第61卷第1期 数学学报中文版 Vol.61, No.1
2018年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)01-0097-10 **文献标识码: A**

一个自入射 Koszul 代数的 Hochschild 同调与循环同调

李兆晖　徐运阁

湖北大学数学与统计学学院 武汉 430062
E-mail: 1219846887@qq.com; xuy@hubu.edu.cn

汪　任

中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026
E-mail: renw@mail.ustc.edu.cn

摘　要　代数的 Hochschild 同调群与其对应的 Gabriel 箭图的循环圈有着紧密的联系. 本文基于 Furuya 构造的一个四点自入射 Koszul 代数的极小投射双模分解, 用组合的方法计算了该代数的 Hochschild 同调空间的维数, 并用循环圈的语言给出该代数的 Hochschild 同调空间的一组 **k**- 基. 进一步, 当基础域 **k** 的特征为零时, 我们也得到了该代数的循环同调群的维数.

关键词　Hochschild 同调; 循环圈; 循环同调; Koszul 代数; 自入射代数
MR(2010) 主题分类　16E40
中图分类　O154.2

Hochschild Homology and Cyclic Homology of a Self-injective Koszul Algebra

Zhao Hui LI　Yun Ge XU

Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062*, P. R. China*
E-mail: 1219846887*@qq.com*; *xuy@hubu.edu.cn*

Ren WANG

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*, P. R. China*
E-mail: *renw@mail.ustc.edu.cn*

Abstract　There is a close connection between Hochschild homology groups of a **k**-algebra and cycles of the Gabriel quiver associated to the **k**-algebra. In this paper,

收稿日期: 2016-10-31; 接受日期: 2017-04-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11371186, 11571341)
通讯作者: 徐运阁

based on the minimal projective bimodule resolution of a self-injective Koszul four-point algebra constructed by Furuya, we calculate the dimensions of Hochschild homology spaces of the algebra by using combinatorial methods, and give a **k**-basis of every Hochschild homology space in terms of cycles. Moreover, we obtain the dimensions of cyclic homology groups of the algebra when the base field **k** is of zero characteristic.

Keywords Hochschild homology; cycle; cyclic homology; Koszul algebra; self-injective algebra
MR(2010) Subject Classification 16E40
Chinese Library Classification O154.2

1 引言

自同调代数创立伊始, Hochschild (上) 同调理论便作为同调代数的重要内容之一, 它在群论、Lie 理论、代数拓扑、K- 理论、交换代数、代数几何、非交换代数、非交换几何等诸多数学分支中有着极其重要的应用. 代数的 Hochschild 同调为微分形式模的非交换推广, 而与之密切相关的循环同调既是 de Rham 同调的非交换版本又是代数 K- 理论的 Lie 模拟, 它们均为非交换几何的重要内容 [1–3]. Hochschild 同调与上同调也是代数的二个比较精细的 Morita 等价、Tilting 等价以及导出等价下的不变量, 在代数的表示理论中扮演着重要的角色 [4]. 本文将考虑一个四点自入射 Koszul 代数的 Hochschild 同调群与循环同调群.

设 $\mathbf{k}$ 是一个特征不为 2 的代数闭域, 箭图 Q 为

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "a_0"] \arrow[r, shift right, "b_0"'] & 1 \arrow[d, shift right, "b_1"'] \arrow[d, shift left, "a_1"] \\ 3 \arrow[u, shift left, "a_3"] \arrow[u, shift right, "b_3"'] & 2 \arrow[l, shift right, "b_2"'] \arrow[l, shift left, "a_2"] \end{tikzcd}$$

本文总假定 $A = \mathbf{k}Q/I$, 其中理想 I 由 xy, x^2+y^2, yx 生成, 这里

$$x = \sum_{i=0}^{3} a_i, \quad y = \sum_{i=0}^{3} b_i.$$

代数 A 是一个自入射特殊双列代数, 因而是 tame 表示型代数. 而且该代数还是 Koszul 代数, 在代数的表示理论中扮演重要的角色. Furuya [5] 构造了代数 A 的极小投射双模分解, 并计算了该代数的 Hochschild 上同调群. 尽管代数的 Hochschild 同调群与上同调群之间存在着对偶

$$D\mathrm{HH}_i(A, A) \cong \mathrm{HH}^i(A, D(A)),$$

其中 $D = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(-, \mathbf{k})$, 但这既不是线性空间意义下的对偶, 也不是范畴意义下的对偶. 一般情况下, 计算代数的 Hochschild (上) 同调是困难的 [6, 7]. 本文将基于这一极小投射双模分解, 进一步用组合的方法计算该代数的 Hochschild 同调空间的维数, 并用循环圈的语言给出该代数的 Hochschild 同调空间的一组 $\mathbf{k}$- 基, 希望较清晰地揭示该代数的 Hochschild 同调群与其对应的 Gabriel 箭图的循环圈之间的本质联系. 基于代数的 Hochschild 同调群与循环同调群之间的紧密联系, 在基础域 $\mathbf{k}$ 的特征为零时, 我们也得到了该代数的循环同调群的维数.

