云南大学学报(自然科学版),2018,40(1):66~73　　DOI:10.7540/j.ynu.20160721
Journal of Yunnan University

基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Lie 对称性与 Mei 对称性*

周小三[1,2], 张　毅[3]
(1.苏州科技大学 数理学院,江苏 苏州　215009;2.句容中等专业学校,江苏 镇江　212499;
3.苏州科技大学 土木工程学院,江苏 苏州　215011)

摘要:提出并研究在非标准 Lagrange 函数下动力学系统的 Lie 对称性与 Mei 对称性.基于系统的 Lagrange 方程,引入无限小变换及其生成元向量,给出了 Lie 对称性和 Mei 对称性的定义,建立了两类非标准 Lagrange 函数(指数 Lagrange 函数和幂律 Lagrange 函数)下动力学系统的 Lie 对称性结构方程和 Mei 对称性结构方程,导出了 Lie 对称性导致的 Noether 守恒量和 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量,并结合算例说明结果的应用.

关键词:非标准 Lagrange 函数;Lie 对称性;Mei 对称性;守恒量
中图分类号:O 316　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0258-7971(2018)01-0066-08

自 1918 年,Noether[1]首次研究了 Hamilton 作用量在群的无限小变换下的不变性,从而揭示了对称性与守恒量之间的内在联系以来,对称性与守恒量问题成为数学、力学和物理学研究的一个重要方面.Lutzky[2]首先将微分方程在群的无限小变换下的不变性方法应用于动力学系统,开启了动力学系统的 Lie 对称性与守恒量的研究.梅凤翔[3]提出了一种新的对称性——形式不变性.形式不变性又称 Mei 对称性,是指动力学方程中的动力学函数(如 Lagrange 函数、Hamilton 函数、Birkhoff 函数、动能和势能等)在经历群的无限小变换后仍然满足原方程的一种不变性.约束力学系统的 Lie 对称性和 Mei 对称性研究已经取得一系列重要成果[4-18].

最近,基于非标准 Lagrange 函数的动力学研究引起了学界的广泛关注.众所周知,标准的 Lagrange 函数是动能与势能之差,而非标准 Lagrange 函数则没有此区分.很多非线性问题或耗散系统可以通过非标准 Lagrange 函数进行动力学建模,Musielak,El-Nabulsi 等[19-29]研究了非标准 Lagrange 函数下动力学及其在非线性动力学、理论物理和量子力学等领域的应用.但是,关于非标准 Lagrange 函数下动力学系统的对称性与守恒量研究的文献尚不多见.本文将研究指数 Lagrange 函数和幂律 Lagrange 函数下动力学系统的 Lie 对称性与 Mei 对称性问题,建立系统的 Lie 对称性定理和 Mei 对称性定理.

1　指数 Lagrange 函数下动力学系统的 Lie 对称性定理

1.1　Lagrange 方程　假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,则指数 Lagrange 函数下动力学系统的 Lagrange 方程为[28]

$$\exp(L)\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)=0,(s=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

假设系统非奇异,即

* **收稿日期**:2016-11-29
基金项目:国家自然科学基金(11272227,11572212).
作者简介:周小三(1990-),女,安徽人,硕士生,研究方向:力学中的数学方法.
通信作者:张　毅(1964-),男,江苏人,博士,教授,博士生导师,研究方向:力学中的数学方法.E-mail:zhy@mail.usts.edu.cn.

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0, \tag{2}$$

则由式(1) 可求得广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),(s = 1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

1.2　Lie 对称性　引入无限小变换

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s, \tag{4}$$

展开后,有

$$t^* = t + \varepsilon\zeta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),(s = 1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

其中 ε 是无限小参数,ζ 和 ξ_s 称为无限小生成函数或生成元.引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \zeta\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{6}$$

式(6) 的一次扩展和二次扩展分别为

$$X^{(1)} = \zeta\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\zeta})\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{7}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\zeta} - 2\ddot{q}_s\dot{\zeta}]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{8}$$

方程(3) 在无限小变换(4) 下的不变性归结为满足如下 Lie 对称性确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\zeta} - 2\alpha\dot{\zeta} = X^{(1)}(\alpha_s),(s = 1,2,\cdots,n). \tag{9}$$

定义 1　如果变换(4) 的无限小生成函数 ζ 和 ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(9),则相应不变性称为指数 Lagrange 函数下动力学系统(1) 的 Lie 对称性.

