体积应变和偏弹性应变张量第二不变量； $\mathbf{e}_{ij}^e$  为偏弹性应变张量； $B_0$  和  $B_1$  为刚度参数； $c$  为黏性参数； $\theta$  为控制剪切模量的围压相关性的参数； $\xi$  为反映材料弹性剪切性质的参数； $\beta_T$  为水泥石弹性体积热膨胀系数； $\Delta T = T - T_0$ ，为相对参考温度  $T_0$  的温度变化量。显然，等式右端第一项给出了热 - 弹耦合的定量关系，并且可知密度、弹性应变和温度 3 个状态变量相互耦合。

在早期经典文献中，J. D. Goddard<sup>[26]</sup>认为，对于特定条件下的非线性弹性赫兹接触，能量与应变的 2.5 次方成正比(相当于式(1)中  $\theta = 0.5$ )。Y. M. Jiang 和 M. Liu<sup>[17]</sup>沿用 J. D. Goddard<sup>[26]</sup>的研究思路，建立了弹性势能函数的一般形式，并为使求导后的有效应力表达式系数得到简化，在弹性势能函数等式右端第一项加入 0.4 这一系数。本文所研究的水泥石材料不在 J. D. Goddard<sup>[26]</sup>定义的“特定条件”下，因此上述能量与应变的关系不再成立。但本文遵循 GSH 理论框架，对系数 0.4 以及弹性势能函数的一般形式进行保留，在其基础上给出了针对不同材料的具体函数形式以及热 - 弹耦合方式。

根据超弹性本构关系，有效应力可表示为

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} &= \frac{\partial \omega_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e} = B(\varepsilon_v^e + c)^{\theta-1} [0.4(\theta + 2)(\varepsilon_s^e)^2 + 0.8c\varepsilon_v^e + \theta\xi(\varepsilon_s^e)^2] \boldsymbol{\delta}_{ij} + K\beta_T \Delta T \boldsymbol{\delta}_{ij} + 2B\xi(\varepsilon_v^e + c)^\theta \mathbf{e}_{ij}^e \\ K &= 0.4B(\varepsilon_v^e + c)^{\theta-1} [(\theta + 2)\varepsilon_v^e + 2c] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

可见，只要  $\theta > 0$ ，有效应力与弹性应变的关系即具有非线性；当  $\theta = 0$ ，有效应力表达式退化为线性。陈志辉等<sup>[19, 22]</sup>研究表明，有效应力表达式的非线性是 TTS 模型的重要属性，为模型模拟诸多材料属性和应力路径的能力提供了帮助。由于参数  $c$  的存在，式(2)具有一定的三轴抗拉性能<sup>[19]</sup>，符合实际水泥石性质。

### 2.2 考虑能量耗散的三轴条件下的本构方程形式

相比于经典弹塑性模型，TTS 理论不采用屈服面和流动法则等假定，而采用热力学中的颗粒温度和弹性弛豫等物理机制对能量耗散进行统一描述。关于这一部分的理论解释可参考张志超等<sup>[18-23]</sup>的研究。这里，为下文的点源模拟，给出考虑能量耗散的三轴条件下完整本构方程形式。

(1) 质量连续方程：

$$\frac{d}{dt} \rho_d - \rho_d \frac{d}{dt} \varepsilon_v = 0 \quad (3)$$

式中： $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$ ，为总体积应变。

(2) 有效应力方程：

$$\left. \begin{aligned} p' &\equiv \pi_{kk} / 3 = K(\varepsilon_v^e + \beta_T \Delta T) + \theta B\xi(\varepsilon_v^e + c)^{\theta-1} (\varepsilon_s^e)^2 \\ q &\equiv \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{6} B\xi(\varepsilon_{kk}^e + c)^\theta \varepsilon_d^e \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中，

$$\varepsilon_v^e = \varepsilon_1^e + 2\varepsilon_3^e, \quad \varepsilon_d^e = (2/3)^{1/2} (\varepsilon_1^e - \varepsilon_3^e)$$

(3) 耗散定量机制——颗粒熵增方程：

$$\frac{d}{dt} T_g = \frac{m_4}{\rho_d} \left[ m_2 m_3 \left( \frac{d}{dt} \varepsilon_v \right)^2 + m_2 \left( \frac{d}{dt} \varepsilon_d \right)^2 - T_g \right] \quad (5)$$

式中： $T_g$  为颗粒温度，是能量耗散剧烈程度的量化表征； $\varepsilon_d = (2/3)^{1/2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$ ； $m_2$ ， $m_3$  和  $m_4$  均为迁移系数。

(4) 弹性与耗散的转换机制——弹性弛豫方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \varepsilon_v^e &= \frac{d}{dt} \varepsilon_v - 3m_1 (T_g)^{0.5} \varepsilon_v^e \\ \frac{d}{dt} \varepsilon_d^e &= \frac{d}{dt} \varepsilon_d - (T_g)^{0.5} \varepsilon_d^e \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中： $m_1$  为迁移系数。实际上 2 个等式右端的第二项分别代表能量耗散导致的不可恢复体积应变率和不可恢复剪切应变率。

由三轴条件下的模型方程可以看出，温度作为状态变量仅显式存在于有效应力方程中，且仅显式作用于平均有效应力。式(5)所代表的能量耗散公式中没有显式的温度存在。但注意到式(6)中不可恢复应变率是弹性应变的函数，而温度能够直接影响弹