2 预备知识

记 e_i 为对应于箭图 Q 的顶点 i 的平凡路. 对于 Q 中的路 p, 我们记 $o(p)$ 和 $t(p)$ 为路 p 的始点与终点. 箭向的合成从左往右, 所有的 A- 模均为右 A- 模.

我们首先回顾 Furuya 在文 [5] 构造的代数 A 的极小投射 A-A- 双模分解.

定义 2.1 令集合 $\mathscr{G}^0=\{\mathfrak{g}_{i,0}^0:=e_i\mid 0\le i\le 3\}$. 根据文 [5, 定义 2.1], 对于任意的 $n\ge 1$, $0\le i\le 3$, $0\le j\le n$, 定义如下元素:

(a) 若 n 是奇数, 那么

$$\mathfrak{g}_{i,j}^n=\begin{cases}\mathfrak{g}_{i,0}^{n-1}x, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } j=0 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,0}^{n-1}y, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } j=0 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,j-1}^{n-1}y+\mathfrak{g}_{i,j}^{n-1}x, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } 1\le j\le n-1 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,j-1}^{n-1}x+\mathfrak{g}_{i,j}^{n-1}y, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } 1\le j\le n-1 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,n-1}^{n-1}y, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } j=n \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,n-1}^{n-1}x, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } j=n \text{ 时}.\end{cases}$$

(b) 若 n 是偶数, 那么

$$\mathfrak{g}_{i,j}^n=\begin{cases}\mathfrak{g}_{i,0}^{n-1}y, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } j=0 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,0}^{n-1}x, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } j=0 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,j-1}^{n-1}x+\mathfrak{g}_{i,j}^{n-1}y, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } 1\le j\le n-1 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,j-1}^{n-1}y+\mathfrak{g}_{i,j}^{n-1}x, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } 1\le j\le n-1 \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,n-1}^{n-1}x, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } j=n \text{ 时},\\ \mathfrak{g}_{i,n-1}^{n-1}y, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } j=n \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $o(\mathfrak{g}_{i,j}^n)=e_i$; 如果 $i+n\equiv k \pmod 4$, 那么 $t(\mathfrak{g}_{i,j}^n)=e_k$. 令集合

$$\mathscr{G}^n=\{\mathfrak{g}_{i,j}^n\mid 0\le i\le 3,\ 0\le j\le n\}.$$

注意到集合 $\mathscr{G}^n$ 中的元素都是一致的, 即对任一 $\gamma\in\mathscr{G}^n$, 都存在顶点 v,w, 使得 $\gamma=v\gamma w$.

为了方便起见, 我们记 $\otimes:=\bigotimes_{\mathbf{k}}$. 定义投射 A-A- 双模

$$P_n=\coprod_{\gamma\in\mathscr{G}^n}Ao(\gamma)\otimes t(\gamma)A\cong\coprod_{\gamma\in\mathscr{G}^n}A\bigotimes_E\gamma\bigotimes_E A,$$

其中 $E\cong\mathbf{k}\times\mathbf{k}\times\mathbf{k}\times\mathbf{k}$ 表示 A 的极大半单子代数. 对于每一个 $\mathfrak{g}_{i,j}^n\in\mathscr{G}^n$, 我们记

$$\mathbf{g}_{i,j}^n=1\bigotimes_E\mathfrak{g}_{i,j}^n\bigotimes_E 1\in A\bigotimes_E\mathfrak{g}_{i,j}^n\bigotimes_E A\cong Ae_i\otimes e_kA.$$

为了定义微分映射, 我们需要下面的引理:

引理 2.2 对于任意的 $n\ge 1$, 我们有

(a) 如果 n 是奇数, 那么

$$\mathfrak{g}_{i,j}^n=\begin{cases}x\mathfrak{g}_{i+1,0}^{n-1}, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } j=0 \text{ 时},\\ y\mathfrak{g}_{i+1,0}^{n-1}, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } j=0 \text{ 时},\\ y\mathfrak{g}_{i+1,j-1}^{n-1}+x\mathfrak{g}_{i+1,j}^{n-1}, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } 1\le j\le n-1 \text{ 时},\\ x\mathfrak{g}_{i+1,j-1}^{n-1}+y\mathfrak{g}_{i+1,j}^{n-1}, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } 1\le j\le n-1 \text{ 时},\\ y\mathfrak{g}_{i+1,n-1}^{n-1}, & \text{当 } i=0,2 \text{ 和 } j=n \text{ 时},\\ x\mathfrak{g}_{i+1,n-1}^{n-1}, & \text{当 } i=1,3 \text{ 和 } j=n \text{ 时}.\end{cases}$$

