

文章编号: 1000-4750(2017)10-0010-09

一种新型裂尖加强函数的显式动态扩展有限元法

刘学聪, 章 青, 夏晓舟

(河海大学工程力学系, 南京 211100)

摘 要: 基于扩展有限元方法提出了一种新的裂尖加强函数, 与传统三角函数基表征的加强函数相比, 该裂尖加强函数通过组合传统的函数基, 继承了传统附加函数的特性, 同时使得结点的奇异附加自由度减少为 2 个, 减少了总体刚度矩阵的规模, 提高了计算效率。通过集中质量矩阵考虑结构的惯性效应, 使用显式时间积分方法计算了含裂纹结构的瞬间受载问题, 并应用相互作用积分得到裂尖端点处的动态应力强度因子。通过相关算例的对比分析, 验证了所提出的裂尖加强函数的有效性, 同时表明采用显式时间积分方法进行结构动态响应分析的可行性及准确性。

关键词: 扩展有限元法; 动态应力强度因子; 显式时间积分; 动态加载; 裂尖加强函数

中图分类号: O346.1; TB115 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2016.05.0399

A NEW ENRICHMENT FUNCTION OF CRACK TIP IN XFEM DYNAMICS BY EXPLICIT TIME ALGORITHM

LIU Xue-cong, ZHANG Qing, XIA Xiao-zhou

(Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: A new enrichment scheme of crack tip is proposed in the framework of extended finite element method. In the new enrichment scheme, the characteristic of enriched functions are preserved by combining the traditional function basis, and only two additional degrees of freedom are added at each node of the crack tip element to improve the computational efficiency and reduce the matrix size. The inertia effect is considered by using the lumped mass matrix, and explicit time algorithm is adopted to research the problem of stable crack with dynamic loading. The values of dynamic stress intensity factors are computed by the interaction integral approach. The numerical results show that the new enrichment scheme is effective, and the feasibility and accuracy of simulating the dynamic response of the structure by explicit time algorithm is verified.

Key words: extended finite element method; dynamic stress intensity factor; explicit time algorithm; dynamic loading; enrichment of crack tip

固体材料和结构的破坏问题具有广泛的应用背景, 也是学术界长期关注的重要课题。使用传统有限元方法模拟材料和结构的断裂过程, 需要频繁地重构网格, 花费大量计算用时, 且计算结果也依赖网格质量。扩展有限元方法(Extended Finite Element Method, XFEM)在计算断裂力学问题时, 采用附加含不连续特性的形函数基表征计算

域内的间断, 以单位分解法为基础, 将区域划分成两部分: 不含裂纹区域以及使用附加函数近似的裂纹区域, 引入 Heaviside 阶跃函数和 Westergaard 渐进场函数表征裂纹贯穿单元的不连续特性及裂尖附近应力的奇异性^[1-2], 不需重构网格, 可以较好地追踪裂纹的扩展过程。目前, XFEM 已经广泛应用于各种不连续断裂问题。

收稿日期: 2016-05-23; 修改日期: 2016-12-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(11672101, 11372099); 国家“十二五”科技支撑计划课题项目(2015BAB07B10); 江苏省自然科学基金项目(BK20151493); 江苏省研究生培养创新工程项目(2014B31614)

通讯作者: 章 青(1964—), 男, 安徽人, 教授, 博士, 从事计算力学与灾变破坏力学研究(E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn).

作者简介: 刘学聪(1989—), 男, 江西人, 博士生, 从事计算力学与灾变破坏力学研究(E-mail: herbertliu@126.com);

夏晓舟(1976—), 男, 江西人, 副教授, 博士, 从事计算力学与灾变破坏力学研究(E-mail: xi Xiaozhou@163.com).

在结构的动态断裂问题方面, Belytschko 等^[3-4]提出了一种特殊的裂尖单元模型, 裂尖单元中的裂纹呈线性张开, 并采用显-隐式混合时间积分方法研究了弹性裂纹的动态扩展问题。Réthoré 等^[5-6]基于能量守恒提出了时空扩展有限元, 进行了裂纹动态扩展分析。Menouillard 等^[7-8]使用显式时间积分方法, 采用集中质量矩阵代替一致质量矩阵参与计算, 分别计算了动载下稳定裂纹和裂纹扩展时的应力强度因子。上述研究都是基于经典的裂尖加强函数, 含有较多的自由度, 组装成的整体矩阵规模大, 增加了计算消耗。Kumar 等^[9]提出一种 Heaviside 函数与斜坡函数的组合形式研究裂纹的动态响应问题, 斜坡函数中包含裂纹长度和角度等信息, 可以准确定位裂尖的位置, 但由于采用 Newmark 隐式积分格式, 需要求解整体方程组, 计算量较大。国内学者中, Xu 等^[10]模拟了动态裂纹的分支问题。Liu 等^[11]结合 XFEM 和谱单元法模拟了裂纹动态发展。张社荣等^[12]采用合理的地震波动模型对国内某混凝土重力坝强震下的动力破坏过程进行了分析。夏晓舟和章青^[13]提出一类指数型间断函数, 该附加函数以到间断处的垂直距离为自变量, 且随距离的增大而呈指数衰减, 并验证了其可行性和有效性。王克锋等^[14-15]在此基础上修正了裂尖附加基函数, 用于解决流固耦合作用下的裂纹扩展。江守燕和杜成斌^[16]提出了一种改进的裂尖加强函数, 将裂尖结点的附加自由度个数由 8 个减少至 4 个, 针对含不同结构, 给出了相应的裂尖附加函数形式^[17]。