性应变的发展，因此温度应力的改变能够间接影响不可恢复变形的发展以及能量的耗散速率。

综上，热力学模型对于弹性应变与有效应力、弹性应变与不可恢复应变的关系设定，类似于基于弹塑性理论的经典岩土体热 - 力耦合模型(例如 ACMEG-T<sup>[27]</sup>)，不同之处在于：(1) 热力学模型的非线性弹性表达较为复杂，能够反映的材料性质也更广泛；(2) 由于温度对不可恢复变形的直接影响尚待证实，因此热 - 力学模型实际上是采用“热弹 - 塑性”假定，不考虑类似弹塑性模型里针对热塑性进行的温度相关的屈服面修正<sup>[27]</sup>；(3) 由于热力学模型的耗散方程对材料本质有很好的描述，选取的迁移系数物理意义也较为明确，因此不需要额外的诸如针对应力路径的特殊修正。

### 3 热力学本构模型的点源分析与验证

为验证模型的可靠性，本节将对水泥石的常规等温三轴剪切，以及砂岩的不排水非等温压缩进行模拟。所用参数的标定方法已在张志超等<sup>[18-21]</sup>中有详细介绍，此处不再赘述。点源模拟采用的参数以及其主要影响的模型性质如表 1 所示，其中  $\rho_{d0}$  为模拟设置的初始干密度。需要说明的是，水泥石和砂岩的  $B_0$  取值相差较大，而  $B_1$  取值相差较小，这是因为标定过程中有效应力对  $B_0$  的敏感性远低于  $B_1$ ，具体可参考式(1)中  $B_0$  与  $B_1$  的数学关系。

表 1 本构模型参数定义及模拟取值

Table 1 Definition of parameters of the constitutive model and their values for simulation

参数	单位	主要影响性质	水泥石模拟取值	砂岩模拟取值
$B_0$	Pa	弹性模量	35.57	2 000
$B_1$	$m^3/kg$	弹性模量	0.013 5	0.015
$\theta$	-	弹性模量	1.5	1.5
$c$	-	黏聚力	0.004 34	0.015
$\xi$	-	剪胀性	0.366	0.83
$m_1$	-	弹性弛豫	1.283	10
$m_2$	$kg/m^3/min$	颗粒熵增	$4.2 \times 10^5$	1
$m_3$	-	颗粒熵增	0.5	50
$m_4$	$kg/m^3/min$	双熵转化	5 000	100
$\beta_1$	-	体膨胀性	$5 \times 10^{-6}$	$2.8 \times 10^{-5}$
$\rho_{d0}$	$kg/m^3$	初始干密度	2 116	2 350

为校核模型应力场方程，笔者进行了水泥石常规等温三轴试验。试验采用 5 和 10 MPa 两种围压，

过程中控制加、卸载速率为 200 N/s，进行了多组试验，试验控制温度恒定为 20 °C。编制本构模型的点源程序与较为理想的一组试验进行对比，结果如图 1 所示。模型较好地模拟了水泥石在不同围压作用下的应力 - 应变发展规律。2 种围压下，水泥石均在达到峰值强度后迅速发生软化。高围压对应的峰值强度和残余强度均高于低围压情况。模型之所以能够反映围压相关的应力 - 应变性质，是因为本构关系中考虑了密度的影响。在固结过程结束时，高围压所对应的密度和弹性体积应变均较大，因此在后续加载中，初始刚度以及峰值应力均高于低围压情况下的。根据模拟出的密度变化发现，水泥石在峰值应力前表现出明显的剪胀性，而在峰值应力后则表现出明显的剪缩性。可见，模型具备模拟水泥石在不同围压作用下的硬化、软化以及加卸载的能力。图 1 中模拟结果与试验结果在刚度、峰值强度和残余强度上存在一定的偏差，可能是由标定试验的精确性以及常规三轴试验曲线的随机性造成的。

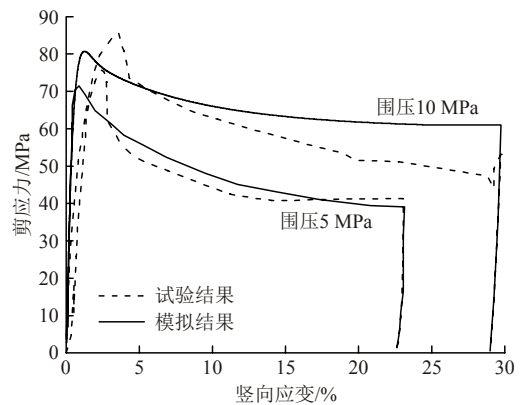


图 1 水泥石常规三轴试验模拟

Fig.1 Simulation of conventional triaxial compression tests on cement rocks

在图 1 应力场模拟结果基础上，进一步对水泥石本构模型的非等温性质进行探究。采用与图 1 相同的参数取值，模拟中水泥石首先等向固结至围压 10 MPa，之后保持围压不变，以 0.1 °C/min 进行排水升温，直至温度升至 100 °C 时，控制温度不变，进行排水剪切。相同围压条件下，水泥石在 100 °C 和 20 °C 时的排水剪切应力 - 应变关系对比如图 2 所示。在高温条件下，水泥石出现明显的刚度衰减和强度衰减，这与实际的情况相一致<sup>[28]</sup>。在排水升温过程中，由于有效应力不变以及耗散过程(式(5)，(6))的加剧，导致模型的状态变量中密度和弹性体积应变都相应减小。因此 100 °C 时排水剪切的初始密度和初始弹性势能要远低于 20 °C 时排水剪切的初

