约束最优性条件

李宗军

青岛理工大学 · 理学院

2016 年

要点

1. 约束极值和最优性条件

NLP 模型

其向量形式为

$$\min f(x)$$
$$s.t.\begin{cases} g_i(x)\le 0, & i\in I \\ h_j(x)=0, & j\in J \end{cases}$$

$$\min f(x)$$
$$s.t.\begin{cases} g(x)\le 0 \\ h(x)=0 \end{cases}$$

由于等式和不等式之间可以等价转化，故上面的模型还可以表达为只含有等式约束或者只含有不等式约束的情况。

只含有等式约束

由数学分析的条件极值问题，我们知道，构造 Lagrange 增广函数，从而把等式约束优化问题转换为无约束问题：

$$L(x,u)=f(x)+u^T h(x)$$

在最优解 (x^*,u^*) 处，必有

$$\nabla L=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial u}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\nabla f(x)=\sum_{j\in J} u_j \nabla h_j(x) \\ h_j(x)=0, j\in J \end{cases}$$

只含有不等式约束 I

不等式约束分 2 种:

1. $g_i(x) = 0$,—(1)（紧约束, x 在边界上）
2. $g_i(x) < 0$,—(2)（松约束, x 在可行区域的内部）

记 $I(x^*) = \{i | g_i(x^*) = 0, i \in I\}$

Definition

紧约束（积极约束）: 若 $\exists x^* \in D$, 使得 $g_i(x^*) = 0$, 则称 $g_i(x) \leq 0$ 为点 x^* 的一个积极约束，或者紧约束。

? 问

能否可以把紧约束 (1) 式看作是类似 $h(x) = 0$ 的等式约束来处理?

从而，有 $-\nabla f(x) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x)$，$\lambda_i \geq 0, i \in I$

对一般约束:K-T 条件 I

既含有不等式约束，又含有等式约束：

$$-\nabla f(x) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j \in J} u_j \nabla h_j(x), \lambda_i \geq 0, i \in I$$

等价于

$$\nabla f(x) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j \in J} u_j \nabla h_j(x) = 0, \lambda_i \geq 0, i \in I$$

对一般约束:K-T 条件 II

等价于

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j \in J} u_j \nabla h_j(x) &= 0 \\ \lambda_i g_i(x) = 0, i \in I \\ \lambda_i \geq 0, i \in I \end{aligned} \qquad (1)$$

(1) 被称为**K-T**条件（定理 4.5.1），其中 $\lambda_i g_i(x) = 0$ 称为互补松紧条件。

1. K-T 条件是 NLP 最优解的必要条件!
2. 凸规划的充要条件：定理 4.5.2
3. K-T 条件的作用是：把最优化问题，转换为方程组问题，然后运用方程组的求解理论方法来解决。

对一般约束:K-T 条件 III

4. 注意：K-T 条件适用于 LP 问题

LP 之 K-T 条件 I

考察 $\min\{c^T x | Ax = b, x \geq 0\}$，转换为 NLP 之形式:

$$\min c^T x$$
$$st. \begin{cases} -x & \leq 0 \\ Ax - b & = 0 \end{cases}$$

故其 K-T 条件为

$$c - \lambda - A^T u = 0 \tag{2}$$
$$-\lambda^T x = 0 \tag{3}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{4}$$

LP 之 K-T 条件 II

由 (2) 知，$\lambda = c - A^T u$,

从而 (3) 为

$-\lambda^T x = (u^T A - c^T)x = u^T Ax - C^T x = U^T b - C^T x = b^T u - c^T x = 0$,

对应 LP 的对偶间隙。

- 其分量形式为 $-\lambda_j x_j = -(c_j - \sum_i a_{ij} u_i) x_j = 0$，即

$$(c_j - \sum_i a_{ij} u_i) x_j = 0$$

例题 4.5.1

求下面问题的 K-T 点:

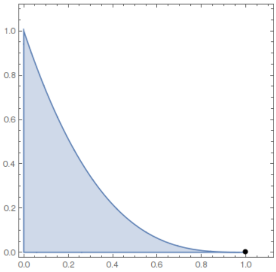
$$
\begin{aligned}
\min f(x_1, x_2) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\
g_1(x) &= x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\
g_2(x) &= -x_1 \le 0 \\
g_3(x) &= -x_2 \le 0 \\
h_1(x) &= -x_1 + x_2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