本文基于近裂尖位移场的解析解形式提出了一种新的裂尖加强函数, 虽然附加基函数是 4 个, 但水平方向和竖直方向(二维情形)使用的基函数不同, 使得受裂尖影响的结点附加自由度减少至 2 个。并采用显式算法进行时间积分, 计算得到了稳定裂纹的动态应力强度因子(Dynamic Stress Intensity Factor, DSIF), 避免迭代求解整体方程组, 提高计算效率。通过若干算例, 验证了所提出的裂尖附加函数的可靠性以及采用显式算法进行时间积分的可行性。

1 扩展有限元的位移模式

1.1 经典型式

对于平面问题, 断裂力学已给出 I 型、II 型裂纹的近裂尖位移场的理论解^[18]:

$$\begin{cases} u_{x'}(r, \theta) = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ u_{y'}(r, \theta) = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_{x'}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \\ u_{y'}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $u_{x'}$ 、 $u_{y'}$ 分别是裂尖附近点的位移分量; 脚标 x' 、 y' 表示以裂尖为坐标原点, 裂纹延伸线为横轴建立的局部坐标系下的横轴和纵轴; (r, θ) 是裂尖处的局部极坐标, 如图 1 所示; K_I 、 K_{II} 分别是 I 型和 II 型裂纹的裂尖应力强度因子; G 为材料的剪切模量, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E 为弹性模量, ν

为泊松比; 材料常数 κ 为:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{平面应变} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, & \text{平面应力} \end{cases} \quad (3)$$

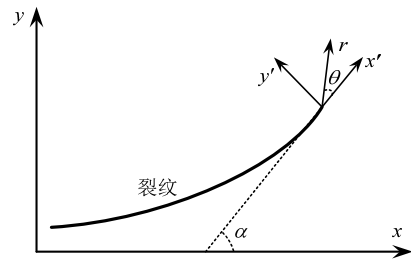


图 1 整体坐标系与裂尖局部坐标

Fig.1 The global coordinate and the local coordinate of crack tip

对于复杂的裂纹形态, 其裂尖附近的位移场都可以由式(1)和式(2)以一定的形式组合得到。Belytschko 等^[19]采用 Heaviside 阶跃函数表征裂纹处位移的不连续特性, 从式(1)和式(2)中选取了一组三角函数作为基函数表征裂尖处的应力的奇异性, 给出了常规的 XFEM 位移模式:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1} N_i(x) \left(\mathbf{u}_i + \mathbf{a}_i H(x) + \sum_{k=1}^4 \mathbf{b}_{ki} \gamma_k(r, \theta) \right) \quad (4)$$

式中: i 是该域内的结点; \mathbf{u}_i 是结点 i 的常规自由度; $N_i(x)$ 是与结点 i 相关的形函数; \mathbf{a}_j 、 \mathbf{b}_{ki} 为结点的附加间断自由度和附加奇异自由度, 分别代表结构中由不连续特性所引起的额外位移部分和裂尖处应力场的奇异性; $H(x)$ 为 Heaviside 阶跃函数; $\gamma(r, \theta)$ 是一组三角基函数:

$$H(x) = \text{sign}[d(x,t)] = \begin{cases} 1, & d(x,t) > 0 \\ -1, & d(x,t) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\gamma(r, \theta) \equiv \sqrt{r} \{ \cos(\theta/2), \sin(\theta/2), \sin(\theta/2)\cos(\theta), \cos(\theta/2)\sin(\theta) \} \quad (6)$$

由式(6)中所示基函数组成的加强函数, 每个受裂尖影响的结点都有 8 个附加自由度, 增加了后续组装整体劲度矩阵以及求解整体方程组的工作量。

1.2 改进的裂尖加强函数

为了减少裂尖附加自由度个数, 本文基于式(1)和式(2), 以 $\frac{1}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta)$ 和 $\frac{1}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta)$ 作为裂尖局部坐标中水平方向(图 1 中的 x' 方向)的加强基函数, 以 $\frac{1}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(\kappa + 2 + \cos\theta)$ 和 $\frac{1}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(\kappa - 2 + \cos\theta)$ 作为裂尖局部坐标中竖直方向(图 1 中的 y' 方向)的基函数, 通过平移加强函数使得的单元结点处的位移也得到满足^[2,4], 改进的位移模式表达为:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in I^c} N_j(x) [H(x) - H(x_j)] \mathbf{a}_j + \sum_{m \in I^t} N_m(x) \boldsymbol{\beta}_T [\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_m)] \mathbf{t}_m \quad (7)$$

式中: I 为离散结构中的所有结点; I^c 为受裂缝影响而加强的结点; I^t 为受裂尖影响而加强的结点; \mathbf{t}_m 为裂尖的加强自由度; $\boldsymbol{\beta}_T$ 是建立在裂缝前缘的局部坐标与整体坐标之间的转换矩阵:

$$\boldsymbol{\beta}_T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中: α 是裂纹与整体坐标轴 x 轴的夹角, 如图 1 所示; $\mathbf{F}(x)$ 是由与裂尖局部极坐标 (r, θ) 相关的函数组成的矩阵, 其表达式为:

$$\mathbf{F}(x) = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) & \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \\ \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) & \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