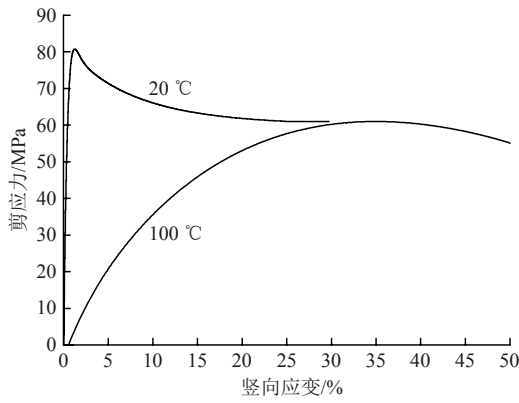


图 2 水泥石在不同温度下的常规三轴实验模拟

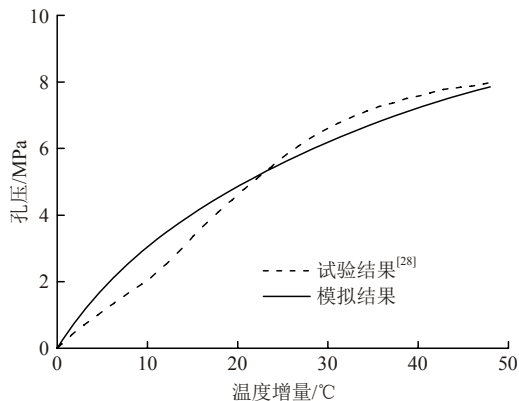
Fig.2 Simulation of conventional triaxial compression tests on cement rocks under different temperatures

始值。这就解释了模型为什么能够模拟水泥石升温后的刚度衰减和强度衰减。并且由于初始密度的差异，图 2 中 20 °C 排水剪切时先剪胀再剪缩，而 100 °C 排水剪切时只发生剪缩。

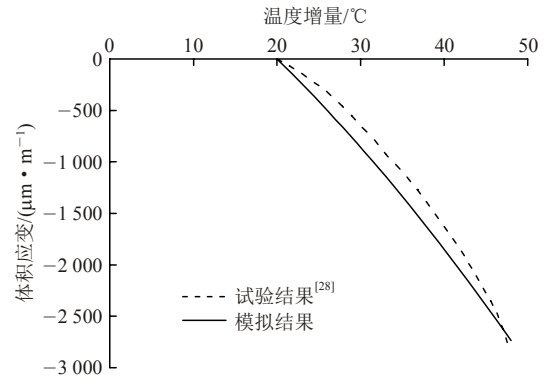
目前针对水泥石非等温加载的试验相对较少，而岩石的非等温试验数据则相对更容易获得。因此为验证模型的热 - 力耦合性质，对砂岩的不排水升温试验<sup>[29]</sup>进行了模拟，结果如图 3 所示。试验<sup>[29]</sup>设定初始温度为 20 °C，首先将砂岩在等温条件下等向固结至围压为 10 MPa，然后保持围压不变，按 0.2 °C/min 的速率不排水升温至 70 °C，在此期间测试砂岩内部孔压变化以及体积应变变化。为进行孔压模拟，需在上述方程外添加孔压方程，其形式为

$$\dot{u} = \frac{1}{\varphi c_w + 1 / K_T} \left[ \varphi (\beta_w^T - \beta_T) \dot{T} - \frac{G_T}{K_T} \dot{\varepsilon}_s^e + 3m_1 (T_g)^a \varepsilon_v^e \right] \quad (7)$$

式中： $\dot{u}$  为孔压变化率， $\varphi$  为孔隙率， $c_w$  为等向应力条件下水的压缩系数， $\beta_w^T$  为水的切线体积热膨



(a) 孔压与温度增量关系



(b) 体积应变与温度增量关系

图 3 砂岩不排水升温实验模拟

Fig.3 Undrained heating test of sandstone

胀系数， $K_T$  和  $G_T$  为切线体积弹性模量和切线剪切弹性模量， $3m_1 (T_g)^a \varepsilon_v^e$  为式(6)中的不可恢复体积应变率。

式(7)具体的推导过程如下：

当存在温度、孔压和平均有效应力的改变，饱和和多孔介质材料的固相和液相体积变化率分别为

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_s &= -V_s \beta_s^T \dot{T} + V_s c_s \dot{u} + V_s c'_s \dot{p}' \\ \dot{V}_w &= -V_w \beta_w^T \dot{T} + V_w c_w \dot{u} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中： $u$ ， $p'$  分别为孔压和平均有效应力； $V_s$ ， $V_w$  分别为固相和液相的体积； $c_s$  和  $c_w$  分别为固相和液相在静水压力作用下的压缩系数； $c'_s$  为固相在集中力作用下的压缩系数； $\beta_s^T$  和  $\beta_w^T$  分别为固相和液相的切线体积热膨胀系数，满足：

$$\beta_\alpha^T = \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial T} \Delta T + \beta_\alpha \quad (\alpha = s, w) \quad (9)$$

式中： $\beta_\alpha$  ( $\alpha = s, w$ ) 为材料本征热膨胀系数，并且  $\beta_s = \beta_T$ 。

在不排水条件下，固相和液相的体积变化之和应等于骨架的总体积变化。因此，结合式(4)和(6)，忽略固相体积膨胀系数随温度的改变，并考虑到  $p' = \partial \omega_e / \partial \varepsilon_v^e$ ，可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_s + \dot{V}_w &= V \left( \frac{\dot{p}'}{K_T} - \frac{G_T}{K_T} \dot{\varepsilon}_s^e - \beta_T \dot{T} + 3m_1 (T_g)^a \varepsilon_v^e \right) \\ K_T &= \frac{\partial^2 \omega_e}{\partial \varepsilon_v^e \partial \varepsilon_v^e} + \frac{\partial^2 \omega_e}{\partial \varepsilon_v^e \partial \rho_d} \rho_d \\ G_T &= \frac{\partial^2 \omega_e}{\partial \varepsilon_v^e \partial \varepsilon_s^e} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中： $V$  为骨架总体积。式(10)中上式等号右边前三项分别表示平均有效应力、偏弹性应变和温度引起的可恢复体积变形，最后一项表示不可恢复体积变形。结合式(8)~(10)，并采用通常的假定  $c_s = c'_s$ ，

