

文章编号: 1000-4750(2017)03-0182-07

基于 Hermite 插值的简化风场模拟

陶天友, 王 浩

(东南大学混凝土及预应力混凝土教育部重点实验室, 南京 210096)

摘 要: 针对传统 Deodatis 谐波合成法的模拟效率受 Cholesky 分解次数制约的问题, 通过对互谱密度矩阵分解引入 Hermite 插值, 推导了基于 Hermite 插值的简化风场模拟方法, 将传统谐波合成法中的 Cholesky 分解次数由 $n \times N$ 次缩减为 $n \times 2k$ 次 ($2k < N$), 从而大幅度提升了传统谐波合成法的计算效率。以某大跨度三塔悬索桥主梁风场模拟为例, 分别基于传统 Deodatis 法、三次 Lagrange 插值法、Hermite 插值法模拟了时长为 4096 s 的脉动风速时程, 三者模拟耗时与模拟精度方面的对比表明: Hermite 插值法与 Lagrange 插值法均能显著提高传统谐波合成法的模拟效率; Hermite 插值法的模拟效率略低于三次 Lagrange 插值法, 但其对 H 矩阵的模拟精度明显高出一个层次, 因而 Hermite 插值法在风场模拟中表现更优。采用基于 Hermite 插值的简化方法, 模拟脉动风速的功率谱与相关函数均能与目标值吻合较好, 表明所模拟的脉动风速仍具有较高的保真度。在此基础上, 通过插值间距的优化分析给出了插值间距的建议取值区间。

关键词: Hermite 插值; Cholesky 分解; 风场模拟; 简化谐波合成法; 插值间距优化

中图分类号: U441.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.09.0768

REDUCED SIMULATION OF THE WIND FIELD BASED ON HERMITE INTERPOLATION

TAO Tian-you, WANG Hao

(Key Laboratory of Concrete and Prestressed Concrete Structures of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Owing to the problem that the computational efficiency of traditional spectral representation (SR) method by Deodatis is restricted to the times of Cholesky decompositions, Hermite interpolation is included in the decomposition of cross-spectral density matrix. A reduced method for wind field simulation is derived accordingly. With the reduced method, the time of Cholesky decomposition in the traditional SR method can be decreased from $n \times N$ to $n \times 2k$ ($2k < N$), hence the efficiency will be sharply increased. Taking the wind field simulation of the girder of a long-span triple-tower suspension bridge as an example, a 4096s-long fluctuating wind field is simulated by traditional SR method, third-order Lagrange interpolation method and the derived Hermite interpolation method. The comparison of the computational efficiency and its corresponding accuracy indicate that both the third-order Lagrange interpolation method and the Hermite interpolation method can prominently improve the computational efficiency of SR method. The efficiency of the Hermite interpolation method is slightly lower than that of the third-order Lagrange one, but its computing accuracy of Matrix H is on a much higher level which shows great superiority in wind field simulation. When the reduced method with Hermite interpolation is adopted, both the power spectral density and correlation functions of the simulated wind field can well conform to the targets. Based on the work above, the suggested boundaries for the interpolation intervals are given according to an optimization analysis.

收稿日期: 2015-09-16; 修改日期: 2016-04-01

基金项目: 国家 973 计划青年科学家专题项目(2015CB060000); 国家自然科学基金项目(51378111, 51438002); 霍英东青年教师应用研究项目(142007); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-13-0128); 江苏高校优势学科建设工程项目(CE02-2-15)

通讯作者: 王 浩(1980—), 男, 江西人, 教授, 博士, 博导, 主要从事大跨度桥梁抗风及健康监测研究(E-mail: wanghao1980@seu.edu.cn).

作者简介: 陶天友(1992—), 男, 江苏人, 博士生, 主要从事大跨度桥梁抗风及健康监测研究(E-mail: taotianyou1992@hotmail.com).

Key words: Hermite interpolation; Cholesky decomposition; simulation of wind field; reduced spectral representation method; optimization of interpolation interval

近年来,世界范围内已建成一大批举世瞩目的工程结构,这些结构多以大跨、高耸的主要特征闻名于世。然而,随着工程结构朝着大跨、高耸的方向发展,其结构整体趋于柔性化,这便使得其对风荷载的日趋敏感^[1-2]。加之,近年来风灾在世界范围内有着愈演愈烈的趋势,大跨、高耸结构的风致灾变备受学术界与工程界的关注。在重大工程结构的风振分析中,时域分析法可以较好地计入各类非线性因素的影响,因而能够准确反映柔性结构的风致动力行为,从而在结构抗风分析中得到了广泛的应用^[3]。

