第61卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.61, No.1
2018年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)01-0067-06 **文献标识码: A**

三次高斯和与 Kloosterman 和的线性递推公式

陈 丽 呼家源

西北大学数学学院 西安 710127
E-mail: cl1228@stumail.nwu.edu.cn; hujiayuan1986@163.com

摘 要 应用三角和方法以及高斯和的若干性质, 研究三次高斯和与 Kloosterman 和的一类高次混合均值的计算问题, 本文给出该混合均值的一个有趣的线性递推公式. 同时, 还应用该递推公式, 得到三次高斯和与 Kloosterman 和的高次混合均值的一系列较强的渐近公式.

关键词 三次高斯和; Kloosterman 和; 高次混合均值; 线性递推公式; 渐近公式
MR(2010) 主题分类 11L05
中图分类 O156.4

A Linear Recurrence Formula Involving Cubic Gauss Sums and Kloosterman Sums

Li CHEN Jia Yuan HU

School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127*, P. R. China*
E-mail: *cl1228@stumail.nwu.edu.cn*; *hujiayuan1986@163.com*

Abstract The main purpose of this paper is using the trigonometric sums method and the properties of Gauss sums to study the computational problem of one kind hybrid power mean involving the cubic Gauss sums and Kloostermann sums, and give an interesting linear recurrence formula for it. As some applications of this recurrence formula, we obtained a series of asymptotic formulas for the high-th hybrid power mean involving the cubic Gauss sums and Kloostermann sums.

Keywords the cubic Gauss sums; Kloosterman sums; hybrid power mean; linear recurrence formula; asymptotic formula
MR(2010) Subject Classification 11L05
Chinese Library Classification O156.4

收稿日期: 2017-02-15; 接受日期: 2017-03-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11371291); 陕西省教育厅自然科学专项科研计划项目 (16JK1373)
通讯作者: 呼家源

1 引言

设 q 为任意正整数且 $q \ge 3$. 对任意正整数 $k \ge 1$ 以及整数 m 和 n, k 次高斯和 $G(m,k;q)$ 及 Kloosterman 和 $K(m,n;q)$ 定义分别为:

$$G(m,k;q)=\sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{ma^k}{q}\right) \quad \text{和} \quad K(m,n;q)=\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{ma+n\overline{a}}{q}\right),$$

其中 $\sum'^{q}_{a=1}$ 表示对所有满足 $1 \le a \le q$ 且 $(a,q)=1$ 的 a 求和, $e(y)=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y}$, $\overline{a}$ 表示 a 模 q 的乘法逆元, 即就是 $a\overline{a} \equiv 1 \bmod q$.

对于这几类重要和式, 许多学者对它们的性质进行了研究, 并得到一系列有趣的结果 [4–11]. 例如, 由 Weil [7] 所做的重要工作, 可以得到上界估计

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) e\left(\frac{ma^k}{p}\right)\right| \ll_k \sqrt{p},$$

其中 p 是奇素数, χ 表示模 p 的任意 Dirichlet 特征, $\ll_k$ 表示大 O 常数仅依赖整数 k.

张文鹏与刘华宁 [11] 研究了 $G(m,k,p)$ 的四次均值, 并得到了一个较强的渐近公式.

Estermann [4] 证明了上界估计

$$|K(m,n;q)| \le (m,n,q)^{\frac{1}{2}} \cdot d(q) \cdot q^{\frac{1}{2}},$$

其中 (m,n,q) 表示 m,n,q 的最大公因数, $d(q)$ 表示 q 的因子的个数.

Kloosterman [5] 研究了 $K(a,1;p)$ 的四次均值, 并证明了等式 $\sum_{a=1}^{p-1} K^4(a,1;p)=2p^3-3p^2-3p-1$. 对一般的奇数 $q \ge 3$ 且 $(n,q)=1$, 张文鹏 [9] 证明了恒等式

$$\sum_{m=1}^{q} |K(m,n;q)|^4 = 3^{\omega(q)} q^2 \phi(q) \prod_{p\,||\,q} \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3p}-\frac{4}{3p(p-1)}\right),$$

其中 $\phi(q)$ 是欧拉函数, $\omega(q)$ 表示 q 的不同素因子的个数, $\prod_{p\,||\,q}$ 表示对 q 的所有满足 $p\,|\,q$ 且 $(p,q/p)=1$ 的素因子 p 求乘积.

