第八讲：
线性微分方程组（二）

基解矩阵的求法:

（1）直接展开法（特殊三角阵）；

（2）特征根法（互不相同）；

（3）空间分解法（存在重根）.

1. 直接展开法（特殊三角阵）

$\phi(t)=e^{At}$是实的标准基解矩阵【$\phi(0)=E$】

$$A=A_1+A_2$$

$$e^{At}=e^{(A_1+A_2)t}=\underbrace{e^{A_1t}\cdot e^{A_2t}=e^{A_2t}\cdot e^{A_1t}}_{\text{要求}A_1A_2=A_2A_1}$$

直接展开法，一般采用

$A=kE+A_2$　(A_2是对角线为0的三角阵)

【易验$kE\cdot A_2=A_2\cdot kE$】

例1. 求$X'(t)=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}X(t)$的基解矩阵

解: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ (后两个可交换)

$$e^{At}=\exp\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}t\right)\cdot\exp\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}t\right)$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}\left(E+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\cdots\right)$$

$$=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

2. 特征根法（互不相同）

令$X = e^{\lambda t}C$，代入方程$X' = AX$，

$$\lambda e^{\lambda t}C = Ae^{\lambda t}C,$$

即 $$(\lambda E - A)e^{\lambda t}C = 0.$$

特征方程： $\det(\lambda E - A) = 0.$

$$(\lambda E - A)u = 0$$

[u为对应特征值λ的特征向量]

对应方程的线性无关解】
【矩阵的特征向量不一定
存在重根时不适用

当所求特征值λ中有复根时

$$\phi(t)\phi^{-1}(0) = e^{At}$$ [实标准基解阵]

定理： 如果矩阵$\boldsymbol{A}$具有$\boldsymbol{n}$个线性无关的特征向量，它们对应的特征值不必各不相同，则

$$\boldsymbol{\phi(t)=[e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2, \cdots e^{\lambda_n t}v_n]}$$

是齐次方程 $\boldsymbol{X'=AX}$ 的一个基解矩阵.

相应的通解为

$$\boldsymbol{X(t)=\phi(t)C}$$

$$\boldsymbol{=c_1e^{\lambda_1 t}v_1+c_2e^{\lambda_2 t}v_2+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}v_n}$$

例2. 求$X'(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}X(t)$的基解矩阵与通解

解：$0=\det(\lambda E-A)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -1\\ -6 & \lambda-2\end{bmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4$

求得λ_1=4，λ_2=-1

由$(4E-A)u=0$求得对应于的特征向量：$u=\alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

由$(-E-A)v=0$求得对应于的特征向量：$v=\beta\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

其中α,β是任意非零常数。

基解矩阵为$\phi(t)=\left[e^{4t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right]=\begin{bmatrix}e^{4t} & e^{-t}\\ 3e^{4t} & -2e^{-t}\end{bmatrix}$

通解为$X(t)=c_1e^{4t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

3. 空间分解法（存在重根）

有重根时针对齐次方程组的初值问题：

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \eta \end{cases}$$

其特解可表达为

$$X(t) = e^{At}\eta$$ 【如何具体求出？】

方法：将初值在不同子空间中投影

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{array}$$

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$$

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$$

$$\eta = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$$

$(A-\lambda_j E)^{n_j} u = 0$的解的全体构成n维欧氏空间的一个$n_j$维子空间，则当$l \geq n_j$时都有

$$(A-\lambda_j E)^l v_j = 0$$

$$X(t)=e^{At}\eta=e^{At}\sum_{j=1}^{k}v_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}e^{(A-\lambda_j E)t}v_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[E+t(A-\lambda_j E)v_j+\frac{t^2}{2}(A-\lambda_j E)^2 v_j+\cdots+\frac{t^{n_j-1}}{n_j-1}(A-\lambda_j E)^{n_j-1}v_j\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(A-\lambda_j E)^i\right]v_j$$

例如：系数矩阵为三阶阵，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$

$$X(t)=e^{t}Ev_1+e^{2t}\left[E+t(A-2E)\right]v_2$$

谢谢！