相比于经典的裂尖加强方式, 本文所提出的改进裂尖加强函数的基函数也是 4 个, 但每个受裂尖影响的结点的附加自由度由 8 个减少至 2

个, 大大减少了整体矩阵的规模, 提高了计算效率。

2 控制方程

考虑如图 2 所示含裂纹体的结构, 在 τ 时刻, 考虑裂纹表面不受力情况, 其平衡方程和边界条件为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{在 } \Gamma_u^\tau \text{ 上} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{在 } \Gamma_t^\tau \text{ 上} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{在 } \Gamma_c^\tau \text{ 上 (裂纹张开)} \\ \boldsymbol{\sigma}^A \cdot \mathbf{n}^A + \boldsymbol{\sigma}^B \cdot \mathbf{n}^B = 0 & \text{在 } \Gamma_c^\tau \text{ 上 (裂纹闭合)} \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量; \mathbf{b} 为体力; ρ 为密度; \mathbf{u} 为位移向量; $\ddot{\mathbf{u}}$ 为加速度向量; Ω 为整个域内; Γ_u^τ 为 τ 时刻的位移边界; Γ_t^τ 为力边界; Γ_c^τ 为裂纹表面; \mathbf{n} 为表面的外法线向量; \mathbf{n}^A 和 \mathbf{n}^B 分别对应裂纹表面 A 和 B 的外法线。

基于小变形假设, 由虚功原理可以得到式(1)的弱解形式:

$$\int_{\Omega} \delta \nabla_s \mathbf{u}^T : \mathbf{C} : \nabla_s \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^\tau} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (11)$$

式中: ∇_s 为梯度算子; \mathbf{C} 是材料的弹性张量。

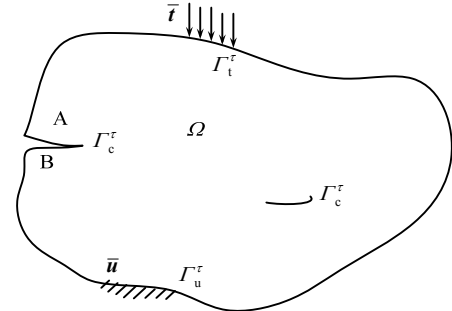


图 2 τ 时刻结构示意图

Fig.2 The schematic drawing of structure at time τ

将改进的位移模式式(7)代入式(11), 进行区域离散化, 得到基于扩展有限元法的离散方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{M}^{ua} & \mathbf{M}^{ut} \\ \mathbf{M}^{au} & \mathbf{M}^{aa} & \mathbf{M}^{at} \\ \mathbf{M}^{tu} & \mathbf{M}^{ta} & \mathbf{M}^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\mathbf{t}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{ua} & \mathbf{K}^{ut} \\ \mathbf{K}^{au} & \mathbf{K}^{aa} & \mathbf{K}^{at} \\ \mathbf{K}^{tu} & \mathbf{K}^{ta} & \mathbf{K}^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^a \\ \mathbf{f}^t \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中： \mathbf{M} 是总体质量矩阵； \mathbf{K} 是总体刚度矩阵； \mathbf{d} 是结点的自由度矩阵； \mathbf{f} 是载荷矩阵。

对于平面四结点单元($i, j=1, 2, 3, 4$)，有：

$$\mathbf{f}_i = \{\mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^a \quad \mathbf{f}_i^t\}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{N}_i^r)^T \mathbf{N}_j^s d\Omega, \quad r, s = u, a, t \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{C} \mathbf{B}_j^s d\Omega, \quad r, s = u, a, t \quad (15)$$

$$\mathbf{f}_i^u = \int_{\Omega} N_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i^r} N_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (16.a)$$

$$\mathbf{f}_i^a = \int_{\Omega} N_i [H(x) - H(x_i)] \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i^r} N_i [H(x) - H(x_i)] \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (16b)$$

$$\mathbf{f}_i^t = \int_{\Omega} N_i \boldsymbol{\beta}_T [\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_i)] \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i^r} N_i \boldsymbol{\beta}_T [\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_i)] \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (16c)$$

$$\mathbf{N}_i^a = N_i \begin{bmatrix} H(x) - H(x_i) & 0 \\ 0 & H(x) - H(x_i) \end{bmatrix} \quad (17a)$$

$$\mathbf{N}_i^t = N_i \boldsymbol{\beta}_T [\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_i)] \quad (17b)$$

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} (N_i(H(x) - H(x_i)))_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i(H(x) - H(x_i)))_{,y} \\ (N_i(H(x) - H(x_i)))_{,y} & (N_i(H(x) - H(x_i)))_{,x} \end{bmatrix} \quad (18a)$$

$$\mathbf{B}_i^t = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} (N_i \boldsymbol{\beta}_T [\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_i)]) \quad (18b)$$

由式(14)所确定的质量矩阵称为一致质量矩阵，它由标准项、区块对角化附加项以及耦合附加项三个部分组成，其形式与刚度矩阵类似，可参考文献[7,20]。在实际计算中，为了提高计算效率，与传统有限元类似，一般使用集中质量矩阵代替一致质量矩阵。所不同的是，由于裂纹等不连续特征的存在，不能和传统有限元一样把一个单元的质量平均分配到结点的每个自由度上。Menouillard 等^[7]基于质量守恒和动能守恒，提出了几种常见的质量阵对角化方法(如行叠加法、等质量分配法等)，并系统比较了这几种方法对计算精度和稳定时间的影响。Zi 等^[21]采用行求和的方式将质量矩阵对角化，但加强自由度对应的质量矩阵部分采用一致质量矩阵。Jim 等^[22]基于面积比，由常规自由度的对角化质量矩阵来确定加强