我们现令 p 是奇素数且 $p \equiv 1 \bmod 3$. 对任意正整数 k, 令

$$S_k(p)=\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right)^k \cdot \left|\sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{ma+\overline{a}}{p}\right)\right|^2. \tag{1.1}$$

本文主要是考虑 $S_k(p)$ 的计算问题. 这个问题非常有趣, 因为它可以帮助我们了解更多关于三次高斯和与 Kloosterman 和高次混合均值的精确信息. 我们将利用三角和方法以及高斯和的若干性质研究问题 (1.1), 并给出它的一个有趣的线性递推公式, 即证明下面的定理:

定理 1.1 设 p 是满足 $p \equiv 1 \bmod 3$ 的奇素数, 则对任意正整数 k, 我们有线性递推公式

$$S_{k+3}(p)=3pS_{k+1}(p)+dpS_k(p),$$

其中 $S_k(p)$ 的前三项为

$$\begin{aligned} S_1(p)&=2p^2+dpA(1)-pA^2(1),\\ S_2(p)&=2p^3+2(d-1)p^2+p\left(d^2-p\right)A(1)-dpA^2(1),\\ S_3(p)&=(d+6)p^3+3dp^2A(1)-3p^2A^2(1)-dp(p+1), \end{aligned}$$

且 d 是由 $4p=d^2+27b^2$ 和 $d \equiv 1 \bmod 3$ 唯一确定, 常数 $A(1)$ 定义为 $A(m)=\sum_{a=0}^{p-1} e(\frac{ma^3}{p})$.

由这个递推公式可以立即推出以下推论.

推论 1.2　设 p 是满足 $p\equiv 1 \bmod 3$ 的奇素数, 则有恒等式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right|^4\cdot\left|\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{ma+\overline{a}}{p}\right)\right|^2=6p^4+(8d-6)p^3+p^2\left(4d^2-3p\right)A(1)-4dp^2A^2(1).$$

显然, $A(1)$ 是实数且满足估计式 $|A(1)|\leq 2\sqrt{p}$. 注意到 $|d|\leq 2\sqrt{p}$, 于是由上面的定理 1.1 及推论 1.2, 可以推出以下结论.

推论 1.3　设 p 是满足 $p\equiv 1 \bmod 3$ 的奇素数, 则有渐近公式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right|^4\cdot\left|\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{ma+\overline{a}}{p}\right)\right|^2=6p^4+O\big(p^{\frac{7}{2}}\big).$$

推论 1.4　设 p 是满足 $p\equiv 1 \bmod 3$ 的奇素数, 则有

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right|^6\cdot\left|\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{ma+\overline{a}}{p}\right)\right|^2=18p^5+d^2p^4+O\big(p^{\frac{9}{2}}\big).$$

注 1.5　在上述定理中, 我们仅仅考虑了素数 p 满足 $p\equiv 1 \bmod 3$ 时的情形. 事实上, 如果 $(3,p-1)=1$, 则有 $A(m)=0$. 因此在这种情况下, 结论是平凡的, 即如果 $(3,p-1)=1$, 则对所有的 $k\geq 1$, 有 $S_k(p)=0$.

2　若干引理

本节将给出定理证明过程中所需的一些引理. 我们将应用经典高斯和的若干性质 [1], 这里不再赘述. 首先有:

引理 2.1　设 p 是满足 $p\equiv 1 \bmod 3$ 的奇素数, 则对任意模 p 的三阶特征 ψ, 有恒等式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\psi(m)\left|\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{ma+\overline{a}}{p}\right)\right|^2=\frac{\tau^5(\psi)}{p},$$

其中 $\tau(\psi)=\sum_{a=1}^{p-1}\psi(a)e(\frac{a}{p})$ 表示经典高斯和.

