

考虑土体多参数非均质性及各向异性锚固 边坡抗震稳定性极限分析

夏元友, 陈春舒

(武汉理工大学 土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430070)

摘要: 针对土体多参数非均质性及各向异性条件下的锚固边坡抗震稳定性分析, 提出水平条分极限分析方法。通过水平条分将滑坡体离散为若干水平条分并视各条分内部为均质体, 采用拆分法计算各水平条分的能量功率并求和代入能量方程中; 根据条分各极角间的几何关系分析, 选用 2 个极角参数作为寻优变量并采用遗传算法编程实现计算过程。基于算例分析, 假设土体参数的非均质性为沿深度方向线性分布, 在验证本文方法可靠性的基础上, 分析边坡土体非均质性与各向异性参数变化对其抗震稳定性的影响规律。案例分析结果表明: 对于屈服加速度系数而言, 土体黏聚力非均质性的影响敏感性较低, 采用边坡高度范围土体黏聚力的平均值来代替其非均质分布进行简化计算是可行的, 而内摩擦角和土体重度非均质性的影响表现为显著的递增特征, 敏感性高, 采用边坡高度范围平均值代替计算结果相差较大; 土体各向异性系数对屈服加速度系数的影响表现为显著的递减特征。研究成果可为实际工程中非均质各向异性边坡的抗震稳定性评估提供参考。

关键词: 边坡工程; 预应力锚索; 极限分析上限法; 非均质各向异性; 屈服加速度系数

中图分类号: P 64

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2018)04 - 0829 - 09

Seismic stability limit analysis of reinforced soil slopes with prestressed cables considering inhomogeneity and anisotropy of multiple parameters

XIA Yuanyou, CHEN Chunshu

(School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei 430070, China)

Abstract: A limit analysis based on the horizontal slice method was proposed for the seismic stability of soil slopes reinforced with prestressed cables considering the inhomogeneity and anisotropy of multiple parameters. In this method, the sliding soil mass was divided into several horizontal slices, and the soil inside each slice was treated as a homogeneous part. The energy power of each horizontal slice was calculated based on the partitioning method and was substituted into the energy equation. According to the geometrical relationship among the polar angles of the slices, two polar angles were chosen to be the optimization variables in the computational program based on genetic algorithm theory. This method was applied in a case study, where the inhomogeneity was simplified as the linear distribution along depth. The reliability of this method was verified, and the influence of the parameters concerning the inhomogeneity and anisotropy on the seismic stability were analyzed. The results of analysis indicated that the yield acceleration factor of the slope is not sensitive to the inhomogeneity of cohesive force, it is therefore feasible to use the average value of cohesive force. The inhomogeneity of internal friction angle and unit

收稿日期: 2017 - 10 - 09; **修回日期:** 2017 - 11 - 25

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51374163)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 51374163)

作者简介: 夏元友(1965 -), 男, 1986 年毕业于武汉工业大学采矿工程专业, 现任教授、博士生导师, 主要从事岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail: xiayy1965@126.com。通讯作者: 陈春舒(1990 -), 现为博士研究生。E-mail: ccsjxx@126.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.1283

weight have remarkable effects on the yield acceleration factor. The anisotropy coefficient influences greatly the yield acceleration factor.

Key words: slope engineering; prestressed cable; upper-bound theorem of limit analysis; inhomogeneity and anisotropy; yield acceleration factor

1 引言

极限分析理论最早由 D. C. Drucker 等^[1]提出, 其分为上限定理和下限定理, 随后由 W. F. Chen 等^[2-4]将极限分析上限法基本理论运用于大量边坡实例中而得到广泛推广。在该理论中, 均质边坡滑动面为经典的对数螺旋线形, 其也被 R. L. Michalowski^[5]认为是均质边坡各种失稳机制中最不利的一种, 被大量应用于各类均质边坡的稳定性分析中^[6-8]。然而, 实际工程中的边坡往往并非单一均质土层, 一方面, 自然地质条件下边坡土体常常涉及到多土层, 另一方面, 即使在同一土层下, 由于长时间的自然堆积作用以及人工开挖填筑等作用的影响, 边坡土体容重及强度参数通常并非均匀分布, 而是表现为一定的非均质性, 且多表现为沿深度方向发生变化。对于多土层边坡的稳定性已有部分成果, 例如王根龙等^[9-11]均对其提出了不同的计算方法。这些研究侧重于含有若干土层的边坡, 但并未考虑同一土层土体内部的非均质规律, 不能涵盖广义的非均质性特点。在考虑同土层非均质方面, 方薇等^[12]将变异因子应用于极限分析上限法中, 研究了黏聚力沿深度线性变化时的边坡稳定性并给出了相关计算公式, 但对土体重度和内摩擦角的非均质性未予考虑。此外, J. Hwang 等^[13]还证实了沉积土体会表现出一定的各向异性特征, 且该特征会随着各种施工扰动而日益突出。

目前, 也有部分研究成果在分析边坡稳定性的过程中兼顾考虑了各向异性和非均质性^[14-15], 但往往为计算便捷不考虑内摩擦角的非均质性而假定内摩擦角为定值, 这是因为内摩擦角与对数螺旋线滑面的形状直接相关, 其非均质性会导致滑面形状的复杂性从而影响极限分析的计算过程。该假设虽然简化了计算, 却忽略了实际土体中因内摩擦角的非均质性带来的影响。

围绕上述问题, 本文结合预应力锚索加固边坡, 考虑边坡土体多参数非均质性以及各向异性情况, 提出其稳定性分析的极限分析水平条分方法, 给出

其计算原理公式和寻优计算过程, 并结合算例验证本文提出方法的有效性, 分析边坡土体非均质性与各向异性参数变化对其抗震稳定性的影响规律。研究成果可为考虑土体多参数非均质性以及各向异性边坡的稳定性分析和评估提供参考。

2 边坡土体的非均质性和各向异性

2.1 非均质性

本文考虑黏聚力 c 、内摩擦角 φ 以及土体重度 γ 在整个边坡体内的非均质性。由于工程实践中边坡土体参数的非均质性受到很多因素的影响, 其分布规律较为复杂, 图 1 总结了黏聚力 c 沿深度方向的 5 种常见非均匀分布模式^[11]。本文在模型分析中选用图 1(c) 中的分布模式, 将黏聚力 c 、内摩擦角 φ 以及土体重度的非均质性均考虑为线性变化。