孔压变化率计算公式即为式(7)。

参考 J. K. Mitchell 和 K. Soga<sup>[30]</sup>给出的经典孔压方程:

$$\dot{u} = \frac{[\varphi(\beta_w^T - \beta_s^T)\dot{T} + \beta_{st}\dot{T}]}{m_v} \quad (11)$$

式中:  $\beta_s^T$  为固相的切线体积热膨胀系数,  $\beta_{st}$  为考虑温度升高导致土体塑性重分布的影响系数,  $m_v$  为压缩系数。相比经典孔压方程, 式(7)通过  $3m_1(T_g)^a \varepsilon_v^c$  项显式表示了能量耗散对孔压的影响(即  $\beta_{st}$ ), 并增加了剪应变率对孔压的影响。

根据 S. Ghabezllo 和 J. Sulem<sup>[29]</sup>, 模拟采用的参数取值为  $\varphi = 16\%$ ,  $c_w = 4.4 \times 10^{-10}$ ,  $\beta_w^T$  随温度变化的拟合方程为

$$\beta_w^T = -6.1481 \times 10^{-6} + 1.1204 \times 10^{-5}T - 2.9439 \times 10^{-8}T^2 \quad (12)$$

如图 3(a)所示, 模型能够很好地模拟孔压在上升阶段的非线性特征。这主要是由于模型对砂岩的压缩性(与弹性应变、密度、温度相关)、水的体积热膨胀系数(与温度相关)以及对孔压公式中耗散量机制的考虑。S. Ghabezllo 和 J. Sulem<sup>[29]</sup>介绍, 由于试验初始阶段应变计发生故障, 20 °C~40 °C 阶段的体积应变没有测量。因此, 在图 3(b)中, 试验的体积应变从 40 °C 开始。模型也能够较好地模拟体积应变的发展趋势。

由以上点源模拟可知, 基于 TTS 框架的热力学本构模型, 能够一定程度上模拟水泥石和砂岩等多孔介质材料的应力场性质和热-力耦合性质。在下文中将应用模型编制瞬态传热平面有限元程序, 对深层地热井的套管-水泥环-围岩系统进行热-力耦合分析。需要指出的是, 当前版本模型是将 TTS 框架应用于水泥石材料的初次尝试, 其方程形式并不是完善的。例如, 模型无法模拟水泥石在排水试验有效应力不变的情况下, 体积模量随围压升高(或者说孔压升高)而下降的特殊性质<sup>[14]</sup>。为解决这一问题, 需要在弹性势能函数(式(1))中添加孔压相关的参数或状态变量, 这将在以后的研究中进行具体讨论。由于下文的有限元模拟为完全排水状态, 因此不存在此类问题。

### 4 套管-水泥环-围岩系统有限元模拟

针对中石油肯尼亚地热井开采项目的套管-水泥环-围岩系统, 基于 Matlab 开发瞬态传热平面有

限元程序, 对地热井的 1/4 横断面进行模拟, 计算简图如图 4 所示。地热井由套管和水泥环组成, 外部为围岩。所关心的截面为地热井 1 200 m 深度处。相关资料显示, 该深度处的套管内压为 14.2 MPa, 围岩外压为 12 MPa, 系统内部各尺寸:  $r_1 = 110.26$  mm,  $r_2 = 122.25$  mm,  $r_3 = 182.56$  mm,  $r_4 = 540$  mm。套管、水泥环和围岩的初始温度为 50 °C。测试显示, 正常工况下, 在该深度处, 管内温度可达到 200 °C 左右。因此, 本研究模拟温度边界(套管内边界)在 4 d 时间内从 50 °C 线性上升到 200 °C 时系统的整体受力情况。M. Torsater 等<sup>[11, 31]</sup>提出, 对于地热井系统, 应力集中会出现在各材料界面处, 引发破坏或分离。这一论述在此次模拟结果中得到了证实。因此, 本文重点给出界面一(套管与水泥环界面)与界面二(水泥环与围岩界面)在升温过程中的应力-应变发展。

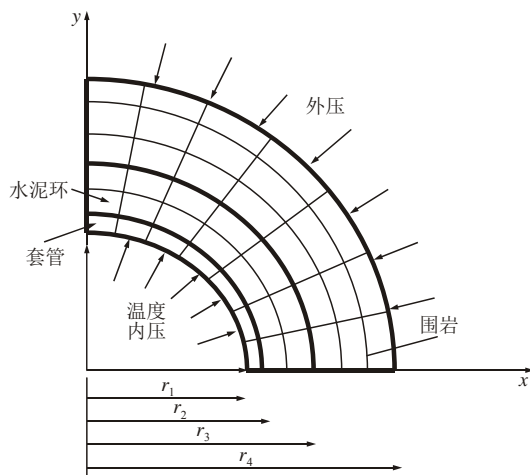


图 4 套管-水泥环-围岩系统有限元计算简图  
Fig.4 Domain and boundary conditions for finite element analysis on the system of steel casing-cement sheath-surrounding rock