自由度对应的对角质量矩阵，并附图说明了裂纹扩展前后单元结点的集中质量的分布情况。庄茁等^[1]、余天堂等^[2]以及江守燕等^[20]也分别提出相应的质量矩阵处理方案。文献[7]所提出的质量集中矩阵基于能量守恒，能获得和无加强自由单元同阶的任意开裂单元的关键时间步长，并且处理简单，所以本文采用该集中质量矩阵，对由广义 Heaviside 函数加强的函数，质量对角化形式为：

$$m_{\text{diag}} = \frac{m}{n_n \text{mes}(\Omega_{\text{el}})} \int_{\Omega_{\text{el}}} H^2 d\Omega \quad (19)$$

式中： Ω_{el} 为单元区域； m 是单元的质量； $\text{mes}(\Omega_{\text{el}})$ 为单元的面积； n_n 为单元的结点数。裂尖单元的质量阵也采用同样的对角化方法简化处理，即将裂尖延长到单元的另一边，计算此时含裂尖单元的节点的 Heaviside 值，由式(19)得到裂尖单元的质量阵。

3 动态应力强度因子的计算

对于平面问题，在裂纹顶端附近，应力分量存在 $r^{-1/2}$ 阶的奇异性。奇异性的强弱程度可由应力强度因子表示，且奇异性不会因为载荷快速变动和裂纹扩展而变化。DSIF 的计算可借助合适的辅助场，基于相互作用积分方法求到。对于稳定的裂纹情形，DSIF 的为^[2]：

$$\begin{cases} K_I = \frac{E^*}{2} I^{(1, \text{mode I})} \\ K_{II} = \frac{E^*}{2} I^{(1, \text{mode II})} \end{cases} \quad (20)$$

式中： $E^* = \begin{cases} E & , \text{平面应力} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & , \text{平面应变} \end{cases}$ ； $I^{(1,2)}$ 为真实应力应变场和辅助应力应变场的相互作用积分，与静力问题相比，动载情况下的相互作用积分增加了一个惯性相关项，其表达式为^[2]：

$$I^{(1,2)} = \int_A (\sigma_{ij}^{(1)} u_{i,1}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{i,1}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)} \varepsilon_{ik}^{(1)} \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A \rho \ddot{u}_i^{(1)} u_{i,1}^{(2)} q dA \quad (21)$$

式中： A 为相互作用积分的积分区域； $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$ 和 $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$ 分别为真实的和辅助的平衡状态； q 为权重函数。

本文求解 DSIF 的步骤为：① 给出积分范围，确定积分单元；② 对积分单元循环；③ 对每个积分单元中高斯点循环；④ 计算每个高斯点

的真实的和辅助的应力及位移导数；⑤ 由式(20)和式(21)求得 DSIF。如图 3 所示，其中 R 表示积分半径 r 与结构最小单元尺寸 L_{\min} 的比值，每个常规积分单元中布置 3×3 个高斯积分点，裂纹贯穿单元和裂尖所在单元增加到 12×12 个高斯积分点。

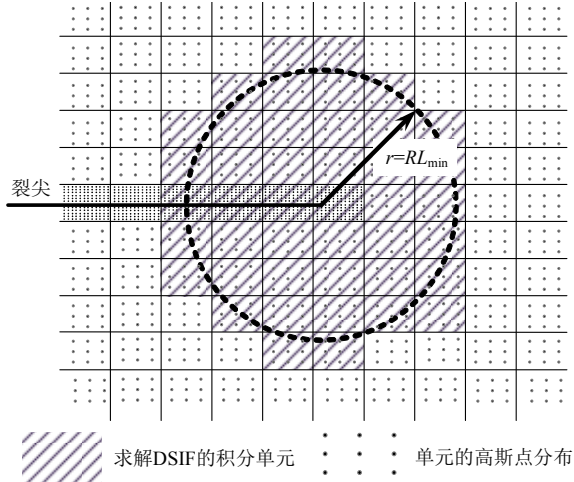


图 3 求解 DSIF 的积分区域及单元高斯点分布

Fig.3 The integral zone for DSIF and the distribution of Gauss point in element

4 显式时间积分格式

时间逐步积分法是求解动力问题控制方程最常用的数值计算方法，逐步积分法可分为隐式方法和显式方法。隐式方法对时间增量步大小没有内在的限制，增量步的大小通常取决于精度和收敛情况，常用的隐式方法有 Newmark- β 法、Wilson- θ 法等。但隐式方法对于每一个增量步都必须迭代求解全域方程组，大大增加了计算成本。而显式方法的时间增量步只依赖于模型的最高固有频率，每一个增量步的计算成本相对较低。本文采用如下的显式时间积分格式：

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (22a)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{int}} \quad (22b)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{U}}_t + \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}) \quad (22c)$$

式中： \mathbf{U}_t 、 $\dot{\mathbf{U}}_t$ 和 $\ddot{\mathbf{U}}_t$ 分别为 t 时刻的位移、速度和加速度； Δt 为时间步长； $\mathbf{F}_t^{\text{ext}}$ 为 t 时刻的外力； $\mathbf{F}_t^{\text{int}}$ 为 t 时刻的内力。

采用显式积分方法，为了得到精确的结果，时间增量必须相当小，使得每个增量步中的加速度几乎为常数，时间步长存在一个稳定性限制，假设该临界时间为 Δt_s ，当时间增量大于 Δt_s 时，出

现数值不稳定现象。对于无阻尼情况，稳定的时间步长 Δt 需满足条件：

$$\Delta t \leq \Delta t_s = \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (23)$$