为了进行结构风振时域分析,须事先准确模拟符合场地风谱特征的三维脉动风场。对于给定谱特征的大气边界层风场, Monte Carlo 方法可通过计算机模拟技术直接生成随机风速的有效样本^[4-6]。基于 Monte Carlo 法的思想,现行风场模拟方法主要分为两类:基于三角函数叠加的谐波合成法和采用核函数白噪声卷积的数字滤波法^[7]。相比数字滤波法,谐波合成法算法简洁明了、精度较高、适用于具有任意谱特征的平稳随机过程的模拟,使其成为应用最广泛的随机场模拟方法^[8]。该法由 Shinozuka 与 Deodatis 两位学者创建并逐步发展完善,目前应用较多的主要有两种方法:一种是 Shinozuka^[9]提出的单频率索引法,虽然该方法模拟的随机过程不具备各态历经特征,但其能较好的吻合目标谱模型和相关函数;另一种是 Deodatis^[10]于 1996 年提出的双频率索引法,采用该方法模拟的随机过程无论在功率谱模型、相关函数还是各态历经特性等方面均具有较高的保真度。

精确度与计算效率是评价随机场模拟方法有效性的重要指标。虽然谐波合成法能够精确模拟多变量高斯平稳随机过程,但其计算效率随着模拟点数的增加大幅度下降^[11]。谐波合成法的核心主要包括两个部分: Cholesky 分解与三角级数叠加。在一定数量点随机过程的模拟中,谐波合成法需进行大量的 Cholesky 分解与三角级数叠加,且二者的运行次数随着模拟点的增加非线性增长,因而谐波合成法的计算效率直接制约于 Cholesky 分解与三角级数叠加的次数。Yang^[12]通过引入 FFT 技术简化了三角级数的叠加,使得谐波合成法的计算效率得

到大幅度提升。曹映泓等^[13]对相同高程分布点的互谱密度矩阵进行了显示分解,并结合 Davenport 相干函数的特征适当删减余弦项,从而提高了谐波合成法的计算效率。然而,由于脉动风功率谱密度通常随着高度而变化,对于处于不同高程的模拟点难以实现其互谱密度矩阵的显示化。Ding 等^[14]对互谱密度矩阵的 Cholesky 分解引入插值近似,采用分段三次 Lagrange 插值逼近原 Cholesky 分解后的下三角矩阵,从而减少了全过程 Cholesky 分解的次数,开拓了谐波合成法的新思路。

鉴于 Hermite 插值的保形特征,其既能保证插值点处的函数值与真实值一致,又能保证插值点处的导数不失真,从而使得插值函数更易于逼近原真实函数。本文在谐波合成法中对互谱密度矩阵分解引入 Hermite 插值,在有限关键频率点处对互谱密度矩阵进行 Cholesky 分解以获得 \mathbf{H} 矩阵的函数值与导数值,并采用 Hermite 插值建立 \mathbf{H} 矩阵在全频域内的近似函数表达,据此推导了基于 Hermite 插值的简化风场模拟方法。

1 谐波合成法

对于一维 n 变量零均值的平稳随机过程 $\{f_j(t)\}(j=1, 2, \dots, n)$, 其互功率谱密度矩阵 \mathbf{S} 可以表示为:

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1}(\omega) & S_{n2}(\omega) & \dots & S_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中:

$$S_{ij}(\omega) = \sqrt{S_i(\omega)S_j(\omega)}\gamma_{ij}(\omega), \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

式(2)中: $S_i(\omega)$ 为 i 点处脉动风功率谱密度; $S_j(\omega)$ 为 j 点处脉动风功率谱密度; $\gamma_{ij}(\omega)$ 为 i 点和 j 点脉动风的空间相干函数,通常采用 Davenport 空间相干函数^[15]。

由于脉动风空间相干函数的特征,脉动风的互谱密度矩阵表现为对称矩阵,将其进行 Cholesky 分解后可得一下三角矩阵 \mathbf{H} 与一上三角矩阵 \mathbf{H}^* , 即:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^*(\omega) \quad (3)$$

式中, \mathbf{H} 与 \mathbf{H}^* 互为共轭转置矩阵,其中 \mathbf{H} 的表达

式为:

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \dots & H_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4)$$

根据 Deodatis 理论, 第 j 点的脉动风速时程 $f_j(t)$ 可以用三角级数表示为:

$$f_j(t) = 2\sqrt{\Delta\omega} \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N |H_{jm}(\omega_{ml})| \cos(\omega_{ml}t - \theta(\omega_{ml}) + \phi_{ml}), \quad j=1,2,\dots,n \quad (5)$$