套管和围岩采用线弹性材料假定, 对其受热的力学行为采用热弹性假定。设  $\theta = 0$ , 并且不考虑耗散方程, 可以将热力学模型退化为线弹性模型。具体地, 弹性参数  $B_0$  和  $\xi$  与弹性模量和泊松比的显式关系如下:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{5}{12} \frac{E}{(1-2\nu)} \\ \xi &= \frac{E}{2B_0(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中:  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比。

套管弹性模量为 206 GPa, 泊松比为 0.3; 围岩弹性模量为 20 GPa, 泊松比为 0.24。因此, 套管和围岩对应的模型参数如表 2 所示。

表 2 有限元模拟材料参数取值

Table 2 Parameters for the materials in finite element analysis

材料	$B_0$ /Pa	$B_1$ /( $m^3 \cdot kg^{-1}$ )	$\theta$	$c$	$\xi$	$m_1$	$m_2$ /( $kg \cdot m^{-3} \cdot min^{-1}$ )	$m_3$	$m_4$ /( $kg \cdot m^{-3} \cdot min^{-1}$ )	$\beta_T$
套管	$2.1 \times 10^{11}$	0	0.0	0.020 0	0.369	0	0	0	0	$5 \times 10^{-6}$
围岩	$1.6 \times 10^{10}$	0	0.0	0.020 0	0.503	0	0	0	0	$5 \times 10^{-6}$
水泥石 - 标准	35.576	0.013 5	1.5	0.003 5	1.830	0.279	$2.6 \times 10^6$	0.5	5 000	$5 \times 10^{-6}$
水泥石 - RS	35.576	0.013 5	1.5	0.003 5	0.430	0.279	$2.6 \times 10^6$	0.5	5 000	$5 \times 10^{-6}$
水泥石 - NLE	35.576	0.013 5	1.5	0.003 5	0.430	0	0	0	0	$5 \times 10^{-6}$
水泥石 - LE	35.576	0	0.0	0.003 5	0.430	0	0	0	0	$5 \times 10^{-6}$

水泥石为此次模拟重点分析材料。水泥石会因长期高温产生强度衰退，由上文的点源模拟可知，模型具备模拟这一特性的能力。采用的水泥石在 50 °C 时的单轴抗压强度为 41 MPa，而在 200 °C 时的单轴抗压强度下降至 5 MPa 左右。根据资料提供的试验数据进行标定，水泥石(命名为“水泥石 - 标准”)的参数取值如表 2 所示。为进行对照分析，另取 3 组水泥石参数并分别进行有限元模拟。第一组在“水泥石 - 标准”参数基础上进行强度折减，取单轴抗压强度为 5 MPa，命名为“水泥石 - RS”；第二组在“水泥石 - RS”参数基础上，忽略能量耗散，仅考虑应力场的非线性弹性部分，命名为“水泥石 - NLE”；第三组同样不考虑能量耗散，将应力场退化为线弹性，命名为“水泥石 - LE”。各组参数对应的单轴应力 - 单轴应变曲线如图 5 所示。

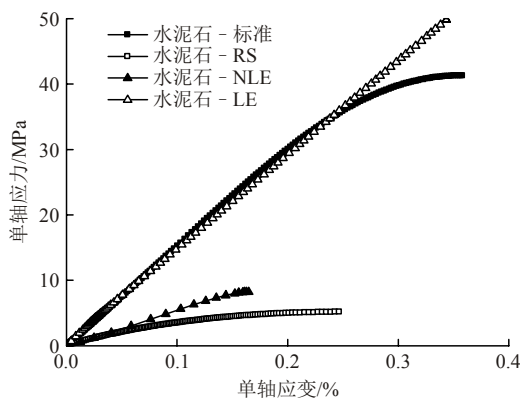


图 5 各水泥石模型对应的单轴应力 - 应变曲线

Fig.5 Axial stress-strain curves for different cement rock models under uniaxial compression

在证明了不影响宏观应力发展规律的前提下，为简便起见，套管、水泥环和围岩的初始干密度均设为  $2\ 116\ kg/m^3$ ，且温度相关参数取相同数值，设体膨胀系数为  $5 \times 10^{-6}$ ，比热容为  $4\ 200\ J/kg/^\circ C$ ，热传导系数为  $191\ W/m/K$ 。施加温度荷载后，地热井

沿径向的温度分布如图 6 所示。由于采用瞬时加载，考虑了温度扩散的时间效应，故温度从地热井中心沿径向向外围非线性递减。当套管内壁达到 200 °C 时，围岩外边界温度达到 145 °C。

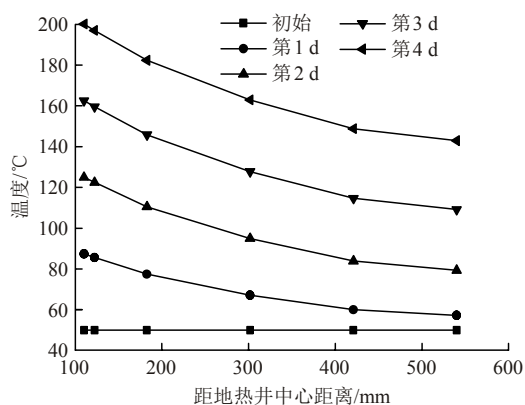


图 6 地热井沿径向的温度分布

Fig.6 Radial temperature distribution of geothermal well

图 7 和 8 分别为界面一与界面二的径向应力和环向应力随时间的变化曲线。当水泥石模型采用“水泥石 - 标准”、“水泥石 - RS”或“水泥石 - NLE”时，随着温度的单调升高，径向应力和环向应力的的发展却表现出非单调性。对这一现象的合理解释如下：