证明　由模 p 既约剩余系的性质及高斯和的定义, 有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{p-1}\psi(m)\left|\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{ma+\overline{a}}{p}\right)\right|^2&=\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\sum_{m=1}^{p-1}\psi(m)e\left(\frac{m(a-b)+\overline{a}-\overline{b}}{p}\right)\\&=\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\sum_{m=1}^{p-1}\psi(m)e\left(\frac{mb(a-1)+\overline{b}(\overline{a}-1)}{p}\right)\\&=\tau\left(\psi\right)\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\psi}(b(a-1))e\left(\frac{\overline{b}(\overline{a}-1)}{p}\right)\\&=\tau\left(\psi\right)\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\psi}(a-1)\sum_{b=1}^{p-1}\psi(b)e\left(\frac{b(\overline{a}-1)}{p}\right)\\&=\tau^2\left(\psi\right)\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\psi}\left((a-1)(\overline{a}-1)\right)\\&=\tau^2\left(\psi\right)\sum_{a=1}^{p-1}\overline{\psi}\left(-(a-1)^3\right)\psi(a(a-1))\,.\end{aligned}\tag{2.1}$$

注意到, 对所有的 $1\le a\le p-1$, 有 $\psi\left(\pm a^3\right)=1$, $\tau(\psi)\tau\left(\overline{\psi}\right)=p$, $\psi=\overline{\psi}^2$, 且

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{p-1}\psi(a(a-1))&=\frac{1}{\tau\left(\overline{\psi}\right)}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\psi}(b)\sum_{a=1}^{p-1}\psi(a)e\left(\frac{b(a-1)}{p}\right)\\&=\frac{\tau(\psi)}{\tau\left(\overline{\psi}\right)}\sum_{b=1}^{p-1}\overline{\psi}^2(b)e\left(\frac{-b}{p}\right)=\frac{\tau(\psi)}{\tau\left(\overline{\psi}\right)}\sum_{b=1}^{p-1}\psi(b)e\left(\frac{b}{p}\right)=\frac{\tau^2(\psi)}{\tau\left(\overline{\psi}\right)}=\frac{\tau^3(\psi)}{p}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

结合式 (2.1) 和 (2.2), 可立即推出恒等式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\psi(m)\left|\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{ma+\overline{a}}{p}\right)\right|^2=\frac{\tau^5(\psi)}{p}.$$

引理 2.1 得证.

引理 2.2 设 p 是满足 $p\equiv 1 \bmod 3$ 的奇素数, 在有限域 $GF(p)$ 上, 令 M_s 表示方程

$$X_1^3+X_2^3+X_3^3+\cdots+X_s^3=0$$

的解的个数, $U_s=M_s-p^{s-1}$. 则 U_s 满足线性递推公式 $U_s-3pU_{s-2}-pdU_{s-3}=0$, 且 $U_1=0$, $U_2=2p-2$ 及 $U_3=(p-1)d$, 其中 d 是由 $4p=d^2+27b^2$ 和 $d\equiv 1 \bmod 3$ 唯一确定的常数.

证明 见文 [3, 定理 3].

引理 2.3 设 p 是满足 $p\equiv 1 \bmod 3$ 的奇素数, 则有 $\tau^3\left(\psi\right)+\tau^3\left(\overline{\psi}\right)=dp$, 其中 ψ 是模 p 的任意三阶特征, d 的定义同引理 2.2.