1.3　结构方程与守恒量

定理 1　对于指数 Lagrange 函数下动力学系统(1),如果无限小生成函数 ζ,ξ_s 相应于系统的 Lie 对称性,且存在规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得如下 Lie 对称性结构方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\zeta + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\zeta}) + \dot{\zeta} + \exp(-L)\dot{G} = 0 \tag{10}$$

成立,则系统的 Lie 对称性导致 Noether 守恒量,形如

$$I_{\mathrm{N}} = \exp(L)\left(\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta)\right) + G = \mathrm{const}. \tag{11}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}t} = &\exp L\Bigg\{\left[\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta)\right]\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + \dot{\zeta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta) + \\ &\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\zeta - \dot{q}_s\dot{\zeta}) - \frac{\partial L}{\partial t}\zeta - \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\zeta}) - \dot{\zeta}\Bigg\} = \\ &\exp L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right](\xi_s - \dot{q}_s\zeta) = 0.\end{aligned}$$

定理 1 称为指数 Lagrange 函数下动力学系统(1) 的 Lie 对称性定理.

1.4　算例

例 1　设指数 Lagrange 函数下 Hamilton 作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\exp[\mathrm{e}^{-t}(\dot{q} - q)]\mathrm{d}t, \tag{12}$$

试研究该系统的 Lie 对称性和 Noether 守恒量.

由式(1),系统的 Lagrange 方程为

$$\ddot{q}-2\dot{q}+q=0, \tag{13}$$

由方程(9),Lie 对称性确定方程为

$$\ddot{\xi}-\dot{q}\ddot{\zeta}-2\dot{\zeta}(2\dot{q}-q)=2(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\zeta})-\xi, \tag{14}$$

取

$$\zeta=0,\xi=e^{t}, \tag{15}$$

由方程(10),得到

$$\dot{G}=-\exp(e^{-t}(\dot{q}-q))\{[-e^{-t}(\dot{q}-q)]\zeta-e^{-t}\xi+e^{-t}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\zeta})+\dot{\zeta}\}, \tag{16}$$

将式(15)代入式(16),得

$$\dot{G}=0, \tag{17}$$

于是有

$$G=0. \tag{18}$$

因此生成函数(15)相应于系统的 Lie 对称性.由式(11),我们得到

$$I_{N}=\exp[e^{-t}(\dot{q}-q)]=\text{const.} \tag{19}$$

式(19)为系统的 Lie 对称性导致的 Noether 守恒量.

2 指数 Lagrange 函数下动力学系统的 Mei 对称性定理

2.1 Mei 对称性 指数 Lagrange 函数在无限小变换(4)下成为

$$\exp L^{*}=\exp L\left(t^{*},q_{s}^{*},\frac{\mathrm{d}q_{s}^{*}}{\mathrm{d}t^{*}}\right)=\exp L(t,q_{s},\dot{q}_{s})+\varepsilon X^{(1)}(\exp L)+O(\varepsilon^{2}). \tag{20}$$

定义 2 如果在无限小变换(4)下成立

$$E_{s}(\exp L^{*})=0, \tag{21}$$

其中 $E_{s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{s}}-\frac{\partial L}{\partial q_{s}}$,则相应不变性称为指数 Lagrange 函数下动力学系统(1)的 Mei 对称性.

由公式(20)和(21),我们有

如果无限小生成函数 ζ 和 ξ_{s} 满足如下 Mei 对称性确定方程

$$E_{s}\{X^{(1)}(\exp L)\}=0, \tag{22}$$

则无限小变换相应于指数 Lagrange 函数下动力学系统(1)的 Mei 对称性.