(b) 如果 n 是偶数, 那么

$$\mathfrak{g}^n_{i,j}=\begin{cases} x\mathfrak{g}^{n-1}_{i+1,0}, & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ j=0 \text{ 时},\\ y\mathfrak{g}^{n-1}_{i+1,0}, & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ j=0 \text{ 时},\\ y\mathfrak{g}^{n-1}_{i+1,j-1}+x\mathfrak{g}^{n-1}_{1+i,j}, & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ 1\leq j\leq n-1 \text{ 时},\\ x\mathfrak{g}^{n-1}_{i+1,j-1}+y\mathfrak{g}^{n-1}_{i+1,j}, & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ 1\leq j\leq n-1 \text{ 时},\\ y\mathfrak{g}^{n-1}_{i+1,n-1}, & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ j=n \text{ 时},\\ x\mathfrak{g}^{n-1}_{i+1,n-1}, & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ j=n \text{ 时}. \end{cases}$$

证明 由定义 2.1, 直接验证即得.

现在我们可以定义对每一个 $n\geqslant 1$, 映射 $\delta_n: P_n\to P_{n-1}$ 如下所示:

(a) 如果 n 是奇数, 那么

$$\mathbf{g}^n_{i,j}\mapsto\begin{cases} \mathbf{g}^{n-1}_{i,0}x-x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,0}, & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ j=0 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,0}y-y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,0}, & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ j=0 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,j-1}y+\mathbf{g}^{n-1}_{i,j}x-(y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j-1}+x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j}), & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ 1\leq j\leq n-1 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,j-1}x+\mathbf{g}^{n-1}_{i,j}y-(x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j-1}+y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j}), & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ 1\leq j\leq n-1 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,n-1}y-y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,n-1}, & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ j=n \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,n-1}x-x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,n-1}, & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ j=n \text{ 时}. \end{cases}$$

(b) 如果 n 是偶数, 那么

$$\mathbf{g}^n_{i,j}\mapsto\begin{cases} \mathbf{g}^{n-1}_{i,0}y+x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,0}, & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ j=0 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,0}x+y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,0}, & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ j=0 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,j-1}x+\mathbf{g}^{n-1}_{i,j}y+(y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j-1}+x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j}), & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ 1\leq j\leq n-1 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,j-1}y+\mathbf{g}^{n-1}_{i,j}x+(x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j-1}+y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,j}), & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ 1\leq j\leq n-1 \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,n-1}x+y\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,n-1}, & \text{当 } i=0,2 \ \text{ 和 } \ j=n \text{ 时},\\ \mathbf{g}^{n-1}_{i,n-1}y+x\mathbf{g}^{n-1}_{i+1,n-1}, & \text{当 } i=1,3 \ \text{ 和 } \ j=n \text{ 时}. \end{cases}$$

命题 2.3 [5] 复形

$$(\mathbb{P},\delta):\cdots\to P_{n+1}\xrightarrow{\delta_{n+1}}P_n\xrightarrow{\delta_n}\cdots\xrightarrow{\delta_2}P_1\xrightarrow{\delta_1}P_0\xrightarrow{\delta_0}A\to 0$$

是代数 A 的极小投射 A^e 分解, $\delta_0: P_0\to A$ 是乘法映射.

3 同调维数

本节将用循环圈的语言, 用组合的方法计算代数 A 的 Hochschild 同调空间的维数与基. 我们的方法是将 Hochschild 同调复形转化为由循环圈所描述的 $\mathbf{k}$- 线性复形, 然后用线性代数的方法计算该线性复形的同调群 [6]. 设 X,Y 为 $\mathbf{k}Q$ 的任意子集, 定义集合

$$X\odot Y=\{(x,y)\,|\,x\in X,\,y\in Y,\,o(x)=t(y),\,o(y)=t(x)\},$$

并称 $X\odot Y$ 中的元素 (二元对) 为循环圈. 以集合 $X\odot Y$ 为基的向量空间记为 $\mathbf{k}(X\odot Y)$.

将函子 $-\bigotimes_{A^e}A$ 作用在 $(\mathbb{P},\delta)$ 的删除复形上, 我们可得到链复形

$$\cdots\to P_{n+1}\bigotimes_{A^e}A\xrightarrow{\partial_{n+1}}P_n\bigotimes_{A^e}A\xrightarrow{\partial_n}P_{n-1}\bigotimes_{A^e}A\xrightarrow{\partial_{n-1}}\cdots\xrightarrow{\partial_2}P_1\bigotimes_{A^e}A\xrightarrow{\partial_1}P_0\bigotimes_{A^e}A\to 0,$$

其中 $\partial_n=\delta_n\bigotimes_{A^e}\mathrm{id}$.