式中， ω_{\max} 为结构的最高频率。

5 算例分析

5.1 含裂纹的均匀板受瞬态载荷作用

含裂纹的均匀板受到动态荷载作用，其几何形状、裂纹形态及受载情况如图 4 所示，板的两端受水平约束，底部受竖直方向约束。板的长度为 $L=10$ m，宽度为 $2H=4$ m，裂纹长度 $a=5$ m，板的上边缘受到瞬时的拉应力 $\sigma_0=500$ MPa 的作用。材料的弹性模量 $E=210$ GPa，泊松比 $\nu=0.3$ ，密度 $\rho=8000$ kg/m³，采用 33×99 的均匀网格。

对于稳定裂纹，Freund^[23] 基于含半无限长裂纹的无限大板情况，给出了该类问题中裂尖处 DSIF 的理论解：

$$K_I(t) = 2\sigma_0 \frac{\sqrt{c_d t(1-2\nu)/\pi}}{1-\nu} \quad (24)$$

式中， c_d 是材料的膨胀波速，应力波到达裂纹处时 $t=0$ 。此外，该理论解是存在局限性的。随着时间持续增大，根据式(24)的所得的 DSIF 将会趋向无穷大，与实际情况是不相符的，本文模拟结果表明该理论解的有效性只在与临界时间 t_c 相当量级的时间范畴内。

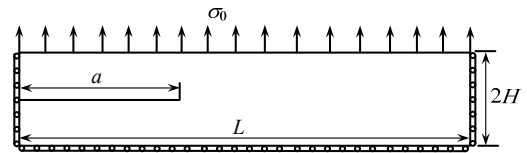


图 4 含裂纹均匀板的载荷及边界条件

Fig.4 Loading and boundary conditions of a homogeneous material plate with crack

本文将所得到的 DSIF 除以 $K_0 = \sigma\sqrt{a}$ 进行标准化，数值计算的时间从应力波开始传播时计算，并将时间 t 除以 $t_c = H/c_d$ 进行无量纲化处理，其中 t_c 是应力波从试件顶部传播到裂纹处所用的时间。

图 5 给出了时间步长为 $\Delta t = 0.1 \mu\text{s}$ 时，不同积分路径对应的 DSIF 计算结果，并与理论解对比。从图中可以看出，本文所使用的方法对于不同的积分路径具有很好的稳定性。当 $t \leq t_c$ 时，曲线前部分结果为零，这是由于应力的传播还没有到达

相应的 DSIF 的积分区域；在应力波到达裂纹处后，数值解与理论解是比较一致的；但是，由于得出理论解的计算条件和本文并不完全一致，且理论解是在裂纹面受到应力作用瞬时所得到的，理论解存在一定的局限性，故数值解和理论解结果并不完全一致。

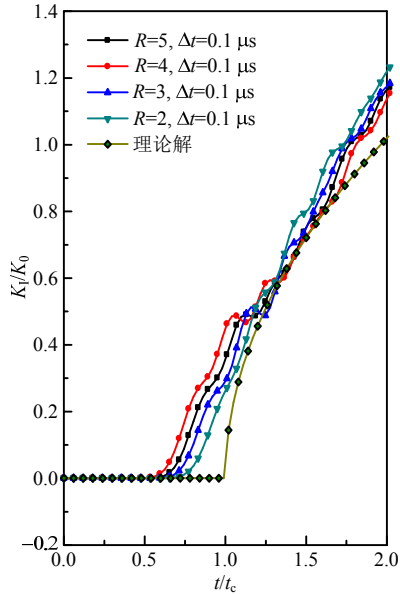


图 5 不同积分路径下的 DSIF

Fig.5 The DSIF with different integral path

图 6 给出了 $R=5$ 时，不同时间步长下得到的 DSIF。从图中可以看出，取不同的时间步长得出的结果几乎相同，说明该方法对时间步长的变化并不敏感。随后，由于反射波和入射波的重叠，会产生振荡现象，如图 7 所示，数值结果很好地显示了这个现象。

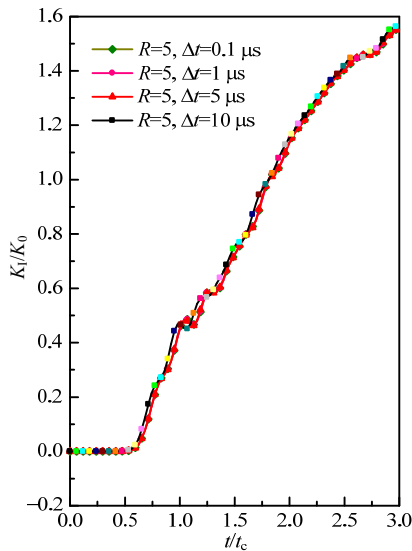


图 6 不同时间步长计算得到的 DSIF

Fig.6 The DSIF with different time step

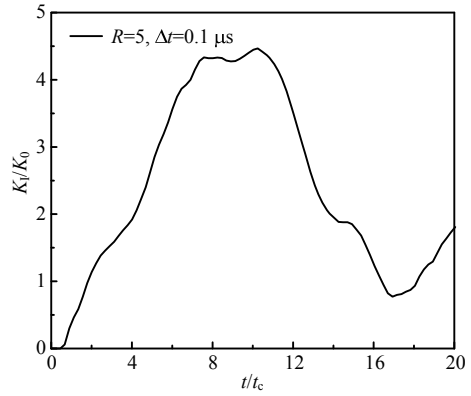


图 7 裂尖端处的 DSIF

Fig.7 The DSIF of crack tip

5.2 含中心裂纹的矩形板受瞬态载荷作用

如图 8 所示，含中心裂纹的矩形板两端受到突加荷载 $\sigma=100$ MPa 的作用，板的尺寸为 $2h=0.04$ m， $2b=0.02$ m，裂纹长度 $2a=0.0048$ m，材料的弹性模量 $E=199.99$ GPa，泊松比 $\nu=0.3$ ，密度 $\rho=5000$ kg/m³。试件离散为 49×99 的均匀四节点网格，将所得到的 DSIF 除以 $K_0 = \sigma\sqrt{a}$ 进行标准化。