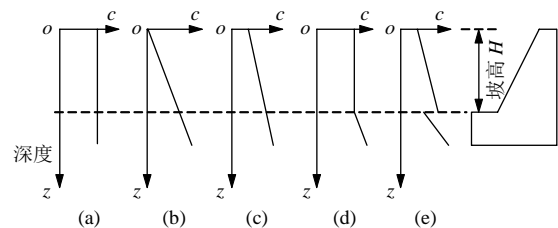
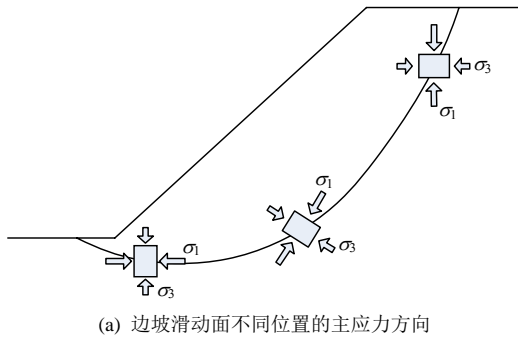


图 1 黏聚力沿深度方向的 5 种分布模式^[11]

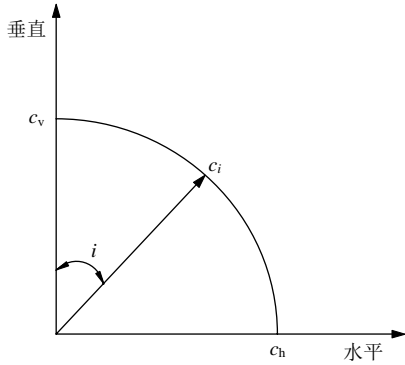
Fig.1 Five distribution modes of cohesion along depth^[11]

2.2 各向异性

对于强度参数的各向异性, A. A. Al-Karni 和 M. A. Al-Shamrani^[16]指出土体内摩擦角的各向异性效应较小而可以忽略, 故本文中考虑各向异性的参数只包括黏聚力 c 。由于工程实践中真实的各向异性表现形式十分复杂, 其规律不便于定量研究, 本文选取研究最广泛的一种形式^[14-15]: 即在考虑黏聚力各向异性条件下, 土体某处的实际黏聚力大小与该处主应力方向有着直接的关系。对于滑动面上的黏聚力, 可将滑动面上某点处的切线方向视为破坏面方向, 根据破坏面方向来确定主应力的方向, 如图 2(a)所示, 由此可知滑动面不同位置上的实际黏聚力随着主应力方向的变化而变化, 如图 2(b)^[15]所示。



(a) 边坡滑动面不同位置的主应力方向



(b) 黏聚力随最大主应力方向的变化^[15]

图 2 黏聚力各向异性示意图

Fig.2 Sketch of anisotropy of cohesion

图 2(b)中的横、纵截距分别为 c_h 和 c_v ，分别对应为最大主应力 σ_1 为水平方向和垂直方向时的黏聚力。W. F. Chen^[2]从 c_h 和 c_v 出发，将图 2(b)中黏聚力和最大主应力方向的关系概括为计算公式如下：

$$c_i = c_h + (c_v - c_h) \cos^2 i \quad (1)$$

式中： i 为垂直方向与最大主应力 σ_1 方向所呈的夹角，如图 2(b)所示； c_i 则为该处夹角 i 所对应主应力方向时的实际黏聚力。

另外，为了量化各项异性效应，W. F. Chen 等^[14-15]一般将各向异性系数 k_{hv} 定义为 c_h 和 c_v 的比值，即： $k_{hv} = c_h / c_v$ 。根据 k_{hv} 的定义，可将式(1)写成如下形式：

$$c_i = c_h \left(1 + \frac{1 - k_{hv} \cos^2 i}{k_{hv}} \right) \quad (2)$$

同时根据该定义可知： $k_{hv} = 1$ 时，可得 $c_i = c_h = c_v$ ，即表示边坡为各向同性；而当 $k_{hv} > 1$ 时，最大主应力为水平方向时的黏聚力 c_h 较大；反之，当 $k_{hv} < 1$ 时，最大主应力为垂直方向时的黏聚力 c_v 较大。

3 非均质性及各向异性土体锚固边坡抗震稳定性极限分析方法

由于计算中考虑了黏聚力 c 的各项异性，所以

不同主应力方向所对应的黏聚力的非均质性参数也不同。在本文计算模型中给出的非均质参数 c 是对于 c_h 而言的，即最大主应力为水平方向时的黏聚力 c_h 沿着深度方向呈线性变化，同时，定义黏聚力 c_h 的变化斜率 k_c 为深度方向每增加 1 m 深度所产生的黏聚力 c_h 的变化值。根据异性系数 k_{hv} 的定义，则有 $c_v = c_h / k_{hv}$ ，若 k_{hv} 恒定，则表明此时黏聚力 c_v 与 c_h 成比例关系，则黏聚力 c_v 也呈现沿深度方向的线性非均质变化，且其变化斜率为 k_c / k_{hv} 。同理，内摩擦角变化斜率 k_ϕ 和重度变化斜率 k_γ 分别为每增加 1 m 深度所产生的内摩擦角和重度变化值。

根据上述条件，假设边坡滑动面经过坡脚，采用预应力锚索加固的非均质各向异性边坡模型如图 3 所示，边坡土体的黏聚力、内摩擦角和重度均沿深度方向线性变化，其中线性增大时变化斜率为正值，反之为负值。通常来说，考虑到土体的长期堆积压实效应， k_c 和 k_γ 一般为正值，而 k_ϕ 则不确定，在某些土体中当黏聚力 c 和内摩擦角 ϕ 之间存在一定负相关性时，则 k_ϕ 表现为负值^[17]。

