第七章 不可压缩流体动力学基础

本章讨论三元流动，主要内容是有关流体运动的基本概念和基本原理，以及不可压缩流体流动的基本方程。

积分形式的基本方程用于解决控制面上的流动参数问题。

微分方程可用于解决流 动参数在流场中的分布问题。

§ 7-1 流体微团运动的分析

一、运动形式

1、流体微团：指体积微小，随流体一起运动的一团流体物质。与流体质点不同，虽体积微小，但包含无数个流体质点。各质点间存在着相对位置的变化。

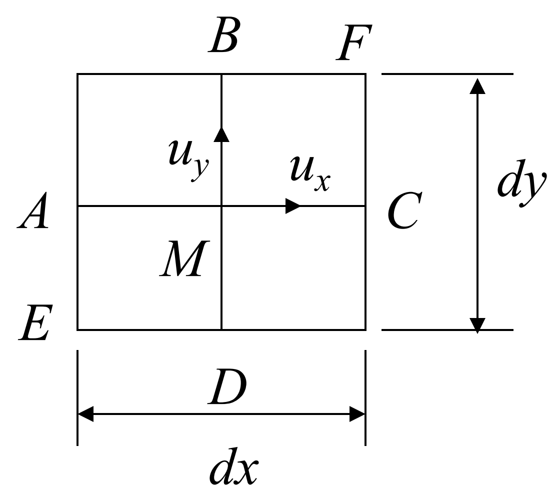
2、基本运动形式

- 平移运动
- 旋转运动
- 变形运动
  - 线变形、
  - 角变形

二、运动分析

以二元流动的情况为例，研究几种基本运动形式的速度表达式。

如图，方形流动微团



各侧边中点*A*、*B*、*C*、*D*的流速分量分别为

M	A	B	C	D
u_x	$u_x-\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_x+\frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$	$u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_x-\frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$
u_y	$u_y-\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$	$u_y+\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}$	$u_y-\frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}$

1、平移运动速度

$$u_x \quad u_y \quad u_z$$

2、线变形速度

X方向线变形速度

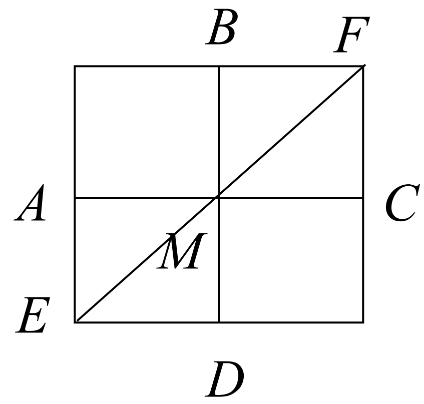
$$\theta_x = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x}dxdt}{dxdt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

A、C两点速度差值： $\frac{\partial u_x}{\partial x}dx$

差值为正，发生伸长变形。

$$\theta_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \theta_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \theta_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

3、旋转角速度

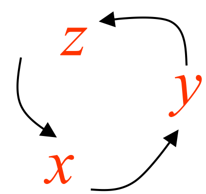


逆时针为正

对角线*EMF*的旋转角速度定义为

整个流体微团在*oxy*平面上的旋转角速度。

$$
\begin{cases}
\omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) \\
\omega_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\
\omega_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right)
\end{cases}
$$



$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

大小 $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$

方向：右手定则

4、角变形速度

直角边*AMC*（或*BMD*）与对角线*EMF*的夹角的变形速度定义为流体微团的角变形速度，记为 ε_z ，表示在*xoy*平面上的角变形速度。

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

三元流动：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) \end{cases}$$

ε 的下标表示发生角变形的所在平面的法线方向。

三、亥姆霍兹速度分解定理 （了解）

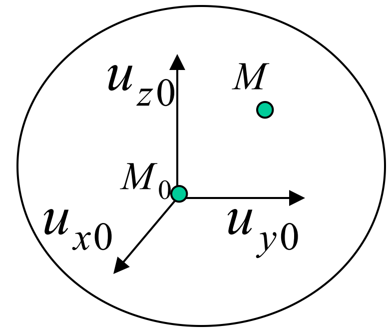
设流体微团内某点$M_0(x,y,z)$,速度为u_{x0} 、u_{y0} 、u_{z0} ，