式中: N 为频率分段数; $\Delta\omega = \omega_{up} / N$ 为频率增量, ω_{up} 为上限截止频率; ϕ_{ml} 为均匀分布在 $[0, 2\pi]$ 区间内的独立随机相位角; ω_{ml} 为双索引频率, 可按式(6)计算; $H_{jm}(\omega_{ml})$ 是矩阵 \mathbf{H} 中第 j 行 m 列对应的元素; $\theta_{jm}(\omega_{ml})$ 为 $H_{jm}(\omega_{ml})$ 的相位角, 可按式(7)计算。

$$\omega_{ml} = (l-1)\Delta\omega + \frac{m}{n}\Delta\omega, \quad l=1,2,\dots,N \quad (6)$$

$$\theta_{jm}(\omega_{ml}) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[H_{jm}(\omega_{ml})]}{\text{Re}[H_{jm}(\omega_{ml})]} \right\} \quad (7)$$

式中, $\text{Im}[H_{jm}(\omega_{ml})]$ 和 $\text{Re}[H_{jm}(\omega_{ml})]$ 分别为 $H_{jm}(\omega_{ml})$ 的虚部和实部。Deodatis 理论表明, 当 $\Delta\omega$ 接近零, 即 N 趋向于无穷大时, 由式(5)模拟的脉动风速可以较好的匹配目标功率谱模型和目标相关函数。

2 基于 Hermite 插值的简化方法

在上述 Deodatis 谐波合成法中, 互谱密度矩阵 \mathbf{S} 在 $[0, \omega_{up}]$ 全频域内需进行 $n \times N$ 次 Cholesky 分解, 这便直接制约了谐波合成法的计算效率。为此, 本文对传统谐波合成法进行简化, 在 $[0, \omega_{up}]$ 区间内按照一定分布规则(如均匀分布)选取数量为 k 的插值点 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k (\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k)$, 在这 k 个插值点处进行 Cholesky 分解以获得 \mathbf{H} 矩阵的精确值。进而, 在区间 $[\omega_i, \omega_{i+1}] (i=1,2,\dots,k-1)$ 内根据插值点处 \mathbf{H} 矩阵的精确值建立插值函数以逼近真实 \mathbf{H} 矩阵。此时, 近似函数选取为 Hermite 插值函数, 简化方法的具体原理如图 1 所示。

Hermite 插值是一种具有保形特征的插值函数, 其不仅能够保证插值点处函数值与真实函数一致, 而且能够实现插值点处一阶导数乃至更高阶导数

与真实函数相同, 这便使得 Hermite 插值更加易于逼近真实函数。本文采用三阶 Hermite 插值, 即能同时保证插值函数在插值点处的函数值与一阶导数和原函数一致。为建立插值区间内 $[\omega_i, \omega_{i+1}]$ 的三阶 Hermite 函数, 必须获知插值点处的函数值与一阶导数。对于插值点处的一阶导数, 本文通过在各插值点邻近位置附加插值点, 利用插值点处的函数值与邻近点 $\omega_i + \Delta\omega$ 的差商近似获得, 即:

$$H'_s(\omega_i) = \frac{H_s(\omega_i + \Delta\omega) - H_s(\omega_i)}{\Delta\omega} \quad (8)$$

式中, $H_s(\omega_i)$ 表示 \mathbf{H} 矩阵中任意元素在 ω_i 处的取值, $H'_s(\omega_i)$ 为相应的一阶导数。只要 $\Delta\omega$ 充分小, 则式(8)即可逼近原函数的一阶导数。结合插值点处 \mathbf{H} 矩阵中各元素的函数值与一阶导数值, 即可建立区间 $[\omega_i, \omega_{i+1}]$ 内的 Hermite 插值函数, 具体为:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\omega) = \mathbf{H}(\omega_i) + \mathbf{a}_1(\omega - \omega_i) + \mathbf{a}_2(\omega - \omega_i)^2 + \mathbf{a}_3(\omega - \omega_i)^2(\omega - \omega_{i+1}) \quad (9)$$

式中: $\tilde{\mathbf{H}}(\omega)$ 为 $\mathbf{H}(\omega)$ 在区间 $[\omega_i, \omega_{i+1}]$ 内的近似函数; $\mathbf{H}(\omega_i)$ 为 \mathbf{H} 矩阵在插值点 ω_i 处的函数值; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 为 $\mathbf{H}(\omega_i), \mathbf{H}(\omega_{i+1}), \mathbf{H}'(\omega_i), \mathbf{H}'(\omega_{i+1})$ 表示的差商, 可分别按下式计算:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{H}'(\omega_i) \quad (10a)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\omega^2} [\mathbf{H}(\omega_{i+1}) - \mathbf{H}(\omega_i) - \omega \mathbf{H}'(\omega_i)] \quad (10b)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\omega^3} \{ \omega [\mathbf{H}'(\omega_i) + \mathbf{H}'(\omega_{i+1})] - 2[\mathbf{H}(\omega_{i+1}) - \mathbf{H}(\omega_i)] \} \quad (10c)$$

