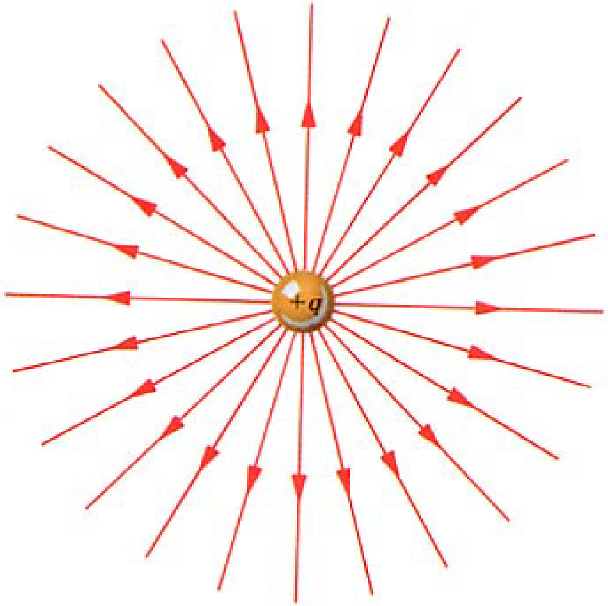
第八讲：调和方程
（Green函数）



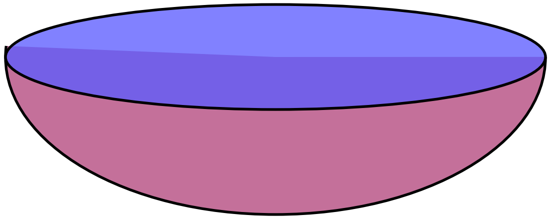
1. 定态问题

例如：二维膜振动方程

$$\rho u_{tt} - T(u_{xx} + u_{yy}) = F(x, y)$$

$\Downarrow$（处于定态情况）

$$-T(u_{xx} + u_{yy}) = F(x, y)$$ [如重力]



定态方程

齐次：又称调和方程或Laplace方程

非齐次：又称Poisson方程

$$\Delta u \triangleq u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

引力位势方程：$\Delta \varphi = 4\pi\rho$

电位势方程：$\Delta \varphi = -4\pi\rho$

满足调和方程的称为调和函数

定解问题，只能加边界条件

2. Green函数

$$\frac{dx}{dt}+ax=0$$

$$\Rightarrow x(t)=Ce^{-at}$$ （齐次方程基本解）

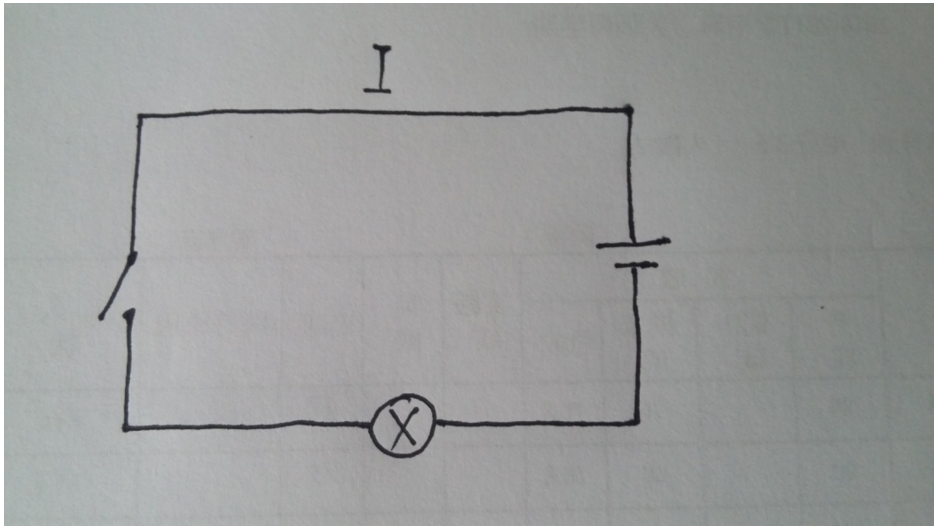
$$\frac{dx}{dt}+ax=f(t)$$

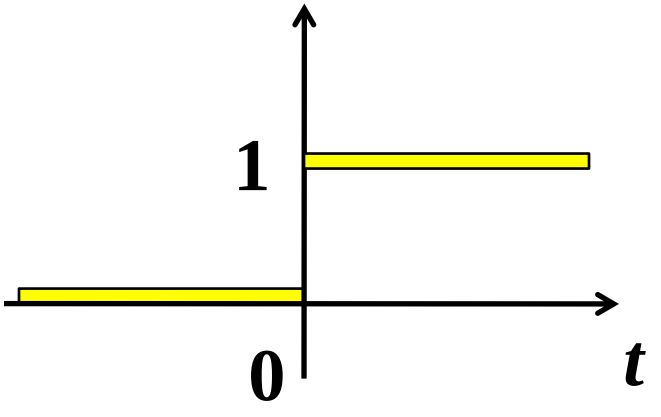
$$\Rightarrow x(t)=Ce^{-at}+\int_0^t f(s)\underbrace{e^{-a(t-s)}}_{G(t-s)}ds$$

$$=Ce^{-at}+f(t)*G(t)$$

Green函数法的基本思想：
先求点源产生的场，叠加产生实际场

2. Dirac函数





在合上电源的瞬间电流的变化率 $\frac{dI}{dt} = ?$

$$\rho(x) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{m}{\Delta l} = \infty$$

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$$

用脉冲函数逼近

$$\rho_\varepsilon(x - x_0) = \begin{cases} 0, & |x - x_0| > \varepsilon \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x - x_0| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$\forall$ 连续函数 $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot \varphi(x) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\varepsilon}(x - x_0) \cdot \varphi(x) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \varphi(x) dx = \varphi(x_0)$$

3. Green函数方法（要点）

待求方程：$-\Delta u(x) = f(x)$

先寻求对应点源的Green函数：

$$-\Delta G(x,x_0)=\delta(x-x_0)$$

$$\Rightarrow -\Delta G(x,x_0)f(x_0)=\delta(x-x_0)f(x_0)$$

$$\Rightarrow -\Delta\underline{\int G(x,x_0)f(x_0)dx_0}$$

$$=\int\delta(x-x_0)f(x_0)dx_0 = f(x)$$

$\therefore u(x)=\int G(x,x_0)f(x_0)dx_0$就是解.

另外,对于边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u = f(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x) = \iint_{\Gamma} f(x) \cdot [\ ?\ ] dx$$

$$= -\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}$$

也可以利用基本解来构造.

Green公式: $\iiint_{\Omega} \underline{\mathrm{div}\vec{U}}\, dxdydz = \iint_{\Gamma} \underline{\underline{\vec{U} \cdot \vec{n}}}\, dS$

谢谢！