则邻边M_0的另一点$M\ (x+dx,y+dy,z+dz)$的速度为

$$u_x = u_{x0} + du_x$$

$$u_y = u_{y0} + du_y$$

$$u_z = u_{z0} + du_z$$



展开 du_x ……., 变换整理得

$$\begin{cases}
u_x = u_{x0} - \omega_z dy + \omega_y dz + \theta_x dx + \varepsilon_z dy + \varepsilon_y dz \\
u_y = u_{y0} - \omega_x dz + \omega_z dx + \theta_y dy + \varepsilon_x dz + \varepsilon_z dx \\
u_z = \underbrace{u_{z0}}_{\text{平移}} \underbrace{- \omega_y dx + \omega_x dy}_{\text{旋转}} + \underbrace{\theta_z dz}_{\text{线变形}} + \underbrace{\varepsilon_y dx + \varepsilon_x dy}_{\text{角变形}}
\end{cases}$$

§ 7-2 有旋流动

无旋流动：$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ （详见第8章）

有旋流动 ：ω_x 、ω_y 、ω_z 至少有一个不等于零。

涡量： 涡线，涡线方程，涡量连续性方程

涡通量：斯托克斯方程，汤姆逊定理

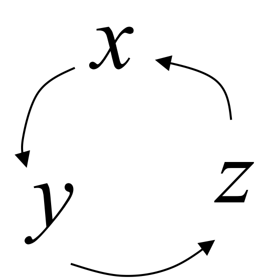
1、涡量

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$$

$$\Omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\Omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$



$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \vec{\Omega}(x, y, z, t) \longrightarrow \text{涡量场}$$

2、涡量连续性微分方程

$$\nabla \times \vec{u} = \vec{\Omega}$$

$$\nabla \cdot \vec{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0$$

∇ ：哈米尔顿算子，矢性微分算子

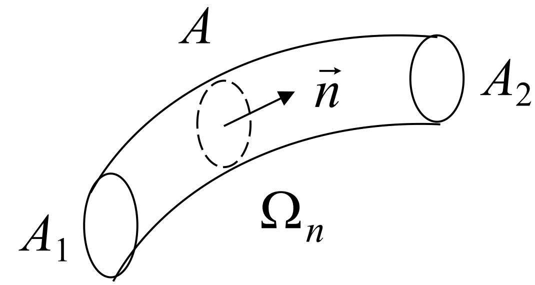
3、涡线， 涡线方程

涡线：表示某一瞬时流体质点旋转角速度向量方向的曲线。

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

二、涡通量

1、定义:



涡量在 $\vec{n}$ 投影为 Ω_n ，则 $\int_A \Omega_n dA$ 为涡通量。

$$J = \int_A \vec{\Omega} d\vec{A} = \int_A \Omega_n dA = \int_A \Omega_x dydz + \int_A \Omega_y dzdx + \int_A \Omega_z dxdy$$

对有旋转流动，在同一瞬间，通过同一涡管的各截面的涡通量相等。

$$\int_{A_1} \Omega_n dA = \int_{A_2} \Omega_n dA$$

2、涡通量的计算

（1）速度环量：流速沿封闭曲线**s**的积分。**s**正向为逆时针方向。

$$\Gamma = \oint_s \vec{u}\vec{ds} = \oint_s u_x dx + u_y dy + u_z dz$$

斯托克斯公式：

$$\oint_s u_x dx + u_y dy + u_z dz$$

$$= \int_A \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dxdy \right]$$

$$= \int_A \Omega_x dA_x + \Omega_y dA_y + \Omega_z dA_z$$

$$= \int_A \Omega_n dA$$

s为流场中任意封闭曲线

A是S所围成的曲面

$\vec{n}$ 是曲面A的外法线单位向量。

结论：沿任意封闭曲线S的速度环量等于通过以该曲线为边界的曲面A的涡通量。

$\Gamma_s = J_A$ → 斯托克斯定理

（2）汤姆逊定理（了解）

在理想流体的涡量场中，如果质量力具有单值的势函数，那么沿由流体质点所组成的封闭曲线的速度环量不随时间而变。即：

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

推论：质量力具有单值势函数的理想流体的流动，如果在某一时刻是有旋流，那么此前、此后也是有旋流。如果为无旋流，那么此前、此后也是无旋流。

自学：P186例[7-2]

§ 7-3 不可压缩流体连续性微分方程

1、方程：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad \text{（柱面坐标形式）}$$

2、分析推导：微元分析法

依据质量守恒定律，取微小平行六面体，中心***M***（***x,y,z***)，***u***$_x$、***u***$_y$、***u***$_z$，***x***方向，***dt***时间