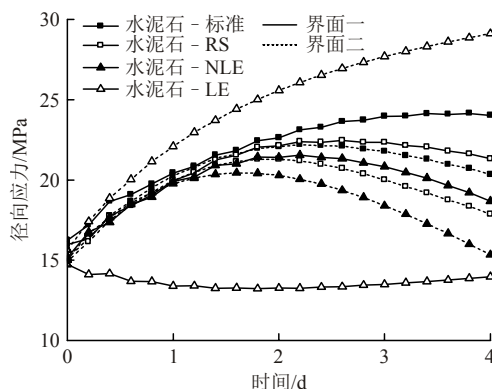


图 7 2 个界面的径向应力随时间变化

Fig.7 Radial stress variations with time for two interfaces

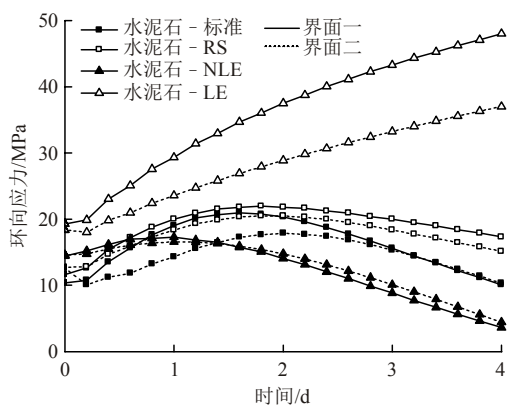


图8 2个界面的环向应力随时间变化  
Fig.8 Hoop stress variations with time for two interfaces

初始状态,在内部和外部围压作用下,水泥石处于双向压缩状态,径向和环向应变均为正。而随着温度的升高,水泥石发生体积膨胀,径向和环向应变从正逐渐变为负,这在应变云图中有清晰的体现。在这一升温过程中,模型主要有3个状态变量影响应力的发展——弹性应变和密度的减小使应力减小,而温度的上升使应力增大(见式(2))。在升温初段,由于边界的约束作用,弹性应变和密度变化产生的影响弱于温度升高的影响,因此径向和环向应力均逐渐增大。而在升温后段,总应变逐渐转变为负,弹性应变和密度减小产生的影响强于温度升高的影响,因此径向和环向应力均逐渐减小。

“水泥石 - 标准”、“水泥石 - RS”或“水泥石 - NLE”模型之所以能够反映应力发展的非单调性,是因为3种模型的本构方程中,弹性部分具有非线性这一共同特征,有效应力公式中的弹性体积模量等重要参数能够合理表现弹性应变、密度与温度的相对发展关系。相比之下,“水泥石 - LE”由于是线弹性的,无法反映应力的非单调性。并且观察图7可以发现,前3种模型计算的径向应力在界面一处均大于界面二处,而线弹性模型则正好相反,且界面一与界面二的应力幅值差距显著。

黄祥峰等<sup>[6-7]</sup>研究表明,水泥环的刚度会影响套管 - 水泥环 - 围岩系统内部的应力分布。由图5可知,“水泥石 - 标准”和“水泥石 - LE”在单轴加载时刚度几乎相同;“水泥石 - RS”和“水泥石 - NLE”虽与“水泥石 - 标准”刚度差别明显,但三者在此图7,8中的规律相似。因此这里4种模型径向和环向应力发展规律的差异并不是刚度差别造成的,而的确是由线弹性与非线性弹性的区别造成的。这一结论对于工程的数值分析方法研究有重要意义,反映出如果采用线弹性模型进行模拟,会显著

高估或低估实际的应力水平,且可能错误估计最不利荷载的作用区域,给工程设计带来一定的风险。

定义径向应变与环向应变之差为偏应变,径向应力与环向应力之差为偏应力,进而可得到偏应力与偏应变的发展关系,如图9所示。之所以没有在图中给出“水泥石 - LE”的结果,是因为线弹性模型显著高估或低估了偏应力的发展。

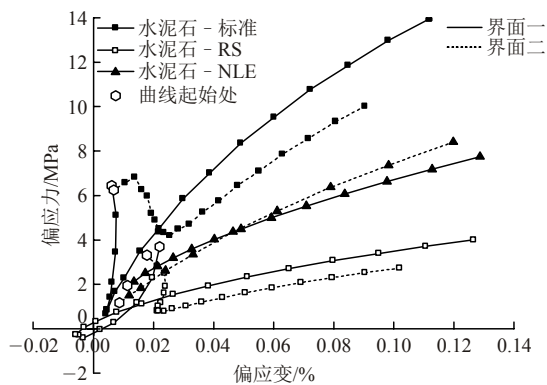


图9 2个界面的偏应力随偏应变变化  
Fig.9 Deviatoric stress variations with deviatoric strains for two interfaces

由图9可知,“水泥石 - 标准”和“水泥石 - RS”的偏应力发展具有非单调性,为先减小再增大,而“水泥石 - NLE”的偏应力则单调增加。这表明,考虑能量耗散(或者说塑性)对于偏应力的准确模拟很重要。相比之下,非线性弹性模型对偏应力发展的预测则不够准确。另外,虽然“水泥石 - 标准”和“水泥石 - RS”的偏应力均没有达到抗剪强度,但采用相对高强度的水泥石不会产生偏应力的滞回环,而采用相对低强度水泥石则会产生明显的滞回环。滞回环关乎材料内部塑性的累积和微裂缝的开展,以及界面处材料之间的贴合关系,对系统的封固性有重要影响。因此,此次项目采用的水泥石能够达到强度要求,在升温过程中不存在明显塑性积累。但一旦在运行过程中经历温度循环等因素的影响导致强度衰减,则有可能引发开裂,须注意防范。