图 3 中坡顶高度 H 处土体的黏聚力、内摩擦角和重度分别为 c_0 、 ϕ_0 和 γ_0 ，边坡中部高度 $H/2$ 处的参数分别为 c_{mid} 、 ϕ_{mid} 和 γ_{mid} 。为简化分析与计算，边坡采用一根锚索(多根可同样叠加处理)进行加固，其锚头位置位于坡面高度 h 位置处，锚索倾角为 β 。另外，为保证锚索加固效应的成立，认为锚索自由段足以跨越边坡所有潜在滑动面。这里需要强调的是，图 3 中土体参数的非均质线性分布并不是必须的，在这只是以土体参数最为常见的变化规律为例来进行分析，实际上后面的推导过程适用于其沿深度方向的任意分布形式。

由于考虑了内摩擦角的非均质性，这将导致图 3 中模型的极限分析过程较内摩擦角为定值时复杂很多，这是因为内摩擦角 ϕ 的非均质性会使边坡的滑动面形状不再为标准的对数螺旋线，实际的滑动面曲线与 ϕ 的变化有关，无法使用解析式对其进行描述。这会导致以下问题：一方面，由于滑动面形状未知，滑动面上某处的切线方向(即破坏面方向)也未知，导致滑面上的主应力方向未知，故滑动面上考虑各向异性的黏聚力 c_i 无法准确求解，滑动面上的能耗散功率也无法准确求解；另一方面，滑动面形状未知将会导致滑坡体范围内的滑坡体质量无法准确求解，这将进一步影响重力、地震惯性力等体积力做功功率的计算。也因此，常规的代数解析法将无法实现图 3 模型中的极限分析过程。

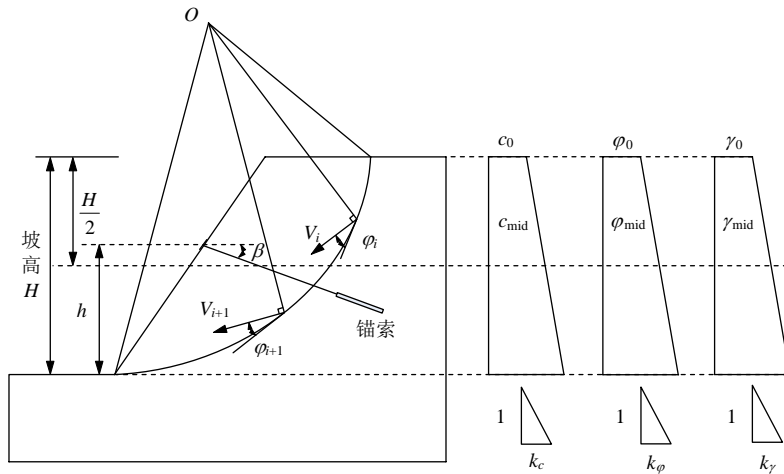


图3 非均质性和各向异性边坡计算模型

Fig.3 Slope model for calculation with inhomogeneity and anisotropy

3.1 水平条分法

为解决土体内摩擦角的非均质性会导致无法使用解析解进行极限分析问题，本文采用水平条分法求解该问题的数值解，其方法示意图见图4，其具体步骤如下：将滑坡体高度 H 范围内的土体水平等分为 n 层，每层高度为 $h_{im} = H/n$ ，对于数值解来说，只要条分数量足够，可近似认为各条分内部为均质。这就把无法实现的整体非均质解析解过程离散为若干均质条分极限分析过程，各项能量功率，例如重力做功功率 P_w 、地震惯性力做功功率 P_k 、滑动面上的能耗耗散功率 P_c 都可通过水平条分上的能量功率分量进行叠加计算；滑坡体内部的变形能耗耗功率 P_d ，可采用类似于极向条分法^[18]的过程，即对各水平条分界面上的能量耗散进行求和，见下式：

$$\left. \begin{aligned} P_w &= \sum_{i=1}^n P_w^i \\ P_k &= \sum_{i=1}^n P_k^i \\ P_c &= \sum_{i=1}^n P_c^i \\ P_d &= \sum_{i=1}^{n-1} P_d^i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

需要说明的是，对于存在水平分层特征(如水平多土层)的情况，同样可以采用对不同厚度土层采用不同分层数的方法实现等厚度分层，等分只是为了便于统一计算。

考虑到计算参数的非均质性，不同项能量功率的计算选取的参数也是不同的，对于各个水平条分块的重力、地震惯性力做功功率以及条分块滑动面区段上的能量耗散功率选用水平条分高度中点处的

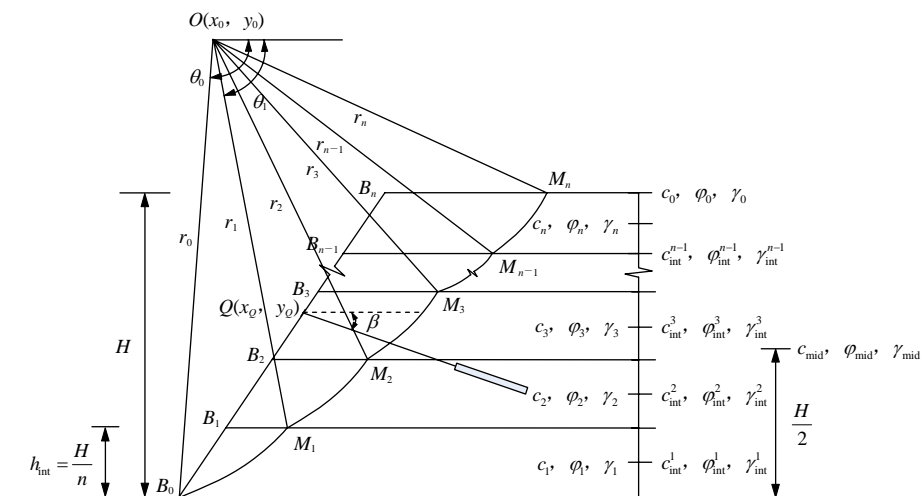


图4 非均质性和各向异性锚固边坡水平条分法示意图

Fig.4 Horizontal slice method for anchor-reinforced slope with inhomogeneity and anisotropy

