第四讲：
一阶微分方程存在唯一性定理

1. 解的存在性
2. 解的唯一性
3. 解的近似估计

1. 解的存在性

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad (x,y)\in R:|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b$$

满足Lipschitz条件：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

理解：不是线性的，但能被线性控制住。

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds$$

构造Picard迭代序列：

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=y_0, \\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{n-1}(s))ds, \end{cases} \quad |x\text{-}x_0|\le h.$$

$$\text{其中} h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right), M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$$

证明所构造的Picard迭代序列一致收敛

$$\because \ \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$$

只要 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

用数学归纳法可以证明：

$$|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k < \infty$$

函数序列一致收敛则存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\phi(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\lim_{n\to\infty}\varphi_{n-1}(s))ds$$

$$\Rightarrow\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))ds$$

$$\Rightarrow\frac{d\phi}{dx}=f(x,\phi)$$

所以$y=\phi(x)$是原方程的解. 存在性得证.

2. 解的唯一性

Gronwall不等式（课后第6题）

若 $f(t) \le K + \int_{\alpha}^{t} f(s)g(s)ds,\ \alpha \le t \le \beta$

则有 $f(t) \le Ke^{\int_{\alpha}^{t} g(s)ds},\quad \alpha \le t \le \beta$

Gronwall不等式的简化版本（Bellman引理）：

若 $f(t) \le \delta + k\int_{t_0}^{t} f(s)ds,\ \alpha \le t \le \beta$

则有 $f(t) \le \delta e^{k|t-t_0|},\quad \alpha \le t \le \beta$

此简化版本更常用！

假设有两解$\phi(x),\psi(x)$则

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\phi(x))dx$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\psi(s))ds$$

从而当$x\geq x_0$时

$$|\phi(x)-\psi(x)|\leq\int_{x_0}^{x}|f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s))|ds$$

$$\leq 0+L\int_{x_0}^{x}|\phi(s)-\psi(s)|ds$$

由Gronwall不等式

$|\phi(x)-\psi(x)|\leq 0\times e^{L|x-x_0|}=0,$ 从而$\phi(x)\equiv\psi(x).$

3. 解的近似估计

Picard迭代序列可直接用于解的估计

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds, \end{cases} \quad |x - x_0| \le h.$$

这是最经典的估计方法

例1： 求方程 $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 过 $(0,0)$ 点的第二次近似解.

解：由Picard迭代方法,

$$
\begin{cases}
\bar{y}_0(x)=0, \\
\bar{y}_1(x)=0+\int_0^x (s^2+\bar{y}_0^2)ds=\int_0^x s^2 ds=\frac{1}{3}x^3, \\
\bar{y}_2(x)=0+\int_0^x (s^2+\bar{y}_1^2)ds=\int_0^x (s^2+\frac{1}{9}s^6)ds=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7.
\end{cases}
$$

谢谢！