我们选取 $B=\{e_0,e_1,e_2,e_3,a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2,b_3,a_0a_1,a_1a_2,a_2a_3,a_3a_0\}$ 为代数 A 的一组 k- 基, 其中 $a_ia_{i+1}=-b_ib_{i+1}$, 则我们有同构

$$\varphi:\mathbf{k}(\mathscr{G}^n\odot B)\to P_n\bigotimes_{A^e}A,(\gamma,b)\mapsto\left(1\bigotimes_E\gamma\bigotimes_E 1\right)\bigotimes_{A^e}b.$$

事实上

$$\begin{aligned}P_n\bigotimes_{A^e}A&\cong\bigoplus_{\gamma\in\mathscr{G}^n}((o(\gamma)\otimes t(\gamma))A^e)\bigotimes_{A^e}A\cong\bigoplus_{\gamma\in\mathscr{G}^n}o(\gamma)\otimes t(\gamma)\bigotimes_{E^e}A\\&\cong\bigoplus_{i,j}e_i\mathscr{G}^ne_j\otimes e_jAe_i\cong\mathbf{k}(\mathscr{G}^n\odot B),\end{aligned}$$

则我们有链复形的同构

$$\begin{array}{ccccccccccccc}\cdots\xrightarrow{d_{n+1}}&\mathbf{k}(\mathscr{G}^n\odot B)&\xrightarrow{d_n}&\mathbf{k}(\mathscr{G}^{n-1}\odot B)&\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_2}&\mathbf{k}(\mathscr{G}^1\odot B)&\xrightarrow{d_1}&\mathbf{k}(\mathscr{G}^0\odot B)&\longrightarrow 0\\ &\Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_n}&&\Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-1}}&&\Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_1}&&\Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_0}&\\ \cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}&P_n\bigotimes_{A^e}A&\xrightarrow{\partial_n}&P_{n-1}\bigotimes_{A^e}A&\xrightarrow{\partial_{n-1}}\cdots\xrightarrow{\partial_2}&P_1\bigotimes_{A^e}A&\xrightarrow{\partial_1}&P_0\bigotimes_{A^e}A&\longrightarrow 0.\end{array}$$

为了计算代数 A 的 Hochschild 同调群, 只需计算上图第一行复形的同调群, 即 $\mathrm{HH}_n(A)\cong\operatorname{Ker}d_n/\operatorname{Im}d_{n+1}$. 直接计算可得:

引理 3.1　对任意的 $n\geq 0$, 我们有

$$\mathscr{G}^n\odot B=\begin{cases}\{(\mathbf{g}^n_{0,j},e_0),(\mathbf{g}^n_{1,j},e_1),(\mathbf{g}^n_{2,j},e_2),(\mathbf{g}^n_{3,j},e_3)\,|\,0\leq j\leq n\}, & \text{当 } n\equiv 0 \pmod 4 \text{ 时};\\ \emptyset, & \text{当 } n\equiv 1 \pmod 4 \text{ 时};\\ \{(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3),(\mathbf{g}^n_{1,j},a_3a_0),(\mathbf{g}^n_{2,j},a_0a_1),(\mathbf{g}^n_{3,j},a_1a_2)\,|\,0\leq j\leq n\}, & \text{当 } n\equiv 2 \pmod 4 \text{ 时};\\ \{(\mathbf{g}^n_{0,j},a_3),(\mathbf{g}^n_{0,j},b_3),(\mathbf{g}^n_{1,j},a_0),(\mathbf{g}^n_{1,j},b_0),(\mathbf{g}^n_{2,j},a_1),\\ \quad(\mathbf{g}^n_{2,j},b_1),(\mathbf{g}^n_{3,j},a_2),(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)\,|\,0\leq j\leq n\}, & \text{当 } n\equiv 3 \pmod 4 \text{ 时}.\end{cases}$$

由于 $d_n=\varphi^{-1}_{n-1}\partial_n\varphi_n$, 经过比较冗长的计算可得:

(1) 当 $n\equiv 0 \pmod 4$, $n>0$ 并且 $1\leq j\leq n-1$ 时,

$$\begin{aligned}
d_n((\mathbf{g}^n_{0,0},e_0))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{0,0},b_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{1,0},a_0),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{0,j},e_0))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j-1},a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},b_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j-1},b_0)+(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_0),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{0,n},e_0))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{0,n-1},a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{1,n-1},b_0),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{1,0},e_1))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{1,0},a_0)+(\mathbf{g}^{n-1}_{2,0},b_1),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{1,j},e_1))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j-1},b_0)+(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_0)+(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j-1},a_1)+(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j},b_1),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{1,n},e_1))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{1,n-1},b_0)+(\mathbf{g}^{n-1}_{2,n-1},a_1),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{2,0},e_2))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{2,0},b_1)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,0},a_2),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{2,j},e_2))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j-1},a_1)+(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j},b_1)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j-1},b_2)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_2),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{2,n},e_2))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{2,n-1},a_1)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,n-1},b_2),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{3,0},e_3))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{3,0},a_2)+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,0},b_3),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{3,j},e_3))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j-1},b_2)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_2)+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j-1},a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},b_3),\\
d_n((\mathbf{g}^n_{3,n},e_3))&=(\mathbf{g}^{n-1}_{3,n-1},b_2)+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,n-1},a_3).
\end{aligned}$$

(2) 当 $n \equiv 1,\ 2 \pmod 4$ 时, $d_n = 0$.