参数(c_i, φ_i, γ_i), 而滑坡体内部的变形能耗功率 P_d 由于发生在水平条分相邻的水平界面上, 故选用条分界面高度处的参数($c_{int}^i, \varphi_{int}^i, \gamma_{int}^i$), 这些参数可根据坡顶处的参数(c_0, φ_0, γ_0)以及线性分布关系求出。此外, 当条分数量足够多时, 由于水平条分高度足够小, 此时可将各水平条分内部的滑动面区段视为直线(即破坏面方向直线), 根据该直线方向便可确定该处主应力的方向, 继而可根据式(2)计算该处主应力状态下的实际黏聚力 c_i 。

3.2 能量功率计算的三角形拆分法

根据式(3)可知, 计算各水平条分块的能量功率分量是关键。当条分足够多时, 水平条分块内部的参数可视为定值, 因此, 任一水平条分块的功率分量可根据解析法来精确求解, 如图 5 所示。由于水平条分为不规则图形, 无法对其直接进行计算, 本文采用拆分法对其进行求解。W. F. Chen 和 T. Sawada^[14]给出了简单拆分法的计算过程, 后来该方法被 R. L. Michalowski 等^[5-8]应用于各类边坡的极限分析过程中。应用拆分法的目的是将条分后的不规则滑坡体截面拆分成若干便于计算的规则图形进行分析, 先计算拆分后的各部分能量功率, 然后根据其拆分关系获得整个滑坡体的能量功率。

以图 5 中 $B_{n-1}B_nM_nM_{n-1}$ 条分为例, 拆分法具体步骤为: 将其拆为三部分, 包括三角形 $B_{n-1}B_nM_n$ 、三角形 $M_{n-1}B_{n-1}M_n$ 以及不规则区域 $M_{n-1}M_n$ 。对于不规则区域 $M_{n-1}M_n$ 需要进一步分割才能求解: 将其看作对数螺旋形区域 $OM_{n-1}M_n$ 减去三角形区域 $OM_{n-1}M_n$, 而对数螺旋形区域的能量功率可通过积分法计算, 也可采用 R. L. Michalowski 等^[5-6]给出的表达式。而对于三角形区域, 令三角形 $B_{n-1}B_nM_n$, $M_{n-1}B_{n-1}M_n$ 和 $OM_{n-1}M_n$ 的重心分别为 C_n, X_n 和 D_n ,

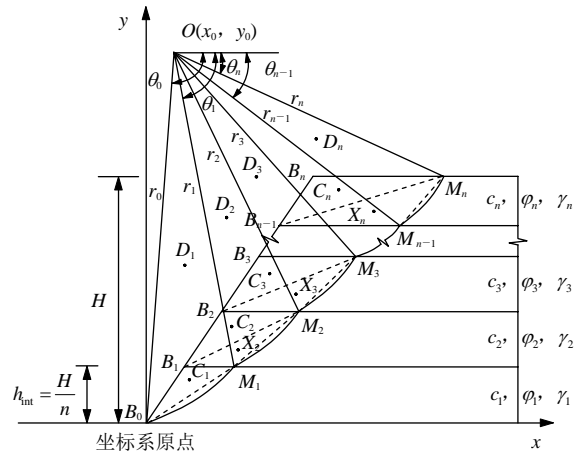


图 5 水平条分的三角形拆分法
Fig.5 Triangle partition method of horizontal slice method

如图 5 所示, 将三角形区域的重力和地震惯性力都转化为作用在重心上的集中力, 根据力与速度的矢量关系点积即可获得。令点 B_n, M_n, C_n, X_n 和 D_n 的坐标分别为 $(x_B^n, y_B^n), (x_M^n, y_M^n), (x_C^n, y_C^n), (x_X^n, y_X^n)$ 和 (x_D^n, y_D^n) , 则做功功率分量 P_W^i 和 P_k^i 以及滑动面能量耗散功率分量 P_c^i 的计算表达式如表 1 所示。

对于锚索的做功功率 P_T , 由于内摩擦角的非均质性导致了边坡的整体滑动面并非对数螺旋线, 因此锚索与滑动面的交点位置难以求解。赵炼恒等^[19]对此给出了 2 种计算方式, 通过分析可发现锚索的做功功率 P_T 与其锚索力围绕极点 O 的弯矩有关, 见下式:

$$P_T = -\omega M_R \quad (4a)$$

因此只需要求解锚索力对极点 O 的弯矩 M_R 即可, 为此可将锚索力 T 在锚头 Q 处沿 x, y 方向垂直分解为 T_x 和 T_y 并分别计算弯矩再叠加获得, 见下式:

$$P_T = -\omega [T_x (y_0 - y_Q) + T_y (x_0 - x_Q)] \quad (4b)$$

表 1 水平条分部分能量功率计算表达式

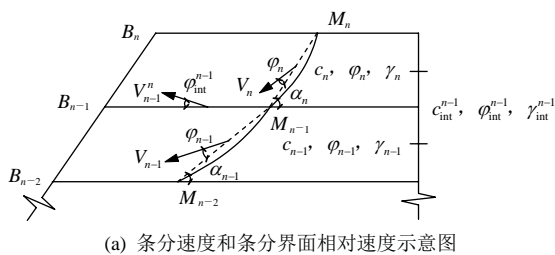
Table 1 Expressions of energy work rate for individual part of horizontal slice