净流体体积=流出－流入

$$=(u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydzdt-(u_x-\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydzdt$$

$$=\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot dxdydzdt$$

同理y方向： $$\frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot dxdydzdt$$

z方向： $$\frac{\partial u_z}{\partial z}\cdot dxdydzdt$$

根据不可压缩连续性条件，*dt*时间内，*x*、*y*、*z*方向

流出-流入=0

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)dxdydzdt \quad = 0$$

$$\therefore \ \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

柱面坐标系：

$$\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

柱面坐标与直角坐标换算关系： **p 193 图7-7**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \\ u_x = u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta \\ u_y = u_r\sin\theta - u_\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_r = u_x\cos\theta - u_y\sin\theta \\ u_\theta = -u_x\sin\theta + u_y\cos\theta \end{cases}$$

3、应用

（1）方程对恒定流、非恒流都适用，是判断流动连续性的条件。

（2）是以后运动微分方程求解的一个条件。

（3）此式给出了流体通过某固定点时，流体的三个速度分量之间的关系。表明对不可压缩流体，单位时间内流入与流出某空间点的流体体积之差为零，即体积（质量）守恒。

例1：**p190[7-6]**

例2：判断下列流场是否满足不可压缩流体的连续性方程

（1）　$u_x = -(2xy + x) \qquad u_y = y^2 + y - x^2$

（2）　$u_r = 2r\cos 2\theta + \dfrac{1}{r} \qquad u_\theta = -2r\sin 2\theta$

解：

$$\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 2\cos 2\theta + \frac{1}{r^2} + 2\cos 2\theta - \frac{1}{r^2} - 4\cos 2\theta = 0$$

满足。

§ 7-4 粘性流体的运动微分方程
——纳维—斯托克斯方程

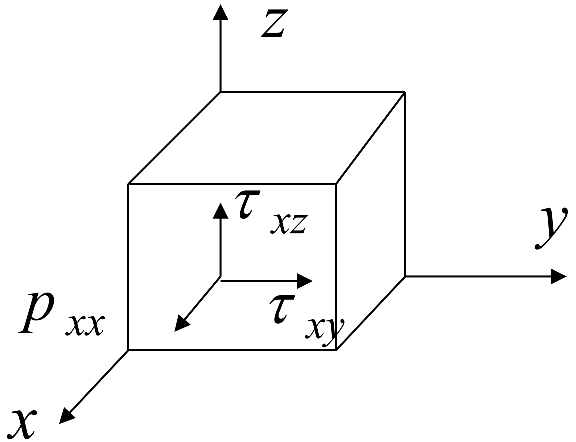
一、粘性流体的内应力

粘性流体运动时，所受表面应力包括法向应力和切应力。

流场内任一点的应力可表示为

3个压应力
6个切应力

$$\begin{cases} p_{xx} & ,\tau_{xy} & ,\tau_{xz} \\ \tau_{yx} & ,p_{yy} & ,\tau_{yz} \\ \tau_{zx} & ,\tau_{zy} & ,p_{zz} \end{cases}$$



二、以应力表示的运动微分方程（根据牛顿第二定律）

$$\begin{cases} X+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)=\dfrac{du_x}{dt} \\ Y+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)=\dfrac{du_y}{dt} \\ Z+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)=\dfrac{du_z}{dt} \end{cases} \qquad (7\text{-}4\text{-}1)$$

讨论：加上连续性方程，4个方程，12个未知量，无法求解。需找其它关系式，这些其它关系即是应力与变形速度的关系。

三、应力与变形速度的关系

1、切应力与角变形速度的关系

由牛顿内摩擦定律：

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt}$$

*xoy*平面上：

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\varepsilon_z = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

因此三元流动的牛顿内摩擦定律可以写成如下形式：

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right) \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \end{cases} \qquad \text{式（7-5-1）}$$

式（7-5-1）即广义牛顿摩擦定律，使式（7-4-1）中的12个未知数消去6个。

2、法向应力和线变形速度的关系

在流体微团的法线方向上的线变形速度，使法向应力（压应力）的大小与理想流体相比有所改变，产生附加压应力。

可以证明，对于不可压缩流体，附加法应力与线变形速度的关系:

（1）
$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ \tau_{yy} = 2\mu \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\ \tau_{zz} = 2\mu \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \qquad (7\text{-}5\text{-}3)$$

（2）平均压应力
$$\begin{cases} p_{xx} = -p_t + 2\mu \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ p_{yy} = -p_t + 2\mu \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\ p_{zz} = -p_t + 2\mu \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \qquad (7\text{-}5\text{-}4)$$

定义点压强：
$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$$

（3） $$p=-\frac{1}{3}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})=p_t-\frac{2}{3}\mu(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}) \qquad (7\text{-}5\text{-}5)$$

