

§4.3 非精确一维搜索 与 无约束最优性条件

李宗军

青岛理工大学·理学院

2016 年



授课要点

- 1 背景
- 2 非精确搜索的思想
- 3 Goldstein 法
- 4 Armijo 法
- 5 无约束最优性条件



① 一维搜索问题产生的背景

$$\min f(x^k + tp^k) \stackrel{\text{let}}{=} \varphi(t)$$

② 0.618 法

- 单谷函数
- 插入探索点 $a < t_1 < t_2 < b$, 通过比较 $f(t_1), f(t_2)$, 然后按照比率 $w = 0.618$ 来收缩区间 $[a, b]$
- 对 $f(t)$ 的要求很低: 只要求存在单谷区间, 不要求连续、更不要求可微
- 优点: 算法简单高效, 计算量小
- 缺点: 必须自己解决单谷区间的求解算法



3 Newton 法

- 思想：对 $f(t)$ 采用二次 Taylor 展开式进行逼近

$$f(t) \approx \frac{1}{2}(t - t_k)^2 f''(t_k) + (t - t_k)f'(t_k) + f(t_k) \stackrel{\text{let}}{=} g(t)$$

令 $g'(t) = 0$, 解得 t 的迭代公式.

- 优点：收敛速度快
- 缺点：属于局部收敛算法，而非全局收敛算法，必须初始点充分靠近最优解，才能保证算法收敛。



非精确搜索

lzt

背景

非精确搜索的思想

Goldstein 法

Armijo 法

无约束最优性条件

- 1 精确搜索在 NLP 迭代过程中的不必要性
- 2 非精确搜索效果可能会好于精确搜索



非精确搜索

lzt

背景

非精确搜索的思想

Goldstein 法

Armijo 法

无约束最优性条件

- 对 $x^k + tp^k$, 要求 t 不太大, 也不太小。
- 这称为对 t 的*控制规则*



非精确搜索

lzj

背景

非精确搜索的
思想

Goldstein 法

Armijo 法

无约束最优性
条件

① t 的控制规则

- $\varphi(t_k) \leq \varphi(0) + m_1 \varphi'(0)t_k$
- $\varphi(t_k) \geq \varphi(0) + m_2 \varphi'(0)t_k$
- 其中 $\varphi'(0) < 0$, $0 < m_1 < m_2 < 1$

② 算法的迭代步骤（教材）

③ 程序演示：



1 t 的控制规则

- $\varphi(t_k) \leq \varphi(0) + m\varphi'(0)t_k$
- $\varphi(Mt_k) \geq \varphi(0) + m\varphi'(0)Mt_k$
- 其中 $\varphi'(0) < 0$, $0 < m < 1 < M$

2 算法的迭代步骤

while $f(t_k) > \text{Line}(t_k)$:

$t_k = t_k/M$

while $f(t_k) < \text{Line}(t_k)$:

$t_k = t_kM$

3 程序演示与例题计算:



- ① 无约束最优化问题: $\min\{f(x)|x \in R^n\}$
- ② 最优性条件 (四个定理 4.4.1–4.4.4):
 - 下降方向的判定: $\nabla f(x)^T p < 0$
 - 局部最优解的必要条件: $\nabla f(x^*) = 0$
 - 局部最优解的充分条件: $\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*)$ 正定
 - 凸规划的最优解的充要条件: $\nabla f(x^*) = 0$

小结

- 1 背景
- 2 非精确搜索的思想
- 3 Goldstein 法
- 4 Armijo 法
- 5 无约束最优性条件

作业

- ① 课本习题: T12,14,15.
- ② 尝试 Goldstein 和 Armijo 算法的计算机程序实现