参数	$i = 1$	$i \geq 2$
P_W^i	$P_W^i = P_{\Delta B_i B_i M_i}^W + P_{\text{区域}OB_i M_i}^W - P_{\Delta OB_i M_i}^W$ $P_{\Delta B_i B_i M_i}^W = 0.5\gamma_i h_{int} (x_M^i - x_B^i)(x_C^i - x_0)\omega$ $P_{\Delta OB_i M_i}^W = 0.5\gamma_i r_0 r_i \sin(\theta_0 - \theta_i)(x_D^i - x_0)\omega$	$P_W^i = P_{\Delta B_i B_i M_i}^W + P_{\Delta M_{i-1} B_{i-1} M_i}^W + P_{\text{区域}OM_{i-1} M_i}^W - P_{\Delta OM_{i-1} M_i}^W$ $P_{\Delta B_i B_i M_i}^W = 0.5\gamma_i h_{int} (x_M^i - x_B^i)(x_C^i - x_0)\omega$ $P_{\Delta M_{i-1} B_{i-1} M_i}^W = 0.5\gamma_i h_{int} (x_M^{i-1} - x_B^{i-1})(x_X^{i-1} - x_0)\omega$ $P_{\text{区域}OM_{i-1} M_i}^W = 0.5\gamma_i r_{i-1} r_i \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)(x_D^i - x_0)\omega$
P_k^i	$P_k^i = P_{\Delta B_i B_i M_i}^k + P_{\text{区域}OB_i M_i}^k - P_{\Delta OB_i M_i}^k$ $P_{\Delta B_i B_i M_i}^k = 0.5\gamma_i h_{int} (x_M^i - x_B^i)(y_0 - y_C^i)\omega k$ $P_{\Delta OB_i M_i}^k = 0.5\gamma_i r_0 r_i \sin(\theta_0 - \theta_i)(y_0 - y_D^i)\omega k$	$P_k^i = P_{\Delta B_i B_i M_i}^k + P_{\Delta M_{i-1} B_{i-1} M_i}^k + P_{\text{区域}OM_{i-1} M_i}^k - P_{\Delta OM_{i-1} M_i}^k$ $P_{\Delta B_i B_i M_i}^k = 0.5\gamma_i h_{int} (x_M^i - x_B^i)(y_0 - y_C^i)\omega k$ $P_{\Delta M_{i-1} B_{i-1} M_i}^k = 0.5\gamma_i h_{int} (x_M^{i-1} - x_B^{i-1})(y_0 - y_X^{i-1})\omega k$ $P_{\text{区域}OM_{i-1} M_i}^k = 0.5\gamma_i r_{i-1} r_i \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)(y_0 - y_D^i)\omega k$
P_c^i	$P_c^i = \int_{\theta_0}^{\theta_{i-1}} (c_i V \cos \varphi_i) \frac{rd\theta}{\cos \varphi_i} = c_i r_i^2 \omega f_c^i$	

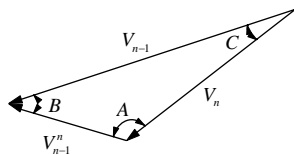
注: W, k 为对应功率的标记。

对于多根锚索加固边坡的情况，只需要按照式(4b)对每根锚索的做功功率进行单独计算并叠加即可。

对于水平条分相邻的界面上 P_d^i ，首先需要确定该条分界面上的相对速度 V_{n-1}^n 的大小，本文借助变形协调原则来间接计算。首先需要确定水平条分上的速度 V_n ，由于条分上对数螺旋线区段很短，可将其简化为直线段来确定 V_n 的方向，如图 6(a)所示。根据相关联流动法则，图 6(a)中条分速度 V_n 与直线段 $M_{n-1}M_n$ 的夹角为 φ_n ，条分界面上的相对速度 V_{n-1}^n 与水平界面的夹角为 φ_{int}^{n-1} ，相邻的水平条分上的速度 V_{n-1} ， V_n 将会和界面上的相对速度 V_{n-1}^n 构成一个矢量三角形，如图 6(b)所示。



(a) 条分速度和条分界面相对速度示意图



(b) 速度矢量三角形

图 6 水平条分法的速度矢量关系

Fig.6 The vector relationship of velocities in horizontal slice method

令图 6(a)中直线段 $M_{n-1}M_n$ 的倾斜角为 α_n ，则 α_n 的正切值可表示为

$$\tan \alpha_n = \frac{h_{int}}{x_M^n - x_M^{n-1}} \quad (5)$$

另外，根据几何关系可知图 6(b)中的矢量三角形内角 A, B, C 可表示为

$$\left. \begin{aligned} A &= \pi - (\alpha_n - \varphi_n) - \varphi_{int}^{n-1} \\ B &= \alpha_{n-1} - \varphi_{n-1} + \varphi_{int}^{n-1} \\ C &= \alpha_n - \alpha_{n-1} + \varphi_{n-1} - \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则根据三角形正弦定理，界面上的相对速度 V_{n-1}^n 可由下式计算：

$$V_{n-1}^n = V_{n-1} \frac{\sin C}{\sin A} \quad (7)$$

则水平条分界面上的能耗功率 P_d^i 可由下式进行计算：

$$P_d^i = (x_M^i - x_B^n) c_{int}^i V_{n-1}^n \cos \varphi_{int}^i \quad (i \leq n-1) \quad (8)$$

综上，根据能量守恒原理可得极限分析能量方程：

$$\sum_{i=1}^n P_W^i + \sum_{i=1}^n P_k^i + P_T = \sum_{i=1}^n P_c^i + \sum_{i=1}^{n-1} P_d^i \quad (9)$$

满足该方程的水平加速度系数 k 即为诱发边坡失稳的抗震屈服加速度系数。

4 计算过程实现

4.1 优化变量的确定

对于滑动面经过坡脚的情况，边坡极限分析计算中的变量主要为相关极角^[20]，对于图 5 中的模型，有 θ_0 到 θ_n 共计有 $n+1$ 个极角，变量过于繁多，相关寻优算法无法直接求解，需进一步减少未知变量的数量。通过对图 5 中的模型分析可发现， θ_0 到 θ_n 这 $n+1$ 个极角之间存在着一定的联系，真正独立的变量并没有这么多，证明过程如下：

以图 5 中坡脚点 B_0 为原点建立直角坐标系，假设 θ_0 和 θ_1 已知，则极径 r_0 和 r_1 可通过下式求取：

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= r_1 \exp[\tan \varphi_1 (\theta_0 - \theta_1)] \\ r_1 &= \frac{h_{int}}{\sin \theta_0 \exp[\tan \varphi_1 (\theta_0 - \theta_1)] - \sin \theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

进一步可推导出极点 O 的坐标 (x_0, y_0) 如下：

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_B^0 - r_0 \cos \theta_0 \\ y_0 &= y_B^1 + r_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对于第 i 块水平条分来说，其相关极角 θ_{i-1} 和 θ_i 以及对应的极径 r_{i-1} 和 r_i 满足以下关系：

$$\left. \begin{aligned} r_{i-1} &= r_i \exp[\tan \varphi_i (\theta_{i-1} - \theta_i)] \\ y_0 - y_B^i &= r_i \sin \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(12)两边相除可消去变量 r_i ，得到：

$$\frac{r_{i-1}}{y_0 - h_{int}^i} = \frac{\exp[\tan \varphi_i (\theta_{i-1} - \theta_i)]}{\sin \theta_i} \quad (i = 2, 3, 4, \dots) \quad (13)$$