式中，p_{xx} 、 p_{yy}、 p_{zz}表示法向应力，

p 表示压强，

p_t 表示理想流体压强。

代入（7-5-4）

（4）
$$\begin{cases} p_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}) \\ p_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}) \\ p_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}) \end{cases} \qquad （7\text{-}5\text{-}6）$$

（7-5-6）式讨论：

a）对于理想流体 $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p_t$

b）不可压缩流体 $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ $\quad p = p_t$

c）对于均匀流 流速沿流线是常数 $u_x = u(y,z), u_y = u_z = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p_t$$

d）对于粘性流体方程

p_{xx} 、p_{yy}、p_{zz} 三个未知数变为一个 p，原则上方程已可求解了。

四、 N-S方程

把（7-5-1）式和（7-5-6）式代入（7-4-1）式，消去应力

对不可压缩流体有$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$　　代入得

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)=\frac{du_x}{dt}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)=\frac{du_y}{dt}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)=\frac{du_z}{dt}
\end{aligned}\right\}\qquad (7\text{-}6\text{-}1)$$

展开 $$\frac{du_x}{dt}=\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial t}}_{\text{当地加速度}}+\underbrace{u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}}_{\text{位移加速度}}$$

1、N-S方程

$$
\begin{cases}
X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2})=\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\
Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2})=\dfrac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\
Z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2})=\dfrac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z}
\end{cases}
\quad （7\text{-}6\text{-}3）
$$

柱坐标系：P197[7-6-4]式

2、讨论：

（1）与连续性方程联立，4个未知数、4个方程，原则上可求解速度分量和压强。

N-S方程是不可压缩流体最普遍的运动微分方程。

（2）二阶非线性非齐次的偏微分方程组，难以求出精确解。只对一些较简单的情况求出精确解。大多数问题是借助计算机技术求出近似解。

P198例[7-7]　　自学

例：已知流速场 $u_x = yzt, u_y = xzt, u_z = 0$

试求t=0.5时空间点（2,5,3）处的流体质点的加速度。

解：

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = yz + xz^2t^2 = 19.5$$

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = xz + yz^2t^2 = 17.25$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 26.04$$

§7-5 理想流体运动微分方程及其积分

分析N-S方程

1、理想流体 $\nu = 0$

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{（7-7-1）}$$

2、静止时 $u_x = u_y = u_z = 0$ 得流体平衡微分方程（2-7-1a）

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

3、变换（7-7-1）式，在方程中第一式的加速度项加 $\pm u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}, \pm u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$ **之后，整理得：**

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) = 2(\omega_y u_z - \omega_z u_y)$$

同理变换第二式、第三式，得：

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) = 2(\omega_y u_z - \omega_z u_y) \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{u^2}{2}) = 2(\omega_z u_x - \omega_x u_z) \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{u^2}{2}) = 2(\omega_x u_y - \omega_y u_x) \end{aligned}\right\} \quad \text{（7-7-2）}$$

恒定流：$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$ **，并设质量力有势函数*W*，则**

$$\frac{\partial}{\partial x}(-W + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}) = 2\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2})=2\begin{vmatrix} u_z & u_x \\ \omega_z & \omega_x \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2})=2\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ \omega_x & \omega_y \end{vmatrix}$$

分别乘以dx、dy、dz，相加得

$$d(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2})=2\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}dx+2\begin{vmatrix} u_z & u_x \\ \omega_z & \omega_x \end{vmatrix}dy+2\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ \omega_x & \omega_y \end{vmatrix}dz$$

$$d(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2})=2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

若 $W=-gz$ **，** $d(-W+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2})=0$ **，则**

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=\text{const}$$ **，理想恒定流能量方程。**

所以 $\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 0$ 是导出理想恒定流能量方程的条件。

行列式等于零，则任一行全等于零或任两行成比例。

讨论：

（1）$u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0$ 流体静止。

（2）$\dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dy}{u_y} = \dfrac{dz}{u_z}$ 流线方程

同一条流线上 $z + \dfrac{p}{\gamma} + \dfrac{u^2}{2g} = c \longleftarrow$ 元流能量方程

（3）$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = 0$ 无旋流

无旋流空间各点，处处满足能量方程。

（4）$\dfrac{dx}{\omega_x} = \dfrac{dy}{\omega_y} = \dfrac{dz}{\omega_z}$ 涡线方程 涡线上满足理想流体能量方程。