(3) 当 $n \equiv 3 \pmod 4$ 时,

$$
\begin{aligned}
&d_n((\mathbf{g}^n_{0,j}, a_3)) = (\mathbf{g}^{n-1}_{0,j}, a_2a_3) - (\mathbf{g}^{n-1}_{1,j}, a_3a_0)\ (0 \le j \le n-1),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{0,n}, a_3)) = 0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{0,0}, b_3)) = 0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{0,j}, b_3)) = -(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j-1}, a_2a_3) + (\mathbf{g}^{n-1}_{1,j-1}, a_3a_0)\ (1 \le j \le n),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{1,0}, a_0)) = 0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{1,j}, a_0)) = (\mathbf{g}^{n-1}_{1,j-1}, a_3a_0) - (\mathbf{g}^{n-1}_{2,j-1}, a_0a_1)\ (1 \le j \le n),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{1,j}, b_0)) = -(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j}, a_3a_0) + (\mathbf{g}^{n-1}_{2,j}, a_0a_1)\ (0 \le j \le n-1),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{1,n}, b_0)) = 0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{2,j}, a_1)) = (\mathbf{g}^{n-1}_{2,j}, a_0a_1) - (\mathbf{g}^{n-1}_{3,j}, a_1a_2)\ (0 \le j \le n-1),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{2,n}, a_1)) = 0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{2,0}, b_1)) = 0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{2,j}, b_1)) = -(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j-1}, a_0a_1) + (\mathbf{g}^{n-1}_{3,j-1}, a_1a_2)\ (1 \le j \le n),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,0}, a_2)) = 0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,j}, a_2)) = (\mathbf{g}^{n-1}_{3,j-1}, a_1a_2) - (\mathbf{g}^{n-1}_{0,j-1}, a_2a_3)\ (1 \le j \le n),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,j}, b_2)) = -(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j}, a_1a_2) + (\mathbf{g}^{n-1}_{0,j}, a_2a_3)\ (0 \le j \le n-1),\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,n}, b_2)) = 0.
\end{aligned}
$$

(4) 当 $n = 0$ 时, $d_n = 0$.

线性映射 d_n 关于引理 3.1 中的定序基 $\mathscr{G}^n \odot B$ 的矩阵记为 D_n, 则有

命题 3.2

$$
\dim \mathrm{HH}_n A = \begin{cases}
4, & \text{当 } n = 0 \text{ 时;}\\
2n+2, & \text{当 } n \equiv 3 \pmod 4 \text{ 时;}\\
n+1, & \text{当 } n \equiv 2 \pmod 4 \text{ 时;}\\
n+1, & \text{当 } n \equiv 0 \pmod 4, \text{ 且 } n > 0 \text{ 时;}\\
0, & \text{其它.}
\end{cases}
$$

证明 当 $n = 0$ 时,

$$
\mathscr{G}^0 \odot B = \{(\mathbf{g}^0_{0,0}, e_0), (\mathbf{g}^0_{1,0}, e_1), (\mathbf{g}^n_{2,0}, e_2), (\mathbf{g}^n_{3,0}, e_3)\}, \quad D_0 = 0, \quad D_1 = 0,
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
\dim \mathrm{HH}_0(A) &= \dim \mathrm{Ker}\, d_0 - \dim \mathrm{Im}\ d_1\\
&= |(\mathscr{G}^0 \odot B)| - \mathrm{rank} D_0 - \mathrm{rank} D_1\\
&= 4.
\end{aligned}
$$

当 $0<n\equiv 0 \pmod 4$ 时,

$$D_n=\begin{pmatrix} C & 0 & 0 & C\\ B & 0 & 0 & B\\ B & B & 0 & 0\\ C & C & 0 & 0\\ 0 & C & C & 0\\ 0 & B & B & 0\\ 0 & 0 & B & B\\ 0 & 0 & C & C \end{pmatrix}_{8n\times(4n+4)},$$

其中

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times(n+1)},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n\times(n+1)}.$$

经过矩阵的初等变换,

$$D_n\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C\\ 0 & 0 & 0 & B\\ 0 & B & 0 & 0\\ 0 & C & 0 & 0\\ 0 & 0 & C & 0\\ 0 & 0 & B & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{rank}D_n=3(n+1).$$

类似地, 当 $n\equiv 3 \pmod 4$ 时,

$$D_n=\begin{pmatrix} C & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & C\\ -C & B & B & -C & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -B & C & C & C & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C & B & B & C \end{pmatrix}_{4n\times(8n+8)}.$$

显然

$$D_n\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{rank}D_n=3n.$$

当 $n\equiv 1, 2 \pmod 4$ 时, $D_n=0$.