式中: $\omega = \omega_{i+1} - \omega_i$ 为插值间距; $\mathbf{H}'(\omega_i), \mathbf{H}'(\omega_{i+1})$ 为 $\mathbf{H}(\omega)$ 中各元素在插值点 ω_i, ω_{i+1} 处一阶导数形成的对应矩阵。

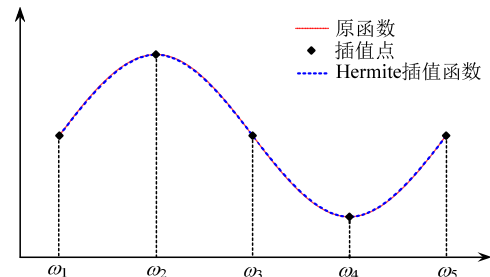


图 1 基于 Hermite 插值的简化方法的基本原理

Fig.1 Fundamental principle of reduced method based on Hermite interpolation

结合式(9)便可在 $k-1$ 个插值区间内建立起 \mathbf{H} 矩阵在全频域内的近似表达 $\tilde{\mathbf{H}}$, 从而式(5)可改写为:

$$f_j(t) = 2\sqrt{\Delta\omega} \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N |\tilde{H}_{jm}(\omega_{ml})| \cos(\omega_{ml}t - \theta(\omega_{ml}) + \phi_{ml}), \quad j=1,2,\dots,n \quad (11)$$

式中, $\tilde{H}_{jm}(\omega_{ml})$ 是 $\tilde{\mathbf{H}}$ 矩阵第 j 行 m 列的元素。

采用上述基于 Hermite 插值的简化谐波合成法后, 互谱密度矩阵 \mathbf{S} 的 Cholesky 分解次数将由 $n \times N$ 次缩减为 $n \times 2k$ 次, 这便可大幅度提高传统谐波合成法的计算效率。同时, 由于 Hermite 插值的采用, 近似下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{H}}$ 在全频域内保留着连续可导的性质, 只要插值点数量选取合理, 近似矩阵 $\tilde{\mathbf{H}}$ 便可较好的逼近真实 \mathbf{H} 矩阵, 从而使得模拟脉动风场具有较高的保真度。

由于计算机仅能处理离散数据, 实际模拟的脉

动风速并非时间的严格连续函数, 通常采用有限时间点的脉动风速来替代整个时长范围的连续函数, 只要时间步长 Δt 足够小, 所模拟的脉动风速仍可反映其连续函数的特征。在离散域内, 上述 Deodatis 法和基于 Hermite 插值的简化方法均可进一步引入快速傅里叶变换以进一步提高谐波叠加的计算效率^[10]。

3 数值算例

以图 2 所示主跨 2×1080 m 的某三塔两跨悬索桥为例, 分别采用本文推导的基于 Hermite 插值的简化方法、三次 Lagrange 插值法^[14]和传统 Deodatis 谐波合成法对主梁顺风向风场进行模拟。主梁均匀布置 109 个模拟点, 从左往右依次编号为 1~109, 相邻模拟点间距为 20 m。

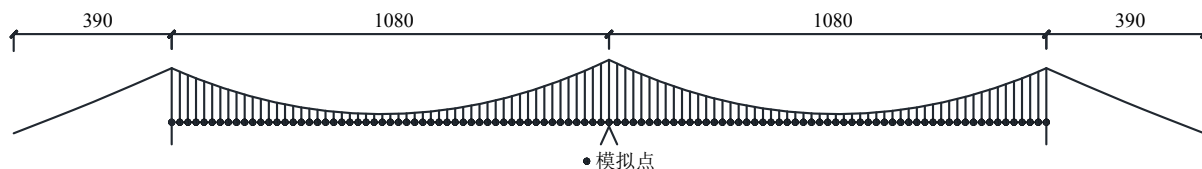


图 2 风场模拟点分布 /m

Fig.2 Distribution of simulated points for wind field

根据现行抗风设计规范^[16], 主梁顺风向风谱采用 Simiu 谱, 其在圆频率下的具体表达式为:

$$S_u(\omega) = \frac{1}{2\pi U} \frac{Z}{(1+50f)^{5/3}} \frac{200u_*^2}{(2\pi U)^2} \quad (12)$$

式中: $S_u(\omega)$ 为脉动风功率谱密度; Z 为模拟点处高度, 该桥主梁高度为 68 m; U 为模拟点处平均风速, 根据规范取为 35.9 m/s; u_* 为摩阻速度; ω 为脉动风的圆频率; $f = \omega Z / (2\pi U)$ 。

模拟过程中的其他具体参数选择包括:

- 1) 空间相干函数: Davenport 相干函数, 空间相关系数取 10;
- 2) 频率分段数 $N = 2048$, $M = 2N$;
- 3) 截止频率 $\omega_{up} = \pi$;
- 4) 频率增量 $\Delta\omega = 0.00049\pi$;
- 5) 时间间隔 $\Delta t = 1$ s;
- 6) 插值点分布型式: 指数分布;
- 7) 插值间距: $128\Delta\omega$ 。