2.2 结构方程与 Mei 守恒量 对于指数 Lagrange 函数下动力学系统(1),Mei 对称性在一定条件下可直接导致 Mei 守恒量,有如下定理

定理 2 对于指数 Lagrange 函数下动力学系统(1),如果无限小生成函数 ζ,ξ_{s} 相应于系统的 Mei 对称性,且存在规范函数 $G_{M}=G_{M}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得如下 Mei 对称性结构方程

$$X^{(1)}(\exp L)\dot{\zeta}+X^{(1)}\{X^{(1)}(\exp L)\}+\dot{G}_{M}=0 \tag{23}$$

成立,则系统的 Mei 对称性导致 Mei 守恒量,形如

$$I_{M}=X^{(1)}(\exp L)\zeta+\frac{\partial X^{(1)}(\exp L)}{\partial\dot{q}_{s}}(\xi_{s}-\dot{q}_{s}\zeta)+G_{M}=\text{const.} \tag{24}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_{M}}{\mathrm{d}t}=&\frac{\mathrm{d}X^{(1)}(\exp L)}{\mathrm{d}t}\zeta+X^{(1)}(\exp L)\dot{\zeta}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(\exp L)}{\partial\dot{q}_{s}}(\xi_{s}-\dot{q}_{s}\zeta)+\\&\frac{\partial X^{(1)}(\exp L)}{\partial\dot{q}_{s}}(\dot{\xi}_{s}-\ddot{q}_{s}\zeta-\dot{q}_{s}\dot{\zeta})-X^{(1)}(\exp L)\dot{\zeta}-X^{(1)}\{X^{(1)}(\exp L)\}=\\&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_{s}}-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_{s}}+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_{s}}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)\exp L(\xi_{s}-\dot{q}_{s}\zeta)=0.\end{aligned}$$

定理 2 称为指数 Lagrange 函数下动力学系统(1) 的 Mei 对称性定理.

2.3 算例

例 2　设指数 Lagrange 函数下 Hamilton 作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\exp(t\dot{q}+q)\mathrm{d}t, \tag{25}$$

试研究该系统的 Mei 对称性与 Mei 守恒量.

方程(1) 给出

$$t\ddot{q}+2\dot{q}=0, \tag{26}$$

由式(7),计算可得

$$X^{(1)}(\exp(t\dot{q}+q))=[\zeta\dot{q}+\xi+t(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\zeta})]\exp(t\dot{q}+q), \tag{27}$$

如取生成函数

$$\zeta=t,\xi=-1, \tag{28}$$

则有

$$X^{(1)}(\exp(t\dot{q}+q))=-\exp(t\dot{q}+q). \tag{29}$$

由式(23) 和式(28),得到

$$\dot{G}_{\mathrm{M}}=0, \tag{30}$$

于是有

$$G_{\mathrm{M}}=0. \tag{31}$$

因此生成函数(28) 相应于系统的 Mei 对称性.由式(24),我们得到

$$I_{\mathrm{M}}=t^2\dot{q}\exp(t\dot{q}+q)=\mathrm{const}. \tag{32}$$

式(32) 为系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量.

3　幂律 Lagrange 函数下动力学系统的 Lie 对称性定理

3.1　Lagrange 方程　假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定,则幂律 Lagrange 函数下动力学系统的 Lagrange 方程为[28]

$$(1+\gamma)L^{\gamma}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\gamma}{L}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)=0,(s=1,2,\cdots,n), \tag{33}$$

假设系统非奇异,即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0, \tag{34}$$

则由式(33) 可求得广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\beta_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),(s=1,2,\cdots,n). \tag{35}$$

3.2　Lie 对称性　方程(35) 在无限小变换(4) 下的不变性归结为满足如下 Lie 对称性确定方程

$$\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\zeta}-2\beta_s\dot{\zeta}=X^{(1)}(\beta_s),(s=1,2,\cdots,n). \tag{36}$$

定义 3　如果变换(4) 的无限小生成函数 ζ 和 ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(36),则相应不变性称为幂律 Lagrange 函数下动力学系统(33) 的 Lie 对称性.