由 $\mathrm{HH}_n(A)=\mathrm{Ker}\,d_n/\mathrm{Im}\,d_{n+1}$ 知

$$\dim\mathrm{HH}_n(A)=\dim\mathrm{Ker}\,d_n-\dim\mathrm{Im}\,d_{n+1}=|\mathscr{G}^n\odot B|-\mathrm{rank}D_n-\mathrm{rank}D_{n+1}.$$

由引理 3.1,

$$|\mathscr{G}^n\odot B|=\begin{cases} 8n+8, & \text{当 } n\equiv 3 \pmod 4 \text{ 时;}\\ 4n+4, & \text{当 } n\equiv 2 \pmod 4 \text{ 时;}\\ 4n+4, & \text{当 } n\equiv 0 \pmod 4 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } n\equiv 1 \pmod 4 \text{ 时,} \end{cases}$$

则命题得证.

进一步地, 我们可以用循环圈的语言刻划代数 A 的 Hochschild 同调空间的一组基.

定理 3.3 对任意的 $n\geq 0$, 我们有

$$\mathrm{HH}_n(A)=\begin{cases}\mathrm{span}\{(\mathbf{g}^0_{0,0},e_0),(\mathbf{g}^0_{1,0},e_1),(\mathbf{g}^0_{2,0},e_2),(\mathbf{g}^0_{3,0},e_3)\}, & \text{当 } n=0 \text{ 时;}\\ \mathrm{span}\{(\mathbf{g}^n_{0,0},e_0),(\mathbf{g}^n_{0,1},e_0),\ldots,(\mathbf{g}^n_{0,n},e_0)\}, & \text{当 } n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4), \text{且 } n>0 \text{ 时;}\\ \mathrm{span}\{(\mathbf{g}^n_{0,0},a_2a_3),(\mathbf{g}^n_{0,1},a_2a_3),\ldots,(\mathbf{g}^n_{0,n},a_2a_3)\}, & \text{当 } n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4) \text{ 时;}\\ \mathrm{span}\{(\mathbf{g}^n_{0,j},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j+1},b_3),(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2) & \\ \qquad +(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2)\,|\,0\leq j\leq n-1\} & \\ \qquad \cup\{(\mathbf{g}^n_{0,n},a_3),(\mathbf{g}^n_{0,0},b_3)\}, & \text{当 } n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4), \text{且 } n>0 \text{ 时;}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

证明 当 $n=0$ 时, $\mathscr{G}^0\odot B=\{(\mathbf{g}^0_{0,0},e_0),(\mathbf{g}^0_{1,0},e_1),(\mathbf{g}^0_{2,0},e_2),(\mathbf{g}^0_{3,0},e_3)\}$. 注意到 $\mathrm{Ker}\,d_0=\mathbf{k}(\mathscr{G}^0\odot B)$ 且 $\mathrm{Im}\,d_1=0$, 故

$$\mathrm{HH}_0(A)=\mathrm{Ker}\,d_0=\mathrm{span}\{(\mathbf{g}^0_{0,0},e_0),(\mathbf{g}^0_{1,0},e_1),(\mathbf{g}^0_{2,0},e_2),(\mathbf{g}^0_{3,0},e_3)\}.$$

现在考虑 $n>0$. 当 $n\equiv 3$ (mod 4) 时, 首先注意到, 对 $0\leq j\leq n-1$,

$$\begin{aligned}
&d_n((\mathbf{g}^n_{0,0},b_3))=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{1,0},a_0)-(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2))=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{2,0},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2))=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,0},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,0},b_3))=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{0,j},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j+1},b_3))\\
&\quad=(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)-(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_3a_0)-(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_3a_0)=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2))\\
&\quad=-(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)-(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{1,j+1},a_0)+(\mathbf{g}^n_{1,j},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2)-(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2))\\
&\quad=(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_3a_0)-(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j},a_0a_1)-(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_3a_0)+(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j},a_0a_1)-(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)\\
&\qquad+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)-(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{2,j},a_1)+(\mathbf{g}^n_{2,j+1},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2))\\
&\quad=(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j},a_0a_1)-(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)-(\mathbf{g}^{n-1}_{2,j},a_0a_1)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)-(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)\\
&\qquad+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)-(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,j},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j+1},b_3))\\
&\quad=(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)-(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)+(\mathbf{g}^{n-1}_{3,j},a_1a_2)-(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)\\
&\qquad-(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_3a_0)-(\mathbf{g}^{n-1}_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^{n-1}_{1,j},a_3a_0)=0.
\end{aligned}$$