在 Intel Core i5-2320CPU、4G 内存、64bit 配置的计算机上, 基于 MATLAB 平台采用三种方法分别模拟了 4096 s 的主梁脉动风速时程, 模拟耗时如表 1 所示。采用传统 Deodatis 方法需要耗费 18.371 min; 采用三次 Lagrange 插值法, Cholesky

分解次数由 107×2048 次缩减为 107×17 次, 因而模拟耗时仅需 5.481 min, 模拟效率相比传统谐波合成法提高了 70.2%; 当采用 Hermite 插值法, 模拟耗时为 5.573 min, 模拟效率提高了 69.7%, 相比三次 Lagrange 插值法多耗费 5.5 s, 这主要由于 Hermite 插值法比三次 Lagrange 插值法需多进行 107×17 次 Cholesky 分解。总体而言, Hermite 插值法与三次 Lagrange 插值法均能显著提高传统谐波合成法的模拟效率, 二者在模拟耗时方面相差不大。必须指出, 本算例基于 MATLAB 进行计算, 若采用 C++、Fortran 等编程语言则在模拟耗时上会有所差异, 但所得结论亦然相同。

表 1 风场模拟方法耗时对比

Table 1 Comparison of consumed time by different methods for wind field simulation

方法	模拟耗时/min	效率提升比例 η
传统 Deodatis 方法	18.371	—
三次 Lagrange 插值法	5.481	70.2%
Hermite 插值法	5.573	69.7%

注: 效率提升比例 $\eta = (\text{传统 Deodatis 方法耗时} - \text{简化方法耗时}) / \text{传统 Deodatis 方法耗时}$ 。

模拟误差是评判简化方法有效性的另一重要指标, 由于 Hermite 插值法与三次 Lagrange 插值法

均对 H 矩阵的计算进行简化,因而误差的大小主要源于对 H 矩阵模拟准确度的高低。为此,分别将 Hermite 插值法与三次 Lagrange 插值法计算的 H 矩阵与传统 Deodatis 谐波合成法生成的 H 矩阵进行了对比,对比结果表明:① Hermite 插值保证了插值点处的函数值和斜率与原函数一致,因而采用 Hermite 插值法模拟的 H 矩阵中的元素与 Deodatis 法能够完全吻合;② Lagrange 插值法仅能保证插值点处的函数值与原函数一致,对于 H 矩阵中对角线元素,三次 Lagrange 插值法的模拟结果与 Deodatis 方法基本一致,而对于非对角线元素,模拟值在某些插值区间内存在较大波动而难以较好地吻合目标值。以 H 矩阵第 40 号对角线元素和第 100 行 50 列的非对角线元素为代表,采用 Hermite 插值法、三次 Lagrange 插值法模拟的 H 矩阵元素与理论值的对比如图 3 所示。

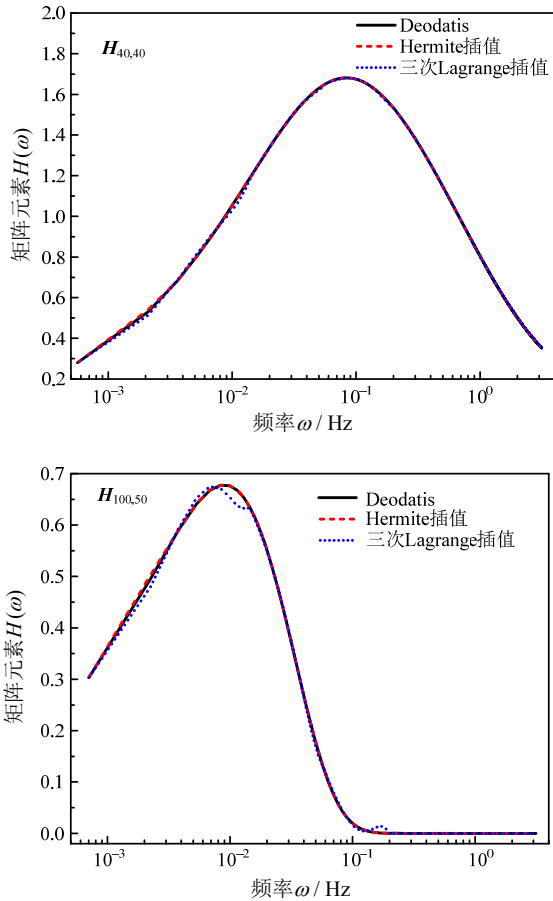


图 3 各风场模拟方法计算的 H 矩阵中元素精确性的对比
Fig.3 Comparison of accuracy of elements in Matrix H calculated by different simulating methods