补充例题 1

用做图法求解下面问题的最优解，然后验证是否满足 K-T 条件？这说明了什么问题？

$$
\begin{aligned}
&\min -x_1 \\
&g_1(x) = (1-x_1)^3 - x_2 \geq 0 \\
&g_2(x) = x_1 \geq 0 \\
&g_3(x) = x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

求解结果

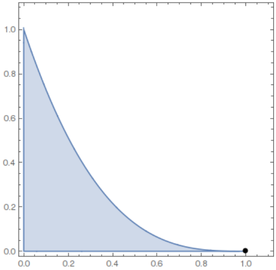


由图可知，$x^* = (1,0)^T$ 是最优解，
显然 $g_2(x) \notin I(x^*)$ 且
$\nabla f(x^*) = (-1,0)^T$
$-\nabla g_1(x^*) = (0,1)^T$
$-\nabla g_3(x^*) = (0,-1)^T$
显然不存在 $\lambda_1, \lambda_3 > 0$ 使得
$\nabla f(x^*) + \lambda_1(-\nabla g_1(x^*)) + \lambda_3(-\nabla g_3(x^*)) = 0$. 即 x^* 不是 K-T 点。

? 思考

K-T 条件是最优解的必要条件矛盾？

求解结果



由图可知，$x^* = (1,0)^T$ 是最优解，

显然 $g_2(x) \notin I(x^*)$ 且

$\nabla f(x^*) = (-1,0)^T$

$-\nabla g_1(x^*) = (0,1)^T$

$-\nabla g_3(x^*) = (0,-1)^T$

显然不存在 $\lambda_1, \lambda_3 > 0$ 使得

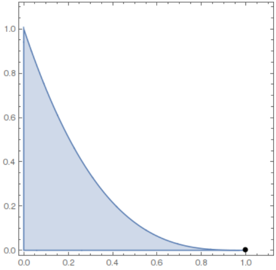
$\nabla f(x^*) + \lambda_1(-\nabla g_1(x^*)) + \lambda_3(-\nabla g_3(x^*)) = 0$. 即 x^* 不是 K-T 点。

? 思考

K-T 条件是最优解的必要条件矛盾？

不矛盾！因为 K-T 条件的前提是 $\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*), \nabla h_j(x^*), j \in J$ 线性无关。

求解结果



由图可知，$x^* = (1,0)^T$ 是最优解，显然 $g_2(x) \notin I(x^*)$ 且

$\nabla f(x^*) = (-1,0)^T$

$-\nabla g_1(x^*) = (0,1)^T$

$-\nabla g_3(x^*) = (0,-1)^T$

显然不存在 $\lambda_1, \lambda_3 > 0$ 使得 $\nabla f(x^*) + \lambda_1(-\nabla g_1(x^*)) + \lambda_3(-\nabla g_3(x^*)) = 0$. 即 x^* 不是 K-T 点。

? 思考

K-T 条件是最优解的必要条件矛盾？

结论：局部最优解，在满足有关的梯度们是线性无关的前提下，一定是 K-T 点。

补充例题 2

求解下面问题的 K-T 点，请问它是最优解吗？

$$\min x_2$$

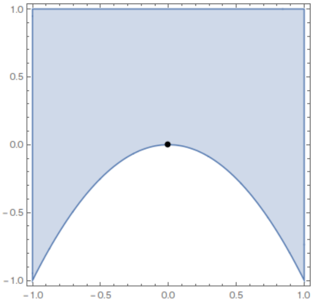
$$x_1^2 + x_2 \geq 0$$

补充例题 2

求解下面问题的 K-T 点，请问它是最优解吗？

$$\min x_2$$

$$x_1^2 + x_2 \geq 0$$



$(0,0)$ 是 K-T 点，但该问题不存在最小值点。

结论：

(1) K-T 点不一定是局部最小值点;

(2) K-T 条件仅仅必要而非充分条件

(3) 对凸规划则是充要条件

小结

1. 等式约束的 K-T 条件
2. 不等式约束的 K-T 条件
3. 一般的 NLP 的 K-T 条件
4. K-T 条件的计算
5. K-T 条件是必要条件，注意其梯度们是线性无关的
6. 对凸规划，K-T 条件是充要条件
7. LP 问题的 K-T 条件
8. K-T 的作用是把最优化问题转换为方程组问题

作业

T21,22,23