罚函数法

李宗军

青岛理工大学 · 理学院

2016 年

要点

1. 罚函数法
   - 外点法
   - 内点法

罚函数法

算法思想 利用问题中的约束，构造适当的带有参数的惩罚函数，然后在转移到原来的目标函数上，以构造增广目标函数，把约束 NLP 问题转化为求解一系列无约束 NLP 问题。

序列无约束极小化方法 这种把约束 NLP 的求解转换为一系列无约束优化问题求解的方法，统称为序列无约束极小化方法。

外点罚函数法 I

- 考虑问题 $\min\{f(x)|g(x)\le 0, h(x)=0\}$,
- 构造增广函数：$F(x)=f(x)+M_k p(x)$, 其中 $p(x)$ 有如下常见的形式：
  1. $p(x)=\left(\sum_{i\in I}\max\{g_i(x),0\}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_j[h_j(x)]^2$
  2. $p(x)=\sum_{i\in I}\max\{g_i(x),0\}+\frac{1}{2}\sum_j[h_j(x)]^2$
  3. $p(x)=\max\{\max_{i\in I}g_i(x),0\}+\frac{1}{2}\max_j[h_j(x)]^2$
- 其中第二种，其梯度：

  $\nabla p(x)=\sum_{i\in I}|\mathrm{sign}(\max\{g_i(x),0\})|\,\nabla g_i(x)+\sum_j h_j(x)\nabla h_j(x)$
- 参数 M_k 的选取策略 $M_1<M_2<\cdots<M_k<\cdots$
- 终止条件
  1. $M_k p(x)\le\varepsilon$(不可，因为 $M_k p(x)$ 是不定式)

外点罚函数法 II

2. $p(x) \leq \varepsilon$, 当初始点是可行点时，此终止条件错误（找不到最优解）
3. 取 $\max\left\{g_i(x^k), h_j(x^k) | i \in I, j \in J\right\} \leq \varepsilon$. 其作用和缺点同 2.

- 终止条件的改进:
  - $p(x) \leq \varepsilon$ 且 $\left\|x^k - x^{k-1}\right\| \leq \varepsilon$
  - 启动点无论是不可行点，还是可行点，算法都会收敛到最优解。从而是全局收敛算法。
  - 迭代过程中无论 x^k 是不可行点，还是可行点，都能保证迭代顺利进行下去，最终获得最优解。

迭代步骤

1. 初始化：给定初始点 x^1, 构造 $x^0 = x^1 - 2$, 给定误差 $\varepsilon > 0$, 参数序列 $\{M_k\}$, 令 $k = 1$
2. 检查当前迭代点是否满足终止条件:$\left|p(x^k)\right| \le \varepsilon$ 且 $\left\|x^k - x^{k-1}\right\| \le \varepsilon$? 若满足，则输出 x^k, 停止计算；否则转向下一步
3. 构造增广目标函数 $F(x) = f(x) + M_k p(x)$, 然后采用无约束优化方法，从当前迭代点 x^k 出发，计算其最优解, 得 x^{k+1}.
4. $k := k + 1$, 转向步骤 2.

例题

用罚函数求解问题 $\min\left\{x^2 | 1 - x \leq 0\right\}$

演示:

障碍函数法 (内点罚函数法)

1. 考虑问题 $\min\{f(x)|g(x) \leq 0\}$,
2. 构造增广函数: $F(x) = f(x) + m_k p(x)$, 其中 $p(x)$ 有如下常见的形式:
   - $p(x) = -\sum_i \frac{1}{g_i(x)}$
   - $p(x) = -\sum_i \ln[-g_i(x)]$
3. 参数 m_k 的选取策略 $m_1 > m_2 > \cdots > m_k > \cdots$
4. 终止条件:
   - $m_k p(x) \leq \varepsilon$(不可),
   - $p(x) \leq \varepsilon$,(不可)
   - $\min_i\{|g_i(x)|\} \leq \varepsilon$ (可以)

迭代步骤

1. 初始化：给定初始点 x^0, 参数序列 $\{m_k\}$, 令 $k = 0$
2. 检查当前迭代点是否满足终止条件 $\min_i \{|g_i(x)|\} \le \varepsilon$? 若满足，则输出 x^k, 停止计算；否则转向下一步
3. 构造增广目标函数 $F(x) = f(x) + m_k p(x)$, 然后采用无约束优化方法，从当前迭代点 x^k 出发，计算其最优解, 得 x^{k+1}.
4. $k := k + 1$, 转向步骤 2.

例题计算

课本例题

小结

1. 罚函数法的思想
2. 罚函数法的分类
    1. 外点法
    2. 内点法