综合而言, Hermite 插值法不仅能够显著提高传统谐波合成法的模拟效率,其模拟精度也基本能够与传统方法达到同一水准。虽然 Hermite 插值法

的模拟效率略低于三次 Lagrange 插值法,但其对 H 矩阵的模拟精度明显高出一个层次,因而 Hermite 插值法在风场模拟中更优于三次 Lagrange 插值法。以第 20 号和第 100 号模拟点为例,基于 Hermite 插值法模拟的主梁脉动风速时程如图 4 所示。

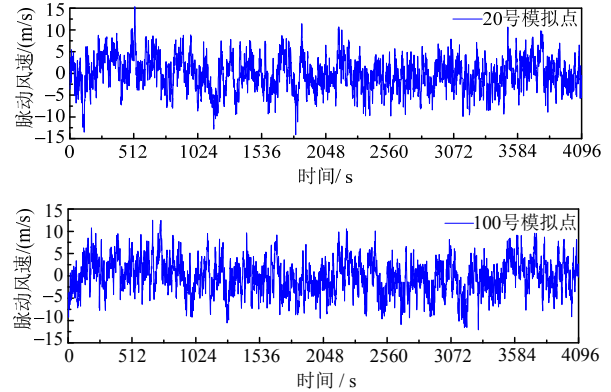


图 4 基于 Hermite 插值法所模拟的主梁脉动风速
Fig.4 Simulated fluctuating wind velocities of main girder based on Hermite interpolation method

为检验基于 Hermite 插值法所模拟脉动风场的准确性与有效性,分别从功率谱密度与相关函数两个角度对模拟结果进行了验证,如图 5 和图 6 所示。对比结果表明,各模拟点处模拟脉动风速的功率谱密度均能与目标谱较好吻合,表明模拟风场在频域内完全符合 Simiu 谱的频率分布特征;模拟脉动风

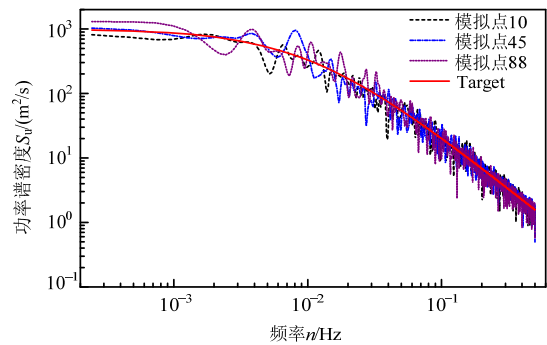
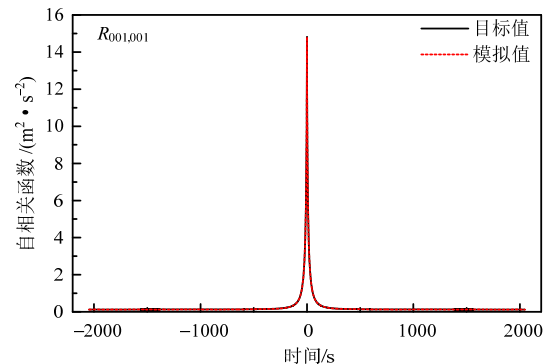


图 5 模拟脉动风速的功率谱与目标谱的对比
Fig.5 Power spectral density of simulated fluctuating wind versus target values



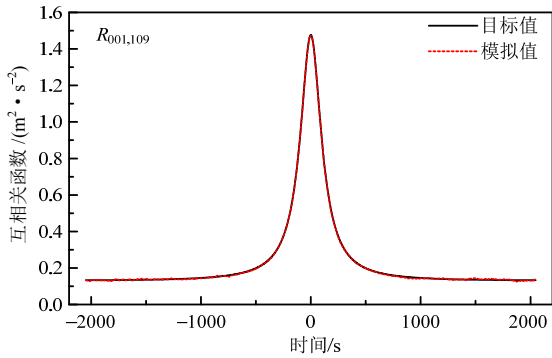


图6 模拟脉动风速的自/互相关函数与目标值的对比

Fig.6 Auto-/Cross-correlation function of simulated fluctuating wind versus target values

速的自/互相关函数与目标相关函数也基本表现一致。因此，虽然基于 Hermite 插值的简化模拟方法对 H 矩阵进行了插值近似，但其所模拟的脉动风速仍具有较高的保真度，完全适用于大跨度桥梁桥址区脉动风场的快速有效模拟。