3.3　结构方程与守恒量

定理 3　对于幂律 Lagrange 函数下动力学系统(33),如果无限小生成函数 ζ,ξ_s 相应于系统的 Lie 对称性,且存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得如下 Lie 对称性结构方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\zeta+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\zeta})+\frac{L}{1+\gamma}\dot{\zeta}+\frac{\dot{G}}{(1+\gamma)L^{\gamma}}=0, \tag{37}$$

成立,则系统的 Lie 对称性导致 Noether 守恒量,形如

$$I_{\mathrm{N}} = L^{\gamma}\left(L\zeta + (1+\gamma)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta)\right) + G = \mathrm{const}. \tag{38}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}t} = (1+\gamma)L^{\gamma}\left\{\zeta\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta) + \frac{L}{1+\gamma}\dot{\zeta} + \right.$$
$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\zeta - \dot{q}_s\dot{\zeta}) - \frac{\partial L}{\partial t}\zeta - \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\zeta) - \frac{L}{1+\gamma}\dot{\zeta}\right\} =$$
$$(1+\gamma)L^{\gamma}\left\{\frac{\gamma}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right\}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta) = 0.$$

定理3称为幂律Lagrange函数下动力学系统(33)的Lie对称性定理.

3.4 算例

例3 设幂律Lagrange函数下Hamilton作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2}[t\dot{q} + q)]^{\gamma+1}\mathrm{d}t, \tag{39}$$

其中$\gamma = 1$,试研究该系统的Lie对称性和Noether守恒量.

由式(33),系统的Lagrange方程为

$$t\ddot{q} + 2\dot{q} = 0, \tag{40}$$

由方程(36),Lie对称性确定方程为

$$\ddot{\xi} - \dot{q}\ddot{\xi} + \frac{4\dot{q}}{t}\dot{\zeta} = \zeta\frac{2\dot{q}}{t^2} - \frac{2}{t}(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\zeta}), \tag{41}$$

取

$$\zeta = 0, \xi = -\frac{1}{t}, \tag{42}$$

由方程(37),得到

$$\dot{G} = -[t\dot{q} + q)]\{2\dot{q}\zeta + 2\xi + 2t(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\zeta}) + [t\dot{q} + q]\dot{\zeta}\}. \tag{43}$$

将式(42)代入式(43),得

$$\dot{G} = 0, \tag{44}$$

于是有

$$G = 0. \tag{45}$$

因此生成函数(42)相应于系统的Lie对称性.由式(38),我们得到

$$I_{\mathrm{N}} = -2[t\dot{q} + q)] = \mathrm{const}. \tag{46}$$

式(46)为系统的Lie对称性导致的Noether守恒量.

4 幂律Lagrange函数下动力学系统的Mei对称性定理

4.1 Mei对称性 幂律Lagrange函数在无限小变换(4)下成为

$$L^{*1+\gamma} = L^{1+\gamma}\left(t^*, q_s^*, \frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = L^{1+\gamma}(t, q_s, \dot{q}_s) + \varepsilon X^{(1)}(L^{1+\gamma}) + O(\varepsilon^2). \tag{47}$$

定义4 如果在无限小变换(4)下成立

$$E_s(L^{*1+\gamma}) = 0, \tag{48}$$

则相应不变性称为幂律Lagrange函数下动力学系统(33)的Mei对称性.

由式(47)和(48),我们有

如果无限小生成函数ζ和ξ_s满足如下Mei对称性确定方程

$$E_s\{X^{(1)}(L^{1+\gamma})\} = 0, \tag{49}$$

则无限小变换相应于幂律 Lagrange 函数下动力学系统(33) 的 Mei 对称性.