证明 事实上, 这个有趣的等式可以在文 [2] 中找到不同的形式. 为了本文的完整性, 在此给出一个新的证明. 对任意整数 $1\le a\le p-1$, 如果 a 是模 p 的三次剩余, 显然有 $1+\psi(a)+\overline{\psi}(a)=3$, 否则 $1+\psi(a)+\overline{\psi}(a)=0$. 因此, 对任意的 $1\le b\le p-1$, 由高斯和的定义及性质有

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ba^3}{p}\right)&=1+\sum_{a=1}^{p-1}\left(1+\psi(a)+\overline{\psi}(a)\right)e\left(\frac{ba}{p}\right)\\&=\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ba}{p}\right)+\overline{\psi}(b)\tau(\psi)+\psi(b)\tau\left(\overline{\psi}\right)=\overline{\psi}(b)\tau(\psi)+\psi(b)\tau\left(\overline{\psi}\right).\end{aligned}\tag{2.3}$$

由式 (2.3), 三角和恒等式
$$\sum_{m=0}^{p-1}e\left(\frac{nm}{p}\right)=\begin{cases}p, & \text{当 } (p,n)=p \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } (p,n)=1 \text{ 时,}\end{cases}$$

$\psi^3(b)=\overline{\psi}^3(b)=1$, $\tau(\psi)\tau\left(\overline{\psi}\right)=p$ 以及 $\sum_{m=1}^{p-1}\psi(m)=\sum_{m=1}^{p-1}\overline{\psi}(m)=0$, 有

$$\begin{aligned}M_5=&\sum_{\substack{a=0\\a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\equiv 0 \bmod p}}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}\sum_{d=0}^{p-1}\sum_{e=0}^{p-1}1=\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{p-1}\sum_{d=0}^{p-1}\sum_{e=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{p-1}e\left(\frac{m\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)}{p}\right)\\&=p^4+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right)^5=p^4+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{p-1}(\overline{\psi}(m)\tau(\psi)+\psi(m)\tau(\overline{\psi}))^5\\&=p^4+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{p-1}(\psi(m)\tau^5(\psi)+5p\tau^3(\psi)+10p^2\overline{\psi}(m)\tau(\psi))\\&\quad+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{p-1}(10p^2\psi(m)\tau(\overline{\psi})+5p\tau^3(\overline{\psi})+\overline{\psi}(m)\tau^5(\overline{\psi}))\\&=p^4+5(p-1)(\tau^3(\psi)+\tau^3(\overline{\psi})).\end{aligned}\tag{2.4}$$

利用引理 2.2 可得 $U_4 = 3p(2p-2) = 6p(p-1)$, $U_5 = 3pU_3 + pdU_2 = 3pd(p-1) + pd(2p-2) = 5dp(p-1)$. 因此, 由式 (2.4) 有

$$5dp(p-1) + p^4 = U_5 + p^4 = M_5 = p^4 + 5(p-1)\left(\tau^3(\psi) + \tau^3\left(\overline{\psi}\right)\right),$$

由此便得出

$$\tau^3(\psi) + \tau^3\left(\overline{\psi}\right) = dp.$$

引理 2.3 得证.

3 主要定理的证明

本节将完成主要定理的证明. 首先, 对任意的整数 $1 \le m \le p-1$, 令

$$A(m) = \sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3}{p}\right),$$

则由式 (2.3) 及引理 2.3, 有

$$A^3(m) = \left(\overline{\psi}(m)\tau(\psi) + \psi(m)\tau\left(\overline{\psi}\right)\right)^3 = 3pA(m) + dp. \tag{3.1}$$

结合式 (2.3), 引理 2.1 以及 2.3, 有

$$\begin{aligned}
S_1(p) &= \sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right)\cdot\left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{m=1}^{p-1}\left(\overline{\psi}(m)\tau(\psi) + \psi(m)\tau\left(\overline{\psi}\right)\right)\cdot\left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\
&= \frac{\tau(\psi)\tau^5\left(\overline{\psi}\right)}{p} + \frac{\tau^5(\psi)\tau\left(\overline{\psi}\right)}{p} = \tau^4(\psi) + \tau^4\left(\overline{\psi}\right) \\
&= \left(\tau(\psi) + \tau\left(\overline{\psi}\right)\right)\left(\tau^3(\psi) + \tau^3\left(\overline{\psi}\right)\right) - p\left(\tau^2(\psi) + \tau^2\left(\overline{\psi}\right)\right) \\
&= dp\left(\tau(\psi) + \tau\left(\overline{\psi}\right)\right) - p\left(\tau^2(\psi) + \tau^2\left(\overline{\psi}\right)\right) \\
&= 2p^2 + dpA(1) - pA^2(1).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