结合下式可不断迭代得到极角 $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ 和极径 r_2, r_3, \dots, r_n ，继而可进一步获得点 M_i 的一系列坐标 (x_M^i, y_M^i) ：

$$r_i = \frac{h_{int}}{\sin \theta_{i-1} \exp[\tan \varphi_i (\theta_{i-1} - \theta_i)] - \sin \theta_i} \quad (14)$$

综上所述，当极角 θ_0 和 θ_1 确定后， θ_2 到 θ_n 这 $n-1$ 个极角的值实际上已经确定，只需通过上述迭代运算即可获取，因此，该问题在进行优化计算时

寻优变量只需要考虑 θ_0 和 θ_1 即可。

4.2 优化方法

当 θ_0 和 θ_1 已知时, 式(9)中的能量功率分量均可求出, 只有地震屈服加速度系数未知, 而屈服加速度系数的计算过程就是寻求最优的 θ_0 和 θ_1 组合使得地震屈服加速度系数在合理的范围内取得最小值。但是从式(9)来看, θ_0 和 θ_1 与屈服加速度系数之间的函数映射关系是隐式且非常复杂, 无法通过解析方法求解其最小值。为此, 本文采用遗传算法对其进行寻优, 变量 θ_0 和 θ_1 的寻优区间均为 $(0, \pi)$, 为保证结果的有效性, 需要在算法寻优过程中设置一定的限制条件: $\theta_0 > \theta_1$ 和 $x_M^i - x_B^i > 0$ (旨在保证结果满足模型中的几何条件), $P_T < 0$ (旨在保证锚索实际为抗滑作用), 上述所有的计算和优化过程均通过自编程序实现。

需要强调的是, 本文模型只讨论了滑动面经过坡脚的情况, 对于滑动面在坡脚前剪出的情况没有讨论, 但是文中所示的水平条分法以及拆分求解能量功率的过程是一致的, 只不过对于滑动面在坡脚前剪出的情况需要进一步考虑剪出点位置的影响以及在后续计算过程中引起的变化。

5 算例分析

算例边坡模型参照图 5, 边坡几何参数如下: 坡高 $H = 7 \text{ m}$, 坡角 $\alpha = 60^\circ$; 在边坡坡面中间位置设置一根锚索进行加固, 即锚头高度 $h = 3.5 \text{ m}$, 锚索倾角 $\beta = 15^\circ$, 锚索极限抗拔力为 T_m 。边坡中部高度 $H/2$ 处的参数分别为 $c_{\text{mid}} = 12 \text{ kPa}$, $\varphi_{\text{mid}} = 25^\circ$, $\gamma_{\text{mid}} = 18 \text{ kN/m}^3$, 各参数的非均质性考虑为线性变化, 其对应的变化斜率为 $k_c = 0.5 \text{ kPa/m}$, $k_\varphi = -0.4^\circ/\text{m}$, $k_\gamma = 0.6 \text{ kN/m}^4$, 各向异性系数 $k_{\text{hw}} = 0.7$ 。

5.1 水平条分数对抗震屈服加速度系数的影响

水平条分数 n 直接影响着上述条分法的计算结果, 虽然水平条分数越高, 计算结果越接近真实值, 但过高的水平条分数会严重增加程序的循环迭代计算量, 降低计算效率。

选择合适的条分数 n 有利于权衡计算精度和计算效率, 为此, 研究给出了在不同锚索极限抗拔力条件下水平条分数 n 对抗震屈服加速度系数 k_y 的影响规律曲线, 如图 7 所示。从图 7 中可以看出, 随着水平条分数 n 的持续增大, 屈服加速度系数 k_y 持续增大且后续趋于收敛。本文选取条分数 $n = 10$ 以兼顾计算精度和计算效率, 从数据上看 $n = 10$ 和

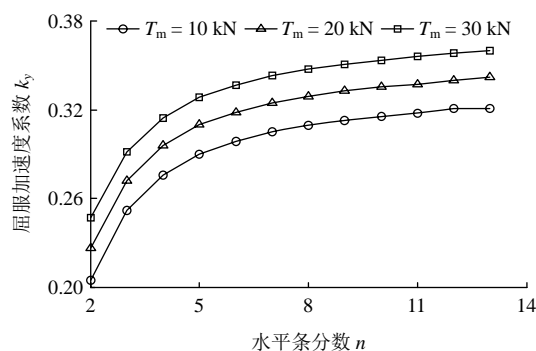


图 7 水平条分数对屈服加速度系数的影响规律

Fig.7 The influence of slice number on yield acceleration factor

$n = 11$ 的计算结果相差不到 0.003, 此时曲线已趋近收敛, 满足计算精度需要。

5.2 可靠性对比验证

由于考虑的多参数非均质边坡稳定性研究文献较少, 相关文献中也未见此类稳定性极限分析数据。为验证本文方法及其实现过程的可靠性, 采用与均质边坡的抗震稳定性极限分析数据进行对比。将本文模型退化为均值模型, 即土体黏聚力、内摩擦角和重度的变化斜率为 0, 各向异性系数为 1 的计算结果与相关文献结果进行对比。本节选用陈春舒和夏元友^[21]中的边坡算例参数计算了其不同锚索极限抗拔力条件下的抗震屈服加速度系数, 并与原文献中的数据进行了对比, 见表 2。从表中可以看出, 两方法结果的差别不超过 0.004, 十分接近, 这也验证了方法及其实现过程的可靠性。

表 2 本文方法结果与文献结果对比

Table 2 Comparison between the results of above method and the ones in relevant literature

锚索极限抗拔力 T_m / kN	抗震屈服加速度系数	
	陈春舒和夏元友 ^[21] 的结果	本文方法结果
0	0.024 8	0.025 1
5	0.035 4	0.038 3
10	0.045 6	0.041 7
15	0.055 7	0.054 1
20	0.065 5	0.068 5
25	0.075 2	0.074 2
30	0.084 7	0.086 2