4.2　结构方程与 Mei 守恒量　对于幂律 Lagrange 函数下动力学系统(33),Mei 对称性在一定条件下可直接导致 Mei 守恒量,有如下定理

定理 4　对于幂律 Lagrange 函数下动力学系统(33),如果无限小生成函数 ζ, ξ_s 相应于系统的 Mei 对称性,且存在规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得如下 Mei 对称性结构方程

$$X^{(1)}(L^{1+\gamma})\dot{\zeta} + X^{(1)}\{X^{(1)}(L^{1+\gamma})\} + \dot{G}_{\mathrm{M}} = 0 \tag{50}$$

成立,则系统的 Mei 对称性导致 Mei 守恒量,形如

$$I_{\mathrm{M}} = X^{(1)}(L^{1+\gamma})\zeta + \frac{\partial X^{(1)}(L^{1+\gamma})}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta) + G_{\mathrm{M}} = \mathrm{const.} \tag{51}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = & \frac{\mathrm{d}X^{(1)}(L^{1+\gamma})}{\mathrm{d}t}\zeta + X^{(1)}(L^{1+\gamma})\dot{\zeta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L^{1+\gamma})}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta) + \\ & \frac{\partial X^{(1)}(L^{1+\gamma})}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\zeta - \dot{q}_s\dot{\zeta}) - X^{(1)}(L^{1+\gamma})\dot{\zeta} - X^{(1)}\{X^{(1)}(L^{1+\gamma})\} = \\ & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \frac{\gamma}{L}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)(1+\gamma)L^{\gamma}(\xi_s - \dot{q}_s\zeta) = 0.\end{aligned}$$

定理 4 称为幂律 Lagrange 函数下动力学系统(33) 的 Mei 对称性定理.

4.3　算例

例 4　设幂律 Lagrange 函数下 Hamilton 作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2}[\dot{q} + \mathrm{e}^{-q} + t]^{1+\gamma}\mathrm{d}t, \tag{52}$$

其中 $\gamma = 1$,试研究该系统的 Mei 对称性与 Mei 守恒量.

方程(33) 给出

$$\ddot{q} + \mathrm{e}^{-2q} + t\mathrm{e}^{-q} + 1 = 0. \tag{53}$$

由式(7),计算可得

$$X^{(1)}((\dot{q} + \mathrm{e}^{-q} + t)^2) = 2(\dot{q} + \mathrm{e}^{-q} + t)[\zeta - \mathrm{e}^{-q}\xi + \dot{\xi} - \dot{q}\dot{\zeta}]. \tag{54}$$

如取生成函数

$$\zeta = 1, \xi = 0, \tag{55}$$

则有

$$X^{(1)}((\dot{q} + \mathrm{e}^{-q} + t)^2) = 2(\dot{q} + \mathrm{e}^{-q} + t). \tag{56}$$

由式(50) 和式(55),得到

$$\dot{G}_{\mathrm{M}} = -2, \tag{57}$$

于是有

$$G_{\mathrm{M}} = -2t. \tag{58}$$

因此生成函数(55) 相应于系统的 Mei 对称性. 由式(51),我们得到

$$I_{\mathrm{M}} = 2\mathrm{e}^{-q} = \mathrm{const.} \tag{59}$$

式(59)为系统(53)的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量.

5　结　论

非标准 Lagrange 函数由于其形式更一般且可用于非线性问题或耗散系统的动力学建模,因而可望将分析力学理论和方法应用于解决非线性问题,同时标准的 Lagrange 函数是其特例,因此非标准 Lagrange 函数下动力学研究具有重要的理论意义与应用价值. 文章提出并研究了基于两类非标准 Lagrange 函数的动

力学系统的 Lie 对称性与 Noether 守恒量,Mei 对称性与 Mei 守恒量.主要结果为文中的4个定理.非标准 Lagrange 函数动力学理论可进一步拓展到基于非标准 Hamilton 函数或基于非标准 Birkhoff 函数的动力学系统.

参考文献:

[1] NOETHER A E.Invariante variations probleme[J].Nachr Akad Wiss Göttingen.Math Phys,1918,KI,II:235-257.