由式 (3.2), 引理 2.1 和 2.3, 并注意到恒等式

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 = p(p-1) - 1 = p^2 - p - 1,$$

我们也可以得到

$$\begin{aligned}
S_2(p) &= \sum_{m=1}^{p-1}\left(\overline{\psi}(m)\tau(\psi) + \psi(m)\tau\left(\overline{\psi}\right)\right)^2\cdot\left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{m=1}^{p-1}\left(\psi(m)\tau^2(\psi) + 2p + \overline{\psi}(m)\tau^2\left(\overline{\psi}\right)\right)\cdot\left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{p}\left(\tau^7(\psi) + \tau^7\left(\overline{\psi}\right)\right) + 2p(p^2-p-1) \\
&= d\left(\tau^4(\psi) + \tau^4\left(\overline{\psi}\right)\right) - p^2\left(\tau(\psi) + \tau\left(\overline{\psi}\right)\right) + 2p(p^2-p-1) \\
&= 2dp^2 + p\left(d^2 - p\right)A(1) - dpA^2(1) + 2p(p^2-p-1).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

由式 (3.2) 有

$$\begin{aligned}S_3(p) &= \sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right)^3 \cdot \left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{p-1}(3pA(m)+dp) \cdot \left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\ &= 3p\left(2p^2+dpA(1)-pA^2(1)\right)+dp\left(p^2-p-1\right) \\ &= (d+6)p^3+3dp^2A(1)-3p^2A^2(1)-dp(p+1). \end{aligned} \tag{3.4}$$

对任意的整数 $k \geq 1$, 由式 (3.1) 及 $S_k(p)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}S_{k+3}(p) &= \sum_{m=1}^{p-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1} e\left(\frac{ma^3}{p}\right)\right)^{k+3} \cdot \left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{p-1} A^k(m)\,(3pA(m)+dp) \cdot \left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\ &= 3p\sum_{m=1}^{p-1} A^{k+1}(m) \cdot \left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\ &\quad + dp\sum_{m=1}^{p-1} A^{k}(m) \cdot \left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{mb+\overline{b}}{p}\right)\right|^2 \\ &= 3pS_{k+1}(p)+dpS_k(p). \end{aligned} \tag{3.5}$$

结合式 (3.2)–(3.5), 便可得我们定理的结论.

致谢 感谢张文鹏教授的鼓励与帮助, 也感谢审稿人提出详细的意见, 使论文更加完善.

参 考 文 献

[1] Apostol T. M., Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] Berndt B. C., Evans R. J., The detemination of Gauss sums, *Bulletin* (*New Series*) *of the American Mathematical Society*, 1981, **5**: 107–129.

[3] Chowla S., Cowles J., Cowles M., On the number of zeros of diagonal cubic forms, *J. Number Theory*, 1977, **9**: 502–506.

[4] Estermann T., On Kloostermann's sums, *Mathematica*, 1961, **8**: 83–86.

[5] Kloosterman H. D., On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, *Acta Math.*, 1926, **49**: 407–464.

[6] Li J. H., Liu Y. N., Some new identities involving Gauss sums and general Kloosterman sums, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2013, **56**: 413–416.

[7] Weil A., On some exponential sums, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1948, **34**: 204–207.

[8] Zhang H., Zhang W. P., The fourth power mean of two-term exponential sums and its application, *Mathematical Reports*, 2017, **19**: 75–83.

[9] Zhang W. P., On the general Kloosterman sums and its fourth power mean, *J. Number Theory*, 2004, **104**: 156–161.

[10] Zhang W. P., On the fourth power mean of the general Kloosterman sums, *Indian J. Pure and Applied Mathematics*, 2004, **35**: 237–242.

[11] Zhang W. P., Liu H. N., On the general Gauss sums and their fourth power mean, *Osaka J. Math.*, 2005, **42**: 189–199.