5.3 非均质各向异性参数对抗震屈服加速度系数的影响

5.3.1 土体黏聚力非均质性的影响

为仅反映变化斜率 k_c 的影响, 保持边坡中部高度处土体黏聚力(即 c_{mid})不变, k_c 取值范围为 0~1,

计算结果如图 8 所示。从图 8 中可看出：在不同抗拔力条件下，随着水平向黏聚力变化斜率 k_c 的递增，屈服加速度系数 k_y 变化极不明显，其数据上表现为缓慢递增，在 k_c 从 0 增大到 1 的过程中， k_y 最大只增加了 0.001 8，说明土体黏聚力线性非均质性的影响敏感性较低。

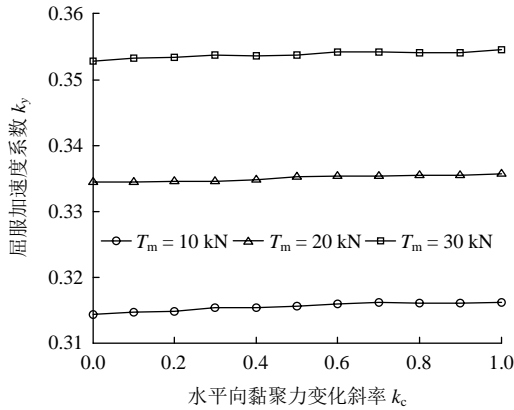


图 8 水平向黏聚力变化斜率对屈服加速度系数的影响规律
Fig.8 The influence of gradient of horizontal cohesion on yield acceleration factor

5.3.2 土体内摩擦角非均质性的影响

同理，保持边坡中间高度处土体内摩擦角(即 φ_{mid})不变， k_φ 取值范围为 $-0.5 \sim 0.5$ 。计算结果见图 9。从图 9 可以看出：在不同锚索抗拔力条件下，屈服加速度系数 k_y 随着内摩擦角变化斜率 k_φ 的增大而增大，且呈现近似线性增大的特征。从数据上看，在 k_φ 从 -0.5 增大到 0.5 的过程中， k_y 均增大 0.03 以上，变化较为显著，说明土体内摩擦角线性非均质性的影响敏感性较高。

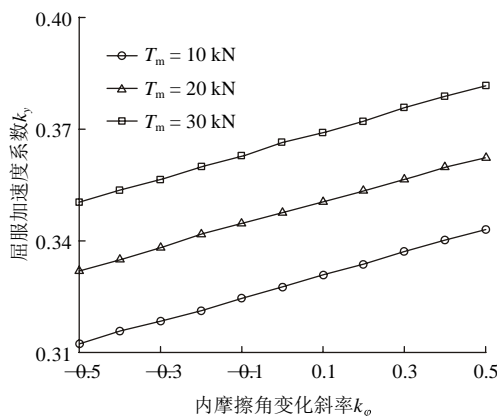


图 9 内摩擦角变化斜率对屈服加速度系数的影响规律
Fig.9 The influence of gradient of internal friction angle on yield acceleration factor

5.3.3 土体重度非均质性的影响

同样保持边坡中间高度处土体重度 γ_{mid} 不变， k_γ 取值范围为 $0 \sim 1$ ，计算中结果如图 10 所示。

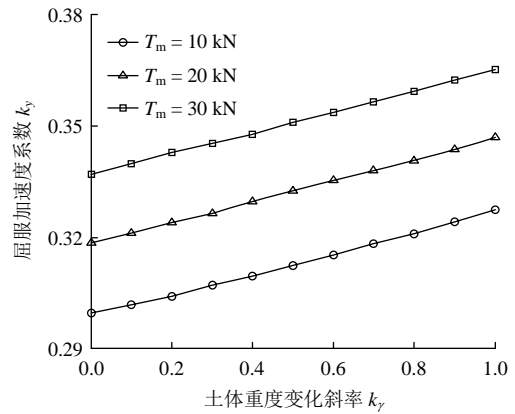


图 10 土体重度变化斜率对屈服加速度系数的影响规律
Fig.10 The influence of gradient of soil unit weigh on yield acceleration factor

从图 10 可以看出其影响规律与图 9 较为类似，屈服加速度系数 k_y 随着土体重度变化斜率 k_γ 的增大表现出近似线性的增大趋势。从数据上看，在 k_γ 从 0 增大到 1 的过程中， k_y 均增大了 0.027，变化同样较为显著，故对于 k_y 而言，土体重度线性非均质性的影响敏感性同样较高。

5.3.4 各向异性系数对抗震屈服加速度系数的影响

保持水平向黏聚力 c_h 分布不变， k_{hv} 的取值范围为 $0.6 \sim 1.4$ ，计算结果如图 11 所示。从图 11 不难看出：屈服加速度系数 k_y 随着各向异性系数 k_{hv} 的递增呈现非线性递减趋势，因此对于 k_y 而言，土体各向异性系数 k_{hv} 的影响敏感性同样很显著。这是因为根据异性系数 k_{hv} 的定义，当 c_h 不变而 k_{hv} 增大时，竖直向黏聚力 c_v 将会减小，根据式(1)中的关系可判断实际黏聚力 c_i 会随之减小，因而降低边坡的抗震稳定性。

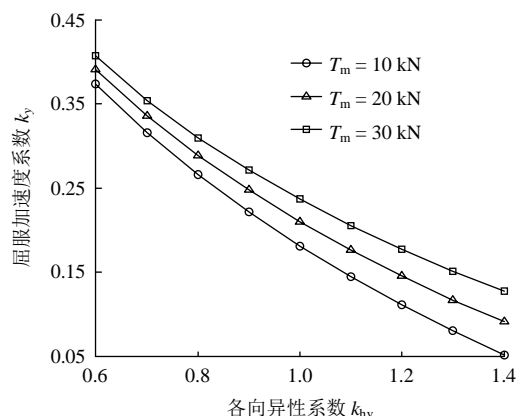


图 11 各向异性系数对屈服加速度系数的影响规律
Fig.11 The influence of anisotropy coefficient on yield acceleration factor

6 结 论

(1) 针对非均质各向异性边坡的稳定性分析，

提出了考虑土体多种参数非均质性及各向异性的预应力锚索加固边坡的抗震稳定性极限分析方法。该方法首先基于水平条分法将滑坡体离散为多个水平条分并根据拆分法计算各个水平条分的能量功率, 其次根据各条分之间几何关系确定了未知变量的个数, 最后采用遗传算法编制了相应的分析程序实现了其求解过程。