## 5 结 论

本文基于热力学理论框架,初步构建了适用于水泥石等多孔介质固体材料的黏弹塑性热 - 力耦合本构模型。首先对模型的弹性势能函数和耗散方程进行了介绍;之后应用点源程序对水泥石和砂岩的等温、非等温三轴试验进行模拟;最后基于Matlab平台编制瞬态传热平面有限元程序,对中石油肯尼亚深层地热井项目的套管 - 水泥环 - 围岩系统受温



度荷载的影响进行分析。主要结论如下:

(1) 因为合理考虑了密度、弹性应变与温度之间的耦合关系, 以及弹性应变与能量耗散之间的耦合关系, 模型能够较好模拟水泥石在等温试验中因围压不同导致的强度差异, 以及在非等温试验中因升温导致的强度和刚度衰减。结合本文提出的考虑耗散影响的孔压公式, 模型能够较好模拟砂岩在三轴不排水升温试验中的孔压和体积应变发展。

(2) 由于应力非线性性质的影响, 模型的有限元模拟能够反映套管 - 水泥环 - 围岩系统中界面处温度应力随单调温升而表现出的非单调性。采用线弹性模型会明显高估或低估系统中应力的发展, 且可能错误估计最不利荷载的作用区域。

(3) 模型的耗散方程能够较好地模拟套管 - 水泥环 - 围岩系统中界面处偏应力在升温过程中的非单调性以及滞回特性。项目采用的水泥石性能上能够满足地热井在一次升温过程中的封固性要求, 但须谨防温度循环引发的水泥石强度衰减。

## 参考文献(References):

- [1] 吴铭德, 乔文孝, 魏 涛, 等. 油气井封固性测井述评[J]. 测井技术, 2016, 40(1): 1 - 11.(WU Mingde, QIAO Wenxiao, WEI Tao, et al. Review on well integrity logging[J]. Well Logging Technology, 2016, 40(1): 1 - 11.(in Chinese))
- [2] 邓金根, 王康平, 黄荣樽, 等. 油井套管、水泥环组合体抗非均匀围岩外载的强度特性[J]. 岩石力学与工程学报, 1994, 13(2): 160 - 167.(DENG Jingen, WANG Kangping, HUANG Rongzun, et al. Collapse resistance of oil well casing-cement mantle combination subjected to non-uniform loading by rock creep[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1994, 13(2): 160 - 167.(in Chinese))
- [3] 殷有泉, 陈朝伟, 李平恩. 套管 - 水泥环 - 地层应力分布的理论解[J]. 力学学报, 2006, 38(06): 835 - 842.(YIN Youquan, CHEN Zhaowei, LI Ping'en. Theoretical solutions of stress distribution in casing-cement and stratum system[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006, 38(6): 835 - 842.(in Chinese))
- [4] 王宴宾, 高德利, 房 军. 套管 - 水泥环 - 地层多层组合系统受力特性分析[J]. 应用力学学报, 2014, 31(3): 387 - 393.(WANG Yanbin, GAO Deli, FANG Jun. Mechanical characteristics analysis of casing-cement ring-formation multilayer composite system[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2014, 31(3): 387 - 393.(in Chinese))
- [5] 王耀锋, 李军强, 杨小辉. 套管 - 水泥环 - 地层系统应力分布规律研究[J]. 石油钻探技术, 2008, 36(5): 7 - 11.(WANG Yaofeng, LI Junqiang, YANG Xiaohui. Stress distribution in casing-cement-stratum[J]. Petroleum Drilling Techniques, 2008, 36(5): 7 - 11.(in Chinese))
- [6] 黄祥峰, 张光明, 曹 畅, 等. 水泥环性质对套管强度影响的有限元分析[J]. 天然气与石油, 2012, 30(4): 50 - 53.(HUANG Xiangfeng, ZHANG Guangming, CAO Chang, et al. Finite element analysis of the influence of cement ring properties on casing strength[J]. Natural Gas and Oil, 2012, 30(4): 50 - 53.(in Chinese))
- [7] 赵俊平, 崔海清. 套管水泥环组合抗挤强度模型及其弹性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(14): 2 467 - 2 470.(ZHAO Junping, CUI Haiqing. Model and elasticity analysis of collapse strength of casing-cement mantle[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(14): 2 467 - 2 470.(in Chinese))
- [8] 卢亚锋, 郑友志, 余朝毅, 等. 基于水泥石实验数据的水泥环力学完整性分析[J]. 天然气工业, 2013, 33(5): 77 - 81.(LU Yafeng, ZHENG Youzhi, SHE Chaoyi, et al. Analysis of cement-sheath mechanical integrity based on the experiment data of cement paste[J]. Natural Gas Industry, 2013, 33(5): 77 - 81.(in Chinese))
- [9] 陈朝伟, 蔡永恩. 套管 - 地层系统套管载荷的弹塑性理论分析[J]. 石油勘探与开发, 2009, 36(2): 242 - 246.(CHEN Chaowei, CAI Yongen. Study on casing load in a casing-stratum system by elastoplastic theory[J]. Petroleum Exploration and Development, 2009, 36(2): 242 - 246.(in Chinese))
- [10] 李 军, 陈 勉, 柳贡慧, 等. 套管、水泥环及井壁围岩组合体的弹塑性分析[J]. 石油学报, 2005, 26(6): 99 - 103.(LI Jun, CHEN Mian, LIU Gonghui, et al. Elastic plastic analysis of casing concrete sheath-rock combination[J]. Acta Petrolei Sinica, 2005, 26(6): 99 - 103.(in Chinese))
- [11] TORSATER M, TODOROVIC J, LAVROV A. Structure and debonding at cement-steel and cement-rock interfaces: Effect of geometry and materials[J]. Construction and Building Materials, 2015, 96: 164 - 171.
- [12] 赵新波, 韩生超, 杨秀娟, 等. 热固耦合作用下的套管 - 水泥环 - 地层多层组合系统应力分析[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2017, 48(3): 837 - 843.(ZHAO Xinbo, HAN Shengchao, YANG Xiujuan, et al. Mechanical characteristics analysis of casing-cement sheath-formation multilayer composite system with thermo-structural coupling effects[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2017, 48(3): 837 - 843.(in Chinese))
- [13] 文良凡, 高志强, 滕新兴, 等. 套管与水泥环内压热弹塑性分析[J]. 钻采工艺, 2011, 34(6): 68 - 70.(WEN Fanliang, GAO Zhiqiang, TENG Xinxing, et al. Thermal elasto-plastic analysis of casing and cement ring under inner pressure[J]. Drilling and Production Technology, 2011, 34(6): 68 - 70.(in Chinese))
- [14] GHABEZLOO S, SULEM J, GUEDON S, et al. Poromechanical behaviour of hardened cement paste under isotropic loading[J].