（5） $\dfrac{\omega_x}{u_x}=\dfrac{\omega_y}{u_y}=\dfrac{\omega_z}{u_z}=k$ 螺旋流动 （涡线与流线相重合）

螺旋流动中，全部流动均满足理想流体能量方程。

§ 7-6　流体运动的初始条件和边界条件

解二阶偏微分方程，需确定方程的定解条件（初始条件和边界条件）。

目前，计算流体力学已广泛应用于解决工程中的流动问题，如何正确合理给出初始条件和边界条件尤为重要。具体条件依赖于具体的流动。

以粘性不可压缩流体流动为例

1、初始条件

$$u_x = u_x\left(x, y, z, t_0\right) = u_{x0}\left(x, y, z\right)$$

若恒定流动，不必给出。

2、边界条件

边界包括固体壁面，两种流体介质的分界面，管道的出入口等。

（1）固体壁面静止

$$(u_x, u_y, u_z)_f = 0$$

固壁无滑移条件

（2）不同液体的分界面， 两侧液体的速度、压强保持连续， 即

$$v_{f1} = v_{f2}, p_{f1} = p_{f2}$$

（3）自由液面

$$p = p_0, \tau = 0$$

（4）进出口

考虑进出口速度分布和压强分布。

结论：合理的给出流动问题的初始条件和边界条件，对于确定简捷的计算方法和获得准确的解是至关重要的。

实际工程作研究时，结合实际，反复验证，建立符合实际的流动模型。

§ 7-7　不可压缩粘性流体紊流运动的基本方程及封闭条件

（了解）

第7章小结

1、基本概念

1〉流体微团的运动形式及速度表达式；

2〉有旋、无旋流动；判断条件

3〉不可压缩流体连续性微分方程。

2、有旋流动

1〉涡量连续性方程；

2〉涡线方程；

3〉斯托克斯定理，汤姆逊定理。

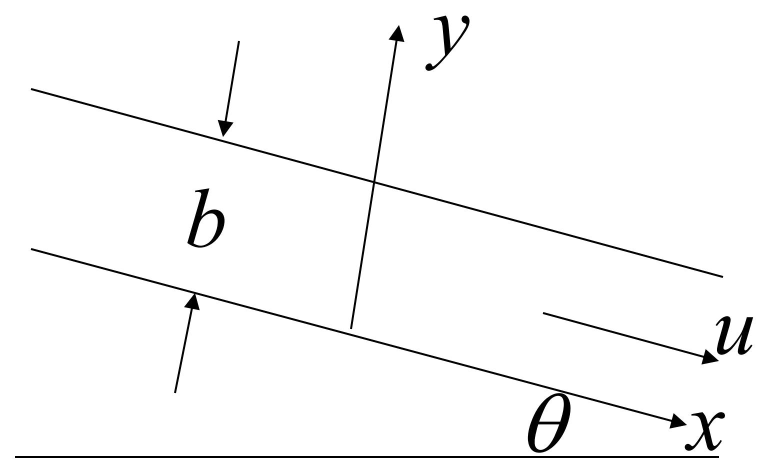
3、*N-S*方程

1>含义

2〉简化方程。

4、流动的初边界条件

习题7-9 p208 N-S方程应用



解：1〉

$$u_x = u_x(y,z) \quad , \quad u_y = u_z = 0$$

$X = g\sin\theta$ ， $Y = -g\,\mathrm{con}\theta$ 代入（7－6－3）

$$g\sin\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \quad (1)$$

$$-g\,\mathrm{con}\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

积分(2)得

$$p = -\gamma y\,\mathrm{con}\theta + f(x)$$

液面上$p = p_a$ ，$y = b$ 所以

$$p_a = -\gamma y b\,\mathrm{con}\theta + f(x) \Rightarrow$$

$$f(x) = p_a + \gamma b\,\mathrm{con}\theta$$

$$\Rightarrow p = p_a + \gamma(b-y)\,\mathrm{con}\theta$$

$\because b = c \quad \therefore p$与x无关，所以(1）式变为

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\gamma \sin\theta}{\mu} \quad \text{积分得}$$

$$u = -\frac{\gamma \sin\theta}{\mu}(\frac{1}{2}y^2 + c_1 y + c_2)$$

边界条件：$y = 0, u = 0; y = b, \dfrac{du}{dy} = 0$

(自由液面切应力$\tau = 0$)

$\therefore c_1 = -b, c_2 = 0$

$$u = \frac{\gamma \sin\theta}{2\mu} y(2b - y)$$

(2)单宽流量

$$\int_0^b u dy = \frac{\gamma}{3\mu} b^3 \sin\theta$$