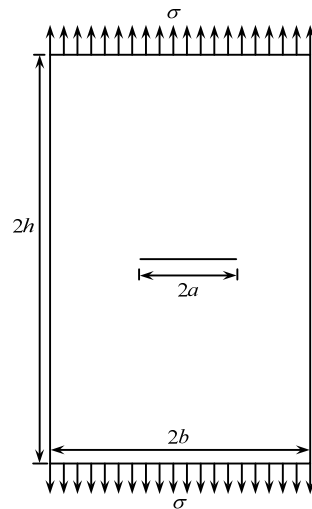
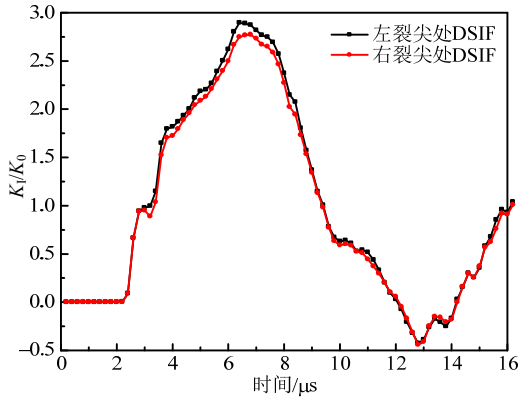


图 8 结构示意图

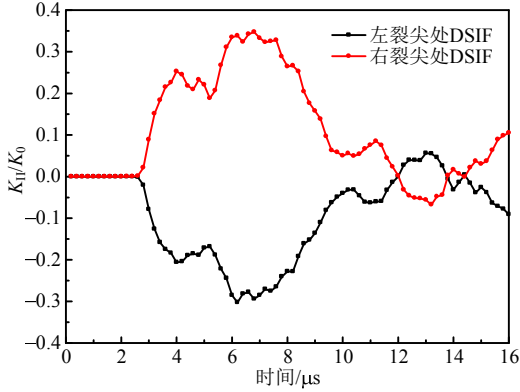
Fig.8 The sketch of structure

图 9 给出了积分区域 $R=5$ 时裂纹左右两裂尖点的 I 型和 II 型 DSIF，从图中可以看出，I 型 DSIF 的两条曲线十分吻合，II 型 DSIF 的曲线呈反对称，符合实际情况。

图 10 中将时间 t 乘以 $t_c=2C_d/h$ 进行无量纲化处理，其中 t_c 是应力波从试件顶部传播到裂纹尖端处所用的时间， C_d 是材料的膨胀波的传播速度。给出了无量纲化后左裂尖端处 DSIF 的曲线，结果与 Song 等^[24]和江守燕等^[20]的结果相吻合。



(a) I 型



(b) II 型

图 9 裂尖两端的 DSIF

Fig.9 The DSIF of two crack tips

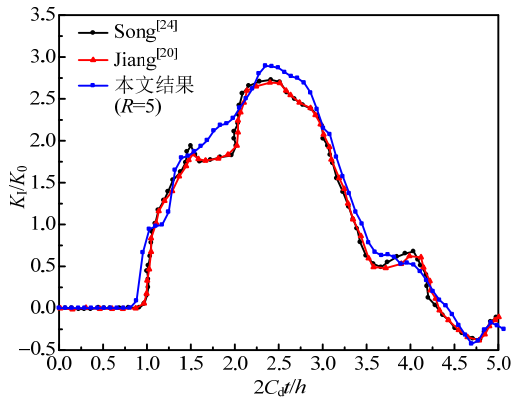


图 10 本文结果与文献[20,24]结果比较

Fig.10 Comparisons of the present results and the reference solution

图 11 给出了不同积分区域对左裂尖处 DSIF 的影响，可以看出不同的积分区域对 DSIF 影响不大，也验证了应力强度因子在不同积分路径下得到的结果是相同的。图 12 给出了不同的时间步长计算得到的左裂尖处 DSIF 随时间的变化曲线，在不同的时间步长下，所得到的 DSIF 结果相同，说明当时间步长低于稳定值时，数值结果趋向稳定。

图 13 给出了左裂尖处的 DSIF 随时间的变化情况

况，试件受到冲击后，膨胀波传播一定时间后到达试件的边界后会产生反射波，直接影响裂尖 DSIF 的变化，裂尖处的 DSIF 随计算时间的变化十分剧烈，且呈现出周期性变化，体现了应力波传播的过程。