当 $j=n$ 时,

$$\begin{aligned}
&d_n((\mathbf{g}^n_{0,n},a_3))=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{1,n},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2))=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{2,n},a_1)+(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2))=0,\\
&d_n((\mathbf{g}^n_{3,n},b_2)+(\mathbf{g}^n_{0,n},a_3))=0.
\end{aligned}$$

故集合

$$\begin{aligned}K=\{&(\mathbf{g}^n_{0,0},b_3),(\mathbf{g}^n_{1,0},a_0)-(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2),(\mathbf{g}^n_{2,0},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2),(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,0},b_3)\}\\&\cup\{(\mathbf{g}^n_{0,j},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j+1},b_3),(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2),(\mathbf{g}^n_{1,j+1},a_0)\\&\quad+(\mathbf{g}^n_{1,j},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2)-(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2),(\mathbf{g}^n_{2,j},a_1)+(\mathbf{g}^n_{2,j+1},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)\\&\quad+(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2),(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,j},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j+1},b_3)\,|\,0\le j\le n-1\}\\&\cup\{(\mathbf{g}^n_{0,n},a_3),(\mathbf{g}^n_{1,n},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2),(\mathbf{g}^n_{2,n},a_1)+(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2),(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2)+(\mathbf{g}^n_{0,n},a_3)\}\\&\subseteq \operatorname{Ker}d_n.\end{aligned}$$

显然 K 中的元素线性无关, 又因为 $\dim\operatorname{Ker}d_n=|\mathscr{G}^n\odot B|-\operatorname{rank}D_n=8n+8-3n=5n+8$, 所以 K 是 $\operatorname{Ker}d_n$ 的一组基. 又由于对 $1\le j\le n$,

$$\begin{aligned}&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{1,0},e_1)-(\mathbf{g}^{n+1}_{2,0},e_2))=(\mathbf{g}^n_{1,0},a_0)-(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{1,j},e_1)-(\mathbf{g}^{n+1}_{2,j},e_2))=(\mathbf{g}^n_{1,j},a_0)+(\mathbf{g}^n_{1,j-1},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,j},a_2)-(\mathbf{g}^n_{3,j-1},b_2),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{1,n+1},e_1)-(\mathbf{g}^{n+1}_{2,n+1},e_2))=(\mathbf{g}^n_{1,n},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{2,0},e_2))=(\mathbf{g}^n_{2,0},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{2,j},e_2))=(\mathbf{g}^n_{2,j-1},a_1)+(\mathbf{g}^n_{2,j},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,j-1},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j},a_2),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{2,n+1},e_2))=(\mathbf{g}^n_{2,n},a_1)+(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{3,0},e_3))=(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,0},b_3),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{3,j},e_3))=(\mathbf{g}^n_{3,j-1},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,j-1},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j},b_3),\\&d_{n+1}((\mathbf{g}^{n+1}_{3,n+1},e_3))=(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2)+(\mathbf{g}^n_{0,n},a_3).\end{aligned}$$

故$\{(\mathbf{g}^n_{1,0},a_0)-(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2),(\mathbf{g}^n_{1,n},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2),(\mathbf{g}^n_{2,0},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2),(\mathbf{g}^n_{2,n},a_1)+(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2),(\mathbf{g}^n_{3,0},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,0},b_3),(\mathbf{g}^n_{3,n},b_2)+(\mathbf{g}^n_{0,n},a_3)\}\cup\{(\mathbf{g}^n_{1,j},a_0)+(\mathbf{g}^n_{1,j-1},b_0)-(\mathbf{g}^n_{3,j},a_2)-(\mathbf{g}^n_{3,j-1},b_2),(\mathbf{g}^n_{2,j-1},a_1)+(\mathbf{g}^n_{2,j},b_1)+(\mathbf{g}^n_{3,j-1},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j},a_2),(\mathbf{g}^n_{3,j-1},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j},a_2)+(\mathbf{g}^n_{0,j-1},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j},b_3)\}\subseteq\operatorname{Im}d_{n+1}$; 这些元素显然线性无关, 又因为 $\dim\operatorname{Im}d_{n+1}=\operatorname{rank}D_{n+1}=3(n+2)$, 所以这些元素是 $\operatorname{Im}d_{n+1}$ 的一组基. 而 $\dim\operatorname{HH}_n(A)=5n+8-3(n+2)=2n+2$, 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{HH}_n(A)&=\operatorname{Ker}d_n/\operatorname{Im}d_{n+1}\\&=\operatorname{span}\{(\mathbf{g}^n_{0,j},a_3)+(\mathbf{g}^n_{0,j+1},b_3),(\mathbf{g}^n_{3,j},b_2)+(\mathbf{g}^n_{3,j+1},a_2)\,|\,0\le j\le n-1\}\\&\quad\cup\{(\mathbf{g}^n_{0,n},a_3),(\mathbf{g}^n_{0,0},b_3)\}.\end{aligned}$$