[2] LUTZKY M.Dynamical symmetries and conserved quantities[J].Journal of Physics A:Mathematical and General,1979,12(7):973-981.

[3] MEI F X.Form invariance of Lagrange system[J].Journal of Beijing Institute of Technology,2000,9(2):120-124.

[4] 赵跃宇.非保守力学系统的 Lie 对称性与守恒量[J].力学学报,1994,30(4):380-384.
ZHAO Y Y.Conservative quantities and Lie's symmetries of nonconservative dynamical systems[J].Acta Mechanica Sinica,1994,30(4):380-384.

[5] 贾利群,郑世旺,张耀宇.事件空间中非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性与 Mei 守恒量[J].物理学报,2007,56(10):5 575-5 579.
JIA L Q,ZHENG S W,ZHANG Y Y.Mei symmetry and Mei conserved quantity of nonholonomic systems of non-Chetaev's type in event space[J].Acta Physica Sinica,2007,56 (10):5 575-5 579.

[6] 贾利群,罗绍凯,张耀宇.非完整系统 Nielsen 方程 Mei 对称性与 Mei 守恒量[J].物理学报,2008,57(4):2 006-2 010.
JIA L Q,LUO S K,ZHANG Y Y.Mei symmetry and Mei conserved quantity of Nielsen equation for a nonholonomic system[J].Acta Physica Sinica,2008,57(4):2 006-2 010.

[7] 梅凤翔.李群和李代数对约束力学系统的应用[M].北京:科学出版社,1999.
MEI F X.Applications of Lie Groups and Lie algebras to constrained mechanical systems[M].Beijing:Science Press,1999.

[8] 罗绍凯.Hamilton 系统的 Mei 对称性、Noether 对称性和 Lie 对称性[J].物理学报,2003,52(12):2 941-2 944.
LUO S K.Mei symmetry,Noether symmetry and Lie symmetry of Hamiltonian system[J].Acta Physica Sinica,2003,52(12):2 941-2 944.

[9] ZHANG Y,XUE Y.Conserved quantities from Lie symmetries for nonholonomic systems[J].Journal of Southeast University,2003,19(3):289-292.

[10] ZHANG Y.Generalized Lutzky conserved quantities of holonomic systems with remainder coordinates subjected to unilateral constraints[J].Communication in Theoretical Physics,2006,45(4):732-736.

[11] 张毅.广义经典力学系统的对称性与 Mei 守恒量[J].物理学报,2005,54(7):2 980-2 984.
ZHANG Y.Symmetries and Mei conserved quantities for systems of generalized classical mechanics[J].Acta Physica Sinica,2005,54(7):2 980-2 984.

[12] 张毅,葛伟宽.相对论性力学系统的 Mei 对称性导致的新守恒律[J].物理学报,2005,54(4):1 464-1 467.
ZHANG Y,GE W K.A new conservation law from Mei symmetry for the relativistic mechanical system[J].Acta Physica Sinica,2005,54(4):1 464-1 467.

[13] 方建会,彭勇,廖永潘.关于 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的 Mei 对称性[J].物理学报,2005,54(2):496-499.
FANG J H,PENG Y,LIAO Y P.On Mei symmetry of Lagrangian system and Hamiltonian system[J].Acta Physica Sinica,2005,54(2):496-499.

[14] 方建会,廖永潘,彭勇.相空间中力学系统的两类 Mei 对称性及守恒量[J].物理学报,2005,54(2):500-503.
FANG J H,LIAO Y P,PENG Y.Tow kinds of Mei symmeties and conserved quantities of a mechanical system in phase space[J].Acta Physica Sinica,2005,54(2):500-503.

[15] 张晔,张毅,陈向炜.事件空间中 Birkhoff 系统的 Mei 对称性与守恒量[J].云南大学学报:自然科学版,2016,38(3):406-411.
ZHANG Y,ZHANG Y,CHEN X W.Mei symmetry and conserved quantity of a Birkhoffian system in event space[J].Journal of Yunnan University:Natural Sciences Edition,2016,38(3):406-411.