- Cement and Concrete Research, 2008, 38(12): 1 424 - 1 437.
- [15] 张 研, 邵建富. 水泥基材料在宽围压范围的本构模型[J]. 固体力学学报, 2011, 32(3): 293 - 298.(ZHANG Yan, SHAO Jianfu. A constitutive law of cement-based material at large range of confining pressure state[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2011, 32(3): 293 - 298.(in Chinese))
- [16] THIERCELIN M, BAUMGARTE C, GUILLOT D. A soil mechanics approach to predict cement sheath behavior[C]// Proceedings of the 1998 SPR/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering. [S. l.]: EUROCK, Trondheim, 1998: 329 - 335.
- [17] JIANG Y M, LIU M. Granular solid hydrodynamics[J]. Granular Matter, 2009, 11(3): 139 - 156.
- [18] 张志超, 程晓辉. 饱和土非等温固结和不排水剪切的热力学本构模型[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(7): 1 297 - 1 306.(ZHANG Zhichao, CHENG Xiaohui. Thermodynamic constitutive model for non-isothermal consolidation and undrained shear behaviors of saturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(7): 1 297 - 1 306.(in Chinese))
- [19] 陈志辉, 程晓辉. 饱和土体固结压缩和蠕变的热力学本构理论及模型分析[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(3): 489 - 498.(CHEN Zhihui, CHENG Xiaohui. Thermodynamic constitutive theory and analysis of consolidation compression and creep of saturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(3): 489 - 498.(in Chinese))
- [20] ZHANG Z, CHENG X. A thermo-mechanical coupled constitutive model for clay based on extended granular solid hydrodynamics[J]. Computers and Geotechnics, 2016, 80(SI): 373 - 382.
- [21] ZHANG Z, CHENG X. A thermodynamic constitutive model for undrained monotonic and cyclic shear behavior of saturated soils[J]. Acta Geotechnica, 2015, 10(6): 781 - 796.
- [22] WANG H, CHENG X. A Thermodynamic Model for Rate-Dependent Geomaterials[C]// Advances in Laboratory Testing and Modelling of Soils and Shales. Cham: Springer, 2017: 471 - 478.
- [23] WANG H, CHEN Z, CHENG X. A quasi-static and hysteretic constitutive model for sand based on granular solid hydrodynamics: a triaxial compression example[C]// Proceedings of the TC105 ISSMGE International Symposium on Geomechanics from Micro to Macro. IS-Cambridge: [s. n.], 2014: 639 - 644.
- [24] ULM F J, CONSTSANTINIDES G, HEUKAMP F H. Is concrete a poromechanics materials? —a multiscale investigation of poroelastic properties[J]. Materials and Structures, 2004, 37(1): 43 - 58.
- [25] HOULSBY G T, PUZRIN A M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials[J]. International Journal of Plasticity, 2000, 16(9): 1 017 - 1 047.
- [26] GODDARD J D. Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1990, 430(1878): 105 - 131.
- [27] LALOUI L, FRANÇOIS B. ACMEG-T: Soil thermoplasticity model[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2009, 135(9): 932 - 944.
- [28] 杨远光, 陈大钧. 高温水热条件下水泥石强度衰退的研究[J]. 石油钻采工艺, 1992, 14(5): 33 - 39.(YANG Yuanguang, CHEN Dajun. Research of cement strength decline at high-temperature hydrothermal condition[J]. Oil Drilling and Production Technology, 1992, 14(5): 33 - 39.(in Chinese))
- [29] GHABEZLLO S, SULEM J. Effect of the volume of the drainage system on the measurement of undrained thermo-poro-elastic parameters[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2010, 47(1): 60 - 68.
- [30] MITCHELL J K, SOGA K. Fundamentals of Soil Behavior[M]. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005: 359 - 361.
- [31] GRAY K E, PODNOS E, BECKER E. Finite element studies of near-wellbore region during cementing operations: part I[J]. Spe Drilling and Completion, 2013, 24(1): 127 - 136.