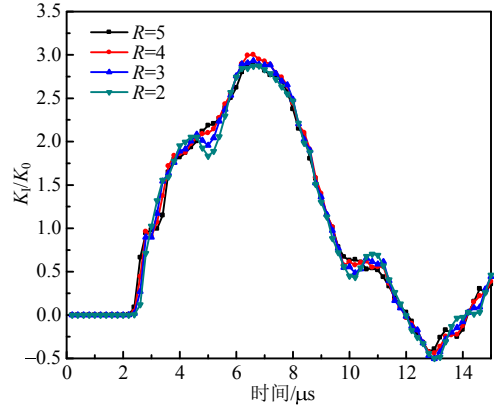


图 11 不同积分路径下对应的左裂尖处的 DSIF

Fig.11 The DSIF with different integral path of the left crack tip

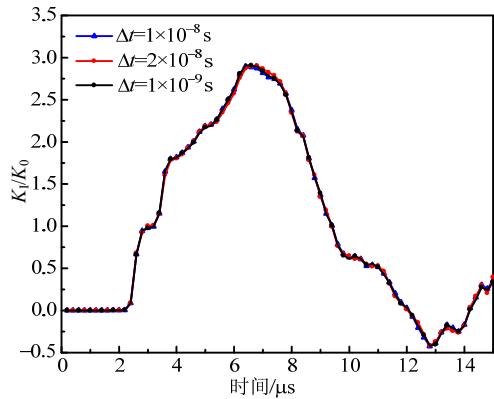


图 12 不同时间步长对应的左裂尖处 DSIF

Fig.12 The DSIF of the left crack tip with different time increments

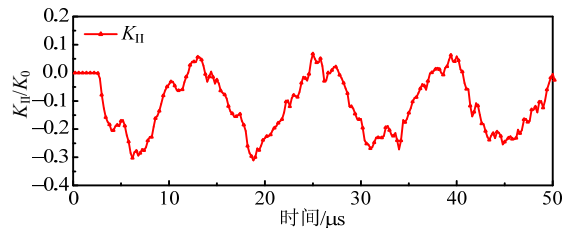
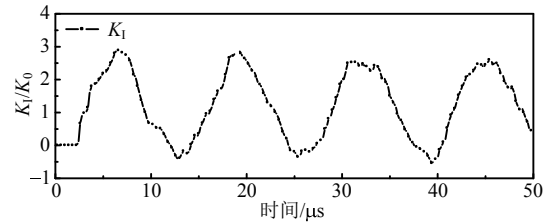


图 13 左裂尖处的 DSIF 随时间呈周期性变化

Fig.13 The DSIF of the left crack tip changed periodically over time

5.3 含不同角度中心裂纹的矩形板受瞬态载荷作用

如图 14 的矩形板, 其材料参数及受载条件与算例 5.2 相同, 裂纹长度也相同, 裂纹呈不同的角度变化。图 15 给出了夹角 $\theta=15^\circ$ 、 30° 、 45° 、 60° 和 75° 时的 I 型和 II 型 DSIF 的变化曲线, 并与文献[25]中的结果进行对比, 表现出较好的吻合性。

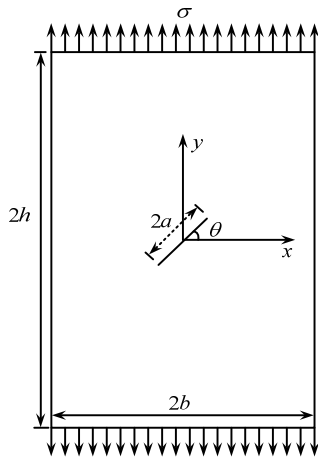
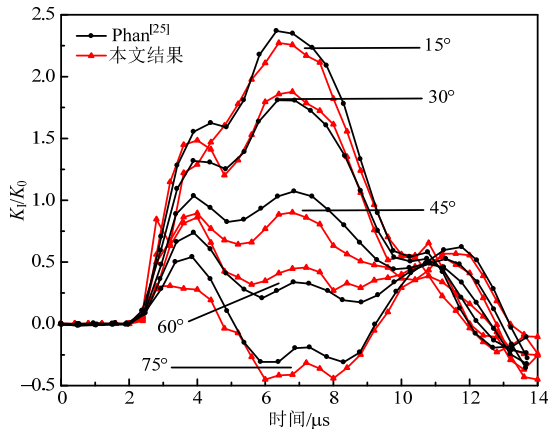
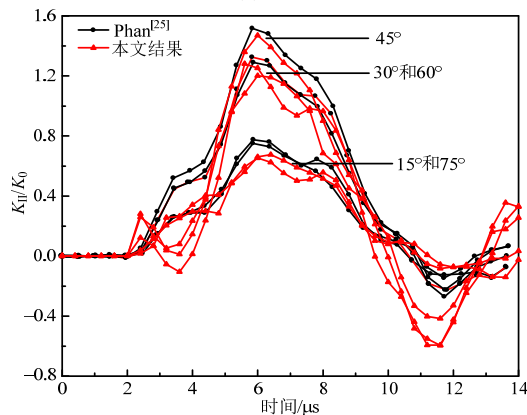


图 14 含不同角度裂纹的矩形板

Fig. 14 The rectangular plate with crack of different angle



(a) I 型



(b) II 型

图 15 不同角度的裂纹尖端的 DSIF

Fig. 15 The DSIF of crack tip with different rotation angle

从图 15(a)可以看出, 在应力波到达裂尖后的小段时间内, I 型 DSIF 的峰值随着 θ 的增大逐渐减小; 从图 15(b)中所示的 II 型 DSIF 中看出, $\theta=15^\circ$ 和 $\theta=75^\circ$ 、 $\theta=30^\circ$ 和 $\theta=60^\circ$ 的 KII 曲线重合度很高, 这与文献[25-26]中的结果是一致的。

6 结论

本文在扩展有限元的框架下, 利用含裂纹的无限大板的 I 型和 II 型断裂问题的裂尖位移场的解析解形式, 构造了一种新的裂尖加强函数。与由传统三角基函数表征的加强函数相比, 新提出的加强函数使得裂尖结点附加自由度个数减少为 2 个, 大大提高了计算效率。另外, 采用显式时间积分方法研究了稳定裂纹的瞬间受载问题, 与隐式时间积分算法相比较, 显式方法不用求解全域方程组, 大大减少计算耗时。最后, 通过算例, 并与相关文献的结果比对分析, 表明文中所提出的裂尖加强函数是可行有效的。

