第三讲：
一阶线性方程与恰当方程

1. 一阶线性方程
2. 伯努利方程
3. 恰当方程

一、一阶线性微分方程

1、定义： 形如 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$ （1）的方程

称为一阶线性微分方程。

若 $Q(x)\equiv 0$，称为一阶齐次线性微分方程。

若 $Q(x)\not\equiv 0$，称为一阶非齐次线性微分方程。

这里假设$P(x)$,$Q(x)$在定义域里都连续。

2、常数变易法：

对齐次线性微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y$

是变量分离方程，可求得其通解为

$$y = Ce^{\int P(x)dx} \quad (\forall C) \qquad (2)$$

下面讨论非齐次方程的通解。

作变换 $y(x) = u(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，则

$$u'e^{\int P(x)\mathrm{d}x} + \cancel{P(x)ue^{\int P(x)\mathrm{d}x}} = \cancel{P(x)ue^{\int P(x)\mathrm{d}x}} + Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $u = \int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$

故原方程的通解 $y=e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

即 $y=\underbrace{Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}\underbrace{+e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$

即叠加原理

这种将常数变易为待定函数的方法称为常数变易法

例1. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解：先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$，即 $y=C(x+1)^2$

用常数变易法求特解. 令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$，则

$$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{1/2}$

解得 $$u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例2、求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$

解：原方程不是y的线性方程，变形为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y \quad (*)$$

先解齐次方程 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2}{y}x \Rightarrow x=Cy^2$

令非齐次方程的解为: $x=C(y)y^2$

代入（*）式得:

$$\frac{dx}{dy} = C'(y)y^2 + 2C(y)y = \frac{2}{y}C(y)y^2 - y$$

$$\therefore C'(y) = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow C(y) = -\ln|y| + c_1$$

所以原方程的通解为：

$$x = y^2(c_1 - \ln|y|)$$

二、伯努利 (Bernoulli)方程

雅各布第一·伯努利

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$$

解法: 以 y^n 除方程两边，得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例3. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

三、恰当方程

一阶方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \Leftrightarrow f(x, y)dx - dy = 0$

也可写成对称形式的一阶微分方程:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

其中$M(x,y)$, $N(x,y)$是x, y的连续函数，且具有连续的一阶偏导数。

定义:如果$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (1)左端恰为某

二元函数$u(x,y)$的全微分，即

$$Mdx + Ndy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

则称方程(1)为恰当方程*or*全微分方程。

积分因子法

1、回顾:

(1) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (1) 是恰当方程

$$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

(2)记住基本关系式: $\begin{cases} ydx+xdy=d(xy) \\ \dfrac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases}$

(3)一般采用“分项组合”方法。

但是当方程(1)不是恰当方程时，又如何处理呢？

2、积分因子

如果存在连续可微函数 $\mu=\mu(x,y)\neq 0$，使得

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad (3)$$ 成立，即

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \quad (4)$$

为恰当方程，则称 $\mu(x,y)$ 为积分因子。

解题步骤：

1)判断 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ 是否成立；

2)求出积分因子，化为恰当方程。

下面我们来看看如何求积分因子：

将 $$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$ **(3) 展开：**

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}\qquad(5)$$

本方程(5)难解，只考虑特殊情况：

(1) $\frac{\partial \mu}{\partial y}=0, \mu=\mu(x)$ ，(5)式变形为：

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu}=\varphi(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int \varphi(x)dx}$$

(2) $\frac{\partial \mu}{\partial x}=0, \mu=\mu(y)$ ，(5)式变形为：

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu}=\phi(y) \Rightarrow \mu(y)=e^{\int \phi(y)dy}$$

例4、求 $(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$ 的解。(P49 7)

解：由题意知 $M=e^x+3y^2$， $N=2xy$

所以 $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=6y-2y=4y$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4y}{2xy}=\frac{2}{x}$$

故原方程的积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=x^2$$

从而 $x^2(e^x+3y^2)dx+2x^3ydy=0 \quad (*)$ 为恰当方程。

上式化简为 $x^2e^xdx+(3x^2y^2+2x^3y)dy=0$

即 $d\left[(x^2-2x+2)e^x\right]+d\left[x^3y^2\right]=0$

所以方程（*）的通解为：

$$(x^2-2x+2)e^x+x^3y^2=C \quad (\forall C)$$

这也是原方程的解。因为积分因子不恒为零，

所以原方程的解与（*）的解是等价的。

例5、求解方程 $ydx+(y-x)dy=0$

解：这里 $M=y \quad N=y-x$

所以 $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=1-(-1)=2\neq 0$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{-2}{y}$$

故原方程的积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int -\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}$$

所以 $\frac{1}{y^2}\left(ydx+(y-x)dy\right)=0$ 为恰当方程。

方程化简为$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{y}dy-\frac{x}{y^2}dy=0$

即 $$\frac{1}{y}dx+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0$$

$$d\left(\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0$$

所以原方程的通解为

$$\ln|y|+\frac{x}{y}=C \quad (\forall C)$$

练习6 讲14题

$$[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy=0$$

$$\sin(x+y)dx+x\cos(x+y)d(x+y)=0$$

$$d[x\sin(x+y)]=0$$

$$\Rightarrow x\sin(x+y)=C$$

谢谢！