4 插值间距的优化分析

为进一步开展简化方法的优化分析，在上述参数的基础上，分析了插值间距对模拟效率与模拟误差的影响，如图 7 所示。其中，模拟误差定义为精确 H 矩阵与近似 H 矩阵的平均差异，如下式所示： $E =$

$$E = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \left| \frac{H_{jm} \left(l\Delta\omega + \frac{m}{n} \Delta\omega \right) - \tilde{H}_{jm} \left(l\Delta\omega + \frac{m}{n} \Delta\omega \right)}{H_{jm} \left(l\Delta\omega + \frac{m}{n} \Delta\omega \right)} \right| \quad (13)$$

式中， S 为 H 矩阵参与计算的元素总数。

由图 7(a)可知，简化方法模拟耗时随着插值间距的增加呈减小的趋势。在 $[\Delta\omega, 40\Delta\omega]$ 区间内，模拟耗时随插值间距的增大迅速减小；而当插值间距超过 $40\Delta\omega$ 时，模拟耗时变化渐趋平缓。上述现象主要由于 Cholesky 分解次数与插值间距成负相关，起始阶段增大插值间距会使 Cholesky 分解的次数迅速降低，从而风场模拟耗时也相应大幅度减少；而当插值间距增加到一定程度后，Cholesky 分解的次数基本在一个数量级内变化，所以风场模拟耗时变化渐趋平缓。

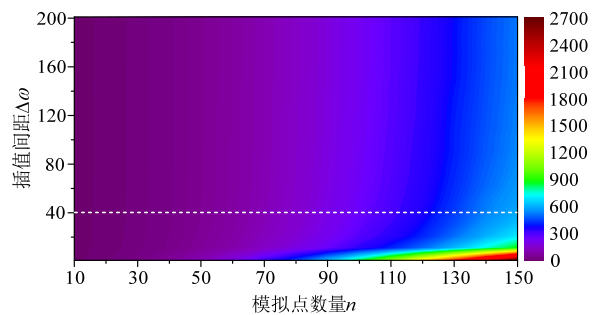
由图 7(b)可知，模拟精度随着插值间距的增加逐渐降低，在 $[\Delta\omega, 160\Delta\omega]$ 区间内的变化较为缓慢，误差均在 6% 以内；当插值间距超过 $160\Delta\omega$ 时，模拟误差随着插值间距的增加迅速增长。若取 3%

作为 H 矩阵的容许误差，当模拟点数量大于 30 时，插值间距的取值范围为 $[\Delta\omega, 140\Delta\omega]$ ；当模拟点数量为 10 时，插值间距的取值范围为 $[\Delta\omega, 160\Delta\omega]$ ；对于 10 个 ~ 30 个模拟点，插值间距上限可在 $140\Delta\omega$ 与 $160\Delta\omega$ 之间线性内插。

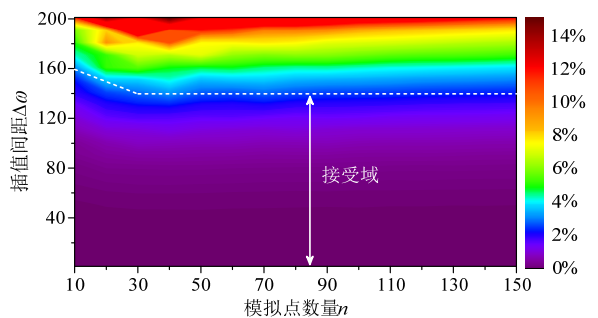
综上所述，插值间距的取值区间可根据模拟耗时与误差共同确定。插值区间的下限由模拟耗时确定，建议取 $40\Delta\omega$ ；区间上限由模拟误差确定，因而其表现为插值点数量的函数，如式(14)所示。从而，插值间距的取值区间为 $[40\Delta\omega, \omega_{up}]$ 。若取区间上限，则模拟误差相对较小；若取区间下限，则模拟效率略有提升。

由于本文所述简化方法的模拟误差与效率主要与模拟点数量有关，与模拟点的具体分布型式无关，因而插值间距的取值区间具有较广的适用性。

$$\omega_{up} = \begin{cases} 160\Delta\omega, & n \leq 10 \\ (170 - n)\Delta\omega, & 10 < n \leq 30 \\ 140\Delta\omega, & n > 30 \end{cases} \quad (14)$$



(a) 对模拟耗时的影响 /s



(b) 对模拟误差的影响

图7 插值间距对模拟效率与误差的影响

Fig.7 Influence of interpolation interval on efficiency and error during simulation

5 结论

本文在传统 Deodatis 谐波合成法的基础上，对互谱密度矩阵分解引入 Hermite 插值，推导了基于 Hermite 插值的简化风场模拟方法。以主跨

2×1080 m 的某三塔悬索桥主梁风场模拟为例,对比了传统 Deodatis 谐波合成法、三次 Lagrange 插值法和 Hermite 插值法的模拟耗时与模拟精度, 所得主要结论包括:

(1) 采用 Hermite 插值法与三次 Lagrange 插值法均能显著提高传统谐波合成法的模拟效率。就模拟 4096 s 的脉动风速时程而言, 传统方法需耗时 18.371 min, 而 Hermite 插值法与三次 Lagrange 插值法分别只需耗费 5.573 min、5.481 min, 模拟效率均能提高 70% 左右, 二者在模拟效率方面仅存在微小差异。

(2) Hermite 插值保证了插值点处的函数值和斜率与原函数一致, 因而采用 Hermite 插值法模拟的 H 矩阵中的元素与 Deodatis 法能够完全吻合; 而 Lagrange 插值法仅能保证插值点处的函数值与原函数一致, 对于 H 矩阵中对角线元素, 三次 Lagrange 插值法的模拟结果与 Deodatis 方法基本一致, 而对于非对角线元素, 模拟值在某些插值区间存在较大波动而难以较好地吻合目标值。

(3) 采用基于 Hermite 插值的简化方法, 模拟脉动风速的功率谱与相关函数均能与目标值吻合较好, 说明所模拟的脉动风速具有较高的保真度, 进一步表明该简化方法适用于大跨度桥梁桥址区脉动风场的快速有效模拟。

(4) 基于简化方法, 插值间距可根据模拟效率与误差进行优化。在较高的模拟效率与 3% 的模拟误差前提下, 插值间距的建议取值区间为 $[40\Delta\omega, \omega_{up}]$, 区间上限根据模拟点数量确定, 介于 140 倍~160 倍的 $\Delta\omega$ 之间。

参考文献:

- [1] 项海帆, 葛耀君, 朱乐东, 等. 现代桥梁抗风理论与实践[M]. 北京: 人民交通出版社, 2005: 1—6.
Xiang Haifan, Ge Yaojun, Zhu Ledong, et al. Modern theory and practice on bridge wind resistance [M]. Beijing: China Communications Press, 2005: 1—6. (in Chinese)
- [2] 陈政清. 桥梁风工程[M]. 北京: 人民交通出版社, 2005: 1—8.
Chen Zhengqing. Bridge wind engineering [M]. Beijing: China Communications Press, 2005: 1—8. (in Chinese)
- [3] 王浩, 陶天友, 郭彤, 等. 基于实测与规范风谱的三塔悬索桥抖振性能对比[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2013, 43(5): 986—992.
Wang Hao, Tao Tianyou, Guo Tong, et al. Comparable study on buffeting performance of triple-tower suspension bridge based on measured wind spectrum and specification wind spectrum [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2013, 43(5): 986—992. (in Chinese)
- [4] Carassale L, Solari G. Monte Carlo simulation of wind velocity fields on complex structures [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2006, 94(5): 323—339.
- [5] Huang Guoqing, Liao Haili, Li Mingshui. New formulation of Cholesky decomposition and applications in stochastic simulation [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2013, 34: 40—47.
- [6] Li Yongle, Liao Haili, Qiang Shizhong. Simplifying the simulation of stochastic wind velocity fields for long cable-stayed bridges [J]. Computers & Structures, 2004, 82(20/21): 1591—1598.
- [7] Kareem A. Numerical simulation of wind effects: a probabilistic perspective [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2008, 96(10/11): 1472—1497.
- [8] 葛耀君. 大跨度悬索桥抗风[M]. 北京: 人民交通出版社, 2011: 391—397.
Ge Yaojun. Wind resistance of long span suspension bridges [M]. Beijing: China Communications Press, 2011: 391—397. (in Chinese)
- [9] Shinozuka M., Jan C. M. Digital simulation of random processes and its applications [J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 25(1): 111—128.
- [10] Deodatis G. Simulation of ergodic multivariate stochastic processes [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1996, 122(8): 778—787.
- [11] Yang W W, Chang T Y P, Chang C C. An efficient wind field simulation technique for bridges [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1997, 67/68(67/68): 697—708.
- [12] Yang J N. Simulation of random envelope processes [J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 25(1): 73—85.
- [13] 曹映泓, 项海帆, 周颖. 大跨度桥梁随机风场的模拟[J]. 土木工程学报, 1998, 31(3): 72—79.
Cao Yinghong, Xiang Haifan, Zhou Ying. Simulation of stochastic wind field based on long-span bridge [J]. China Civil Engineering Journal, 1998, 31(3): 72—79. (in Chinese)
- [14] Ding Q S, Zhu L D, Xiang H F. Simulation of stationary Gaussian stochastic wind velocity field [J]. Wind and Structures, 2006, 9(3): 231—243.
- [15] Simiu E, Scanlan R H. Wind effects on structures: an introduction to wind engineering [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1978: 57—61.
- [16] JTG/T D60-01-2004, 公路桥梁抗风设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2004.
JTG/T D60-01-2004, Wind-resistant design specification for highway bridges [S]. Beijing: China Communications Press, 2004. (in Chinese)