参考文献:

- [1] 庄茁. 扩展有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012: 9-12.
Zhuang Zhuo. The extended finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012: 9-12. (in Chinese)
- [2] 余天堂. 扩展有限单元法——理论、应用及程序[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 31-45.
Yu Tiantang. The extended finite element method: Theory, application and program [M]. Beijing: Science Press, 2014: 31-45. (in Chinese)
- [3] Belytschko T, Chen H. Singular enrichment finite element method for elastodynamic crack propagation [J]. International Journal of Computational Methods, 2004. 1(1): 1-15.
- [4] Belytschko T, Hao C, Jingxiao X, et al. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 58(12): 1873-1905.
- [5] Réthoré J, A Gravouil, A Combescure. An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005. 63(5): 631-659.
- [6] Réthoré J, A Gravouil, A Combescure. A combined space-time extended finite element method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 64(2): 260-284.
- [7] Menouillard T, Réthoré J, A Combescure, et al. Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element

- Method (X - FEM) [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 68(9): 911—939.
- [8] Menouillard T, Réthoré J, Moes N, et al. Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics: Application to crack propagation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 74(3): 447—474.
- [9] Kumar S, Singh I V, Mishra B K, et al. New enrichments in XFEM to model dynamic crack response of 2-D elastic solids [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2016, 87(1): 198—211.
- [10] Xu D, Liu Z L, Liu X M, et al. Modeling of dynamic crack branching by enhanced extended finite element method [J]. *Computational Mechanics*, 2014, 54(2): 489—502.
- [11] Liu Z L, T Menouillard, T Belytschko. An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation [J]. *International Journal of Fracture*, 2011, 169(2): 183—198.
- [12] 张社荣, 王高辉, 庞博慧, 等. 基于 XFEM 的强震区砼重力坝开裂与配筋抗震措施研究[J]. *振动与冲击*, 2013, 32(6): 137—142.
Zhang Sherong, Wang Gaohui, Pang Bohui, et al. Seismic cracking and reinforcement analysis of concrete gravity dam based on XFEM [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(6): 137—142. (in Chinese)
- [13] 夏晓舟, 章青. 含两类附加函数的扩展等参有限元法[J]. *计算力学学报*, 2008, 25(1): 41—47.
Xia Xiaozhou, Zhang Qing. Extended isoparametric finite element method including two class of enrichment functions [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, 25(1): 41—47. (in Chinese)
- [14] 王克锋, 章青, 夏晓舟. 考虑流固耦合效应的重力坝水力劈裂模拟[J]. *应用数学和力学*, 2015, 26(9): 970—980.
Wang Kefeng, Zhang Qing, Xia Xiaozhou. Modelling of Hydraulic fracturing for concrete gravity dams under fluid-structure interaction [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 26(9): 970—980. (in Chinese)
- [15] Wang Kefeng, Zhang Qing, Xia Xiaozhou, et al. Analysis of hydraulic fracturing in concrete dam considering fluid-structure interaction using XFEM-FVM model [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2015, 57(1): 399—412.
- [16] 江守燕, 杜成斌. 一种 XFEM 断裂分析的裂尖单元新型改进函数[J]. *力学学报*, 2013, 45(1): 134—138.
Jiang Shouyan, Du Chengbin, A novel enriched function of elements containing crack tip for fracture analysis in XFEM [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(1): 134—138. (in Chinese)
- [17] 江守燕, 杜成斌, 顾冲时, 等. 求解双材料界面裂纹应力强度因子的扩展有限元法[J]. *工程力学*, 2015, 32(3): 22—27.
Jiang Shouyan, Du Chengbin, Gu Chongshi, et al. Computation of stress intensity factors for interface cracks between two dissimilar materials using extended finite element methods [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(3): 22—27. (in Chinese)
- [18] 范天佑. 断裂动力学原理与应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2006: 7—13.
Fan Tianyou. *Fracture dynamics: principle and application* [M]. Beijing: Beijing Insitute of Technology Press, 2006: 7—13. (in Chinese)
- [19] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45(5): 601—620.
- [20] 江守燕, 杜成斌. 动载下缝端应力强度因子计算的扩展有限元法[J]. *应用数学和力学*, 2013, 34(6): 586—597.
Jiang Shouyan, Du Chengbin. Evaluation on stress instensity factors at the crack tip under dynamic loads using extended finite element methods [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(6): 586—597. (in Chinese)
- [21] Zi G, Chen H, Xu J, et al. The extended finite element method for dynamic fractures [J]. *Shock and Vibration*, 2005, 12(1): 9—23.
- [22] Jim Lua, Zhang Tingting, Eugene Fang, et al. Explicit phantom paired shell element approach for crack branching and impact damage prediction of aluminum structures [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2016, 87(1): 28—43.
- [23] Freund L B. *Dynamic fracture mechanics* [M]. New York: Cambridge University Press, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, 1990: 356—366.
- [24] Song S H, Paulino G H. Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method [J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2006. 43(16): 4830—4866.
- [25] Phan A V, Gray L J, Salvadori A. Transient analysis of the dynamic stress intensity factors using SGBEM for frequency-domain elastodynamics [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2010, 199(45/46/47/48): 3039—3050.
- [26] Liu P, Bui T B, Zhang C H, et al. The singular edge-based smoothed finite element method for stationary dynamic crack problems in 2D elastic solids [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2012, 233/234/235/236(4): 68—80.