(2) 本文方法可以退化为均质边坡稳定性分析方法, 通过与相关文献均质边坡算例结果的对比, 验证了本文方法及其实现过程的可靠性。

(3) 考虑边坡土体参数的非均质性为沿深度方向线性分布, 算例分析结果表明: 对于屈服加速度系数 k_y 而言, 土体黏聚力线性非均质性的影响敏感性较低; 而内摩擦角和土体重度的影响敏感性较高, 均表现为显著的线性递增特征; 土体各向异性系数的影响敏感性同样较为显著, 表现为显著的递减。

该方法充分考虑了黏聚力、内摩擦角以及土体重度的非均质性, 其极限分析过程和方法为边坡极限分析的一般性方法, 适用于各类不同加固边坡的拟静力以及静力稳定性分析, 相关成果可为非均质各向异性边坡的稳定性评估提供新的途径。

参考文献(References):

- [1] DRUCKER D C, PRAGER W, GREENBERG H J. Extended limit design theorems for continuous media[J]. Quarterly Applied Mathematics, 1952, (9): 381 - 389.
- [2] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1975: 638.
- [3] CHEN W F, LIU X L. Limit analysis in soil mechanics[M]. Amsterdam: Elsevier, 1990: 492.
- [4] CHEN W F, GIGER M W, FANG H Y. On the limit analysis of stability of slopes[J]. Soil and Foundations, 1969, 9(4): 23 - 32.
- [5] MICHALOWSKI R L. Stability of uniformly reinforced slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, 123(6): 546 - 556.
- [6] AUSILIO E, CONTE E, DENTE G. Stability analysis of slopes reinforced with piles[J]. Computers and Geotechnics, 2001, 28(8): 591 - 611.
- [7] LI X, HE S, WU Y. Seismic displacement of slopes reinforced with piles[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(6): 880 - 884.
- [8] MICHALOWSKI R L, YOU L. Displacements of reinforced slopes subjected to seismic loads[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, 126(8): 685 - 694.
- [9] 王根龙, 伍法权, 张军慧. 非均质土坡稳定性分析评价的刚体单元上限法[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(增 2): 3 425 - 3 430. (WANG Genlong, WU Faquan, ZHANG Junhui. Upper bound approach of rigid elements for inhomogeneous soil slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(Supp.2): 3 425 - 3 430.(in Chinese))
- [10] 年廷凯, 刘凯, 黄润秋, 等. 多阶多层复杂边坡稳定性的通用上限方法[J]. 岩土力学, 2016, 37(3): 842 - 849.(NIAN Tingkai, LIU Kai, HUANG Runqiu, et al. A generalized upper-bound limit analysis approach for stability analysis of complex multistep and multilayer slopes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(3): 842 - 849.(in Chinese))
- [11] 范鑫萍, 黄茂松, 王浩然. 考虑龄期分层的固体废弃物填埋场边坡稳定分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(6): 1 715 - 1 720.(FAN Xinping, HUANG Maosong, WANG Haoran. Stability analysis of a municipal solid waste slope layered by aging[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(6): 1 715 - 1 720.(in Chinese))
- [12] 方薇, 杨果林, 刘晓红, 等. 非均质边坡稳定性极限分析上限法[J]. 中国铁道科学, 2010, 31(6): 14 - 20.(FANG Wei, YANG Guolin, LIU Xiaohong, et al. The upper-bound limit analysis of the inhomogeneous slope stability[J]. China Railway Science, 2010, 31(6): 14 - 20.(in Chinese))
- [13] HWANG J, DEWOOLKAR M, KO H Y. Stability analysis of two-dimensional excavated slopes considering strength anisotropy[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(5): 1 026 - 1 038.
- [14] CHEN W F, SAWADA T. Earthquake-induced slope failure in nonhomogeneous, anisotropic soils[J]. Soils and Foundations, 1983, 23(2): 125 - 139.
- [15] 栾茂田, 年廷凯, 杨庆. 考虑非均质各向异性效应的阻滑桩加固土坡稳定性分析[J]. 岩土力学, 2006, 27(4): 530 - 536.(LUAN Maotian, NIAN Tingkai, YANG Qing. Stability analysis of pile-stabilized slopes considering both nonhomogeneity and anisotropy of soil strength using upper bound method of limit analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(4): 530 - 536.(in Chinese))
- [16] AL-KARNI A A, AL-SHAMRANI M A. Study of the effect of soil anisotropy on slope stability using method of slices[J]. Computers and Geotechnics, 2000, 26(2): 83 - 103.
- [17] 范明桥, 盛金保. 土强度指标 ϕ , c 的互相关性[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(4): 100 - 104.(FAN Mingqiao, SHENG Jinbao. The cross correlation between soil strength parameters ϕ , c [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(4): 100 - 104.(in Chinese))
- [18] 夏元友, 陈春舒. 考虑内部摩擦变形耗能的预应力锚索边坡极限分析[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(2): 210 - 217.(XIA Yuanyou, CHEN Chunshu. Limit analysis of reinforced slopes with prestressed anchor cables considering energy dissipation due to deformation of inner friction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(2): 210 - 217.(in Chinese))
- [19] 赵炼恒, 罗强, 李亮, 等. 基于失稳状态耗能最小原理的预应力锚索加固边坡稳定性上限解析[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 426 - 432.(ZHAO Lianheng, LUO Qiang, LI Liang, et al. Energy analysis method for slopes reinforcing with prestressed anchor cables based on minimum energy principle of instability state[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(2): 426 - 432.(in Chinese))
- [20] CHANG C J, CHEN W F, YAO J T P. Seismic displacements in slopes by limit analysis[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 110(7): 860 - 874.
- [21] 陈春舒, 夏元友. 基于极限分析的边坡实时动态 Newmark 滑块位移法[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(12): 2 507 - 2 515.(CHEN Chunshu, XIA Yuanyou. A real-time dynamic Newmark sliding block method for slopes based on limit analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(12): 2 507 - 2 515.(in Chinese))