[16] 梅凤翔,尚玫.一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量[J].物理学报,2000,49(10):1 901-1 903.
MEI F X,SHANG M.Lie symmetries and conserved quantities of first order Lagrange systems[J].Acta Physica Sinica,2000,49(10):1 901-1 903.

[17] HOJMAN S A.A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians[J].Journal of Physics A:Mathematical and General,1992,25(7):L291-L295.

[18] 梅凤翔.约束力学系统的对称性与守恒量[M].北京:北京理工大学出版社,2004.
MEI F X.Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems[M].Beijing:Beijing Institute of Technology Press,2004.

[19] MUSIELAK Z E.Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients[J].Journal of Physics A:Mathematical and Theoretical,2008,41(5):055205.

[20] MUSIELAK Z E.General conditions for the existence of non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems[J].Chaos,Solitons & Fractals,2009,42(5):2 645-2 652.

[21] EL-NABULSI A R.Non-linear dynamics with non-standard Lagrangians[J].Qualitative Theory of Dynamical Systems,2013,12(2):273-291.

[22] EL-NABULSI A R.Non-standard fractional Lagrangians[J].Nonlinear Dynamics,2013,74(1/2):381-394.

[23] EL-NABULSI A R.Fractional oscillators from non-standard Lagrangians and time-dependent fractional exponent[J].Computational and Applied Mathematics,2014,33(1):163-179.

[24] DIMITRIJEVIC D D,MILOSEVIC M.About nonstandard Lagrangians in cosmology[C]//Poceedings of the Physics Conference TIM-11.AIP Publishing,2012,1472(1):41-46.

[25] CARIÑENA J F,RANADA M F,SANTANDER M.Lagrangian formalism for nonlinear second-order Riccati systems:one-dimensional integrability and two-dimensional superintegrability[J].Journal of Mathematical Physics,2005,46(6):062703.

[26] CHANDRASEKAR V K,PANDEY S N,SENTHILVELAN M,et al.A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems[J].Journal of Mathematical Physics,2006,47(2):023508.

[27] ALEKSEEV A I,ARBUZOV B A.Classical Yang-Mills field theory with nonstandard Lagrangians[J].Theoretical and Mathematical Physics,1984,59(1):372-378.

[28] ZHANG Y,ZHOU X S.Noether theorem and its inverse for nonlinear dynamical systems with nonstandard Lagrangians[J].Nonlinear Dynamics,2016,84(4):1 867-1 876.

[29] 周小三,张毅.基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Routh 降阶法[J].力学季刊,2016,37(1):15-21.
ZHOU X S,ZHANG Y.Routh method of reduction for dynamic systems with non-standard Lagrangians[J].Chinese Quarterly of Mechanics,2016,37(1):15-21.

On Lie symmetry and Mei symmetry for dynamical systems with non-standard Lagrangians

ZHOU Xiao-San[1,2], ZHANG Yi[3]

(1.College of Mathematics and Physics,Suzhou University of Science and Technology,Suzhou 215009,China;
2.Jurong of Secondary Schools,Zhengjiang 212499,China;
3.College of Civil Engineering,Suzhou University of Science and Technology,Suzhou 215011,China)

Abstract:The Lie symmetry and the Mei symmetry for dynamical systems with non-standard Lagrangians have been presented and studied.By introducing the infinitesimal transformations and their generating vectors,and in light of the Lagrange equations of the systems,the definitions of Lie symmetry and Mei symmetry have been given,and the structure equations of Lie symmetry and Mei symmetry for two types of dynamical systems with non-standard Lagrangians (i.e.with exponential Lagrangians and power-law Lagrangians) have been established.The Noether conserved quantity resulted from Lie symmetry and the Mei conserved quantity resulted from Mei symmetry have been derived.In addition four examples have been given to illustrate the application of the results.

Key words:non-standard Lagrangians;Lie symmetry;Mei symmetry;conserved quantity