类似地, 当 $n\equiv 2\pmod 4$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}d_n&=\operatorname{span}\{-(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^n_{1,j},a_3a_0),-(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^n_{2,j},a_0a_1),-(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)\\&\quad+(\mathbf{g}^n_{3,j},a_1a_2),(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)\,|\,0\le j\le n\},\\\operatorname{Im}d_{n+1}&=\operatorname{span}\{-(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^n_{1,j},a_3a_0),-(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)+(\mathbf{g}^n_{2,j},a_0a_1),-(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)\\&\quad+(\mathbf{g}^n_{3,j},a_1a_2)\,|\,0\le j\le n\}.\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{HH}_n(A)=\operatorname{Ker}d_n/\operatorname{Im}d_{n+1}=\operatorname{span}\{(\mathbf{g}^n_{0,j},a_2a_3)\,|\,0\le j\le n\}.$$

当 $n\equiv 0\pmod 4$ 时, 类似地得到 $\operatorname{Ker}d_n=\operatorname{span}\{(\mathbf{g}^n_{0,j},e_0)\,|\,0\le j\le n\}$, $\operatorname{Im}d_{n+1}=0$, 因此

$$\operatorname{HH}_n(A)=\operatorname{Ker}d_n/\operatorname{Im}d_{n+1}=\operatorname{span}\{(\mathbf{g}^n_{0,j},e_0)\,|\,0\le j\le n\}.$$

当 $n\equiv 1\pmod 4$ 时, $\mathscr{G}^0\odot B=\emptyset$, 因此 $\operatorname{HH}_n(A)=0$.

记 $\mathrm{HC}_n(A)$ 为代数 A 的第 n 阶循环同调群 [1]. 循环同调与 Hochschild 同调有着紧密的联系, 它既是 de Rham 同调的非交换版本又是代数 K- 理论的 Lie 模拟. 当基础域 $\mathbf{k}$ 的特征为 0 时, 我们有

推论 3.4 若 $\mathrm{char}\mathbf{k}=0$, 则

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_m(A)=\begin{cases} 4, & \text{当 } m=4k \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } m=4k+1 \text{ 时;}\\ 4k+7, & \text{当 } m=4k+2 \text{ 时;}\\ 4k+5, & \text{当 } m=4k+3 \text{ 时.}\end{cases}$$

证明 由文 [1, 定理 4.1.13] 可得

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_m(A)-\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_m(\mathbf{k}^4) &= -(\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_{m-1}(A)-\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_{m-1}(\mathbf{k}^4))\\ &\quad+(\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HH}_m(A)-\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HH}_m(\mathbf{k}^4)),\end{aligned}$$

从而

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_m(A)-\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_m(\mathbf{k}^4)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}(\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HH}_i(A)-\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HH}_i(\mathbf{k}^4)).$$

易知

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HH}_i(k^4)=\begin{cases} 4, & \text{当 } i=0 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } i\geq 1 \text{ 时,}\end{cases} \quad \text{且 } \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_m(k^4)=\begin{cases} 4, & \text{当 } m \text{ 为偶数时;}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

由命题 3.2 立即可得

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{HC}_m(A)=\begin{cases} 4, & \text{当 } m=4k \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } m=4k+1 \text{ 时;}\\ 4k+7, & \text{当 } m=4k+2 \text{ 时;}\\ 4k+5, & \text{当 } m=4k+3 \text{ 时.}\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Loday J. L., Cyclic Homology, Grundlehren 301, Springer, Berlin, 1992.

[2] Connes A., Noncommutative differential geometry, *IHES Publ. Math.*, 1985, **62**: 257–360.

[3] Han Y., Hochschild (co)homology dimension, *J. London Math. Soc.*, 2006, **73**(2): 657–668.

[4] Happel D., Hochschild cohomology of finite dimensional algebras, *Lecture Notes in Math.*, 1989, **1404**: 108–126.

[5] Furuya T., Hochschild cohomology for a class of self-injective special biserial algebras of rank four, *J. Pure Appl. Algebra*, 2015, **219**: 240–254.

[6] Xu Y. G., Wang D., Hochschild (co)homology of a class of Nakayama algebras, *Acta Math. Sinica*, 2008, **24**(7): 1097–1106.

[7] Liu S. X., Zhang P., Hochschild homology of truncated algebras, *Bull. London Math. Soc.*, 1994, **26**: 427–430.