

# 分数阶广义 Bagley-Torvik 方程的各种 精确解及其动力学性质\*

黄 潇, 芮伟国

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:** 分数阶广义 Bagley-Torvik 方程作为松弛-振动模型中的一个广义模型, 具有较好的物理背景, 它在研究复杂介质中的振动问题以及牛顿粘弹性流体中刚性板块浸入的振动问题方面有很好的应用. 利用 Laplace 变换, 研究了分数阶广义 Bagley-Torvik 方程的精确解, 在不同的参数条件下获得了该模型的各种解析解, 并讨论了这些解的动力学行为. 为了能够直观地展示这些精确解的动力学性质, 利用 Maple 软件绘出了几个具有代表性的精确解随时间演化的坐标图形.

**关键词:** Laplace 变换; 松弛-振动模型; 分数阶 Bagley-Torvik 方程; 精确解

**中图分类号:** O 175.08    **文献标志码:** A    **文章编号:** 0258-7971(2018)01-0012-10

分数阶微分方程模型具有深刻的物理背景和丰富的理论内涵, 已经在众多学科领域中得到了很好的应用, 如: 黏弹性流体力学<sup>[1-4]</sup>、信号处理<sup>[5-7]</sup>、系统控制<sup>[8-9]</sup>、物质反常扩散和热传导<sup>[10-13]</sup>、生物学<sup>[14-16]</sup>、磁力学<sup>[17-19]</sup> 以及其它众多学科. 随着科学研究的深入, 人们在探讨分数阶算子的物理和力学背景时发现, 过去许多由整数阶微分算子来定义的经典力学理论备受挑战, 如: 湍流速度场的不规则起伏, 大气湍流速度场中风在振动和方向上是随机剧烈变化的, 从而导致湍流速度场中的速度不满足经典力学中的整数阶可微; 复杂的黏弹性材料具有记忆性, 弹性固体的胡克定律和黏弹性流体的牛顿定律都无法准确地描述这种记忆现象. 然而, 建立在分数阶微积分基础上的非经典力学却能够很好地用来描述和刻画以上这些“反常”的物理学现象, 这也是分数阶微分方程越来越受到人们重视的主要原因之一. 在这个大背景下, 人们在科学研究中建立了许许多多的分数阶微分方程模型. 由于求分数阶微分方程的精确解往往比较困难, 所以正如文献[20-21]中所提及的那样, 目前大多数工作主要集中在解和正解的存在性研究, 与这类研究不同的是本文的工作将立足于分数阶微分方程在精确解方面的探索与研究.

本文将利用 Laplace 变换研究下列分数阶广义 Bagley-Torvik 方程的精确解及动力学性质

$$A {}_0^c D_t^\alpha y(t) + B {}_0^c D_t^\beta y(t) + Cy(t) = f(t), \quad (1)$$

其中  ${}_0^c D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$  为 Caputo 型微分算子, 阶数  $0 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 2$ , 系数  $A, B, C$  为常数且  $C \neq 0, f(t)$  通常表示外力是  $[0, +\infty)$  上的连续函数,  $B$  为阻尼项系数可以为 0 (为 0 时的方程称为无阻尼模型), 特别当  $f(t) = 0$  时表示模型不受外力作用.

当  $A = m, B = 2s\sqrt{\mu\rho}, C = \kappa, \alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$  时, 方程(1) 是数学家 Torvik 和 Bagley 于 1984 年研究牛

\* 收稿日期: 2017-06-06

基金项目: 国家自然科学基金(11361023, 61623020).

作者简介: 黄 潇 (1993-), 女, 重庆人, 硕士生, 主要从事偏微分方程方面的研究. E-mail: huangxiaol108@163.com.

通信作者: 芮伟国 (1969-), 男, 云南人, 博士, 教授, 主要从事微分动力系统、偏微分方程、孤立子与可积系统方面的研究. E-mail:

顿黏弹性流体中的刚性板块浸入的振动问题时所提出的松弛 - 振动模型<sup>[22]</sup>. 特别地, 当参数条件改变时, 模型所刻画的现象也有所不同, 在其它一些特殊参数条件下, 方程(1) 还可以变成其它模型, 例如: 当  $A = m, B = 0, C = \kappa, 1 < \alpha \leq 2$  时, 方程(1) 可视为理想状态下(无阻尼) 分数阶弹簧振子模型, 可用于研究由黏弹性材料做成的弹簧在既无阻尼又无外力干扰作用下的运动规律; 当  $A = m, B = \mu, C = \frac{g}{l}, \alpha = 2, 0 < \beta \leq 1$  时, 方程(1) 变成带阻尼的分数阶单摆线性模型, 可以研究单摆在复杂介质中的振动规律. 由此可见, 该方程作为松弛 - 振动模型中的一个广义模型, 它不但在研究复杂介质中的振动问题时有很好的应用, 而且在研究牛顿黏弹性流体中的刚性板块浸入振动问题方面也有很好的应用, 甚至在其它一些工程和科学技术中也得到了很好的应用, 如磁流变减震系统和橡胶弹簧系统<sup>[23]</sup> 等. 由于方程是分数阶模型, 相比于整数阶模型而言要获得方程(1) 的解却十分的困难, 于是, 围绕着这个方程的求解问题, 最近一些学者做了一些非常有意义的工作. 在文献[23] 中, Chen 和 Li 等建立的磁流变减震系统就是方程(1) 在  $\alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$  下的一种特殊形式, 他们研究了这个系统的力学性质, 解释了为什么分数阶减震系统在吸收能量方面优于整数阶减震系统的原因, 文中还进行了方程的数值解与由 Adomian 分解法获得的近似解之间的误差比较; 在文献[24] 中, Youssri 利用 Caputo 微分算子矩阵在  $\alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$  的情况下研究了方程(1) 的近似解; 在文献[25] 中, Raja, Khan 和 Qureshi 利用一个随机技巧研究了方程(1), 也获得了一些解析的近似解; 在文献[26] 中, Z. Wang 和 X. Wang 研究了当导数的阶数为可变函数时, 由方程(1) 引伸出来的系列方程的一般解的形式表达式; 在文献[27] 中, 当参数条件满足  $A = m, B = 2s\sqrt{\mu\rho}, C = \kappa, \alpha = 2, \beta = \frac{3}{2}$  时, 李慧芳研究了方程(1) 数值解, 对数值解的收敛性进行了详细的分析, 给出了误差估计并进行了数值模拟. 尽管以上提及的这些文献给出了方程(1) 的一些近似解析解和数值解, 但是针对它的精确解的研究却非常少, 据我们所知目前还未发现相关报道. 众所周知, 精确解能够更加精准的描述和分析模型所刻画的动力学行为和现象, 能全面反映模型所刻画的动力学行为随参数和初始条件变化的发展趋势, 为此在这篇文章中, 我们利用 Laplace 变换, 重点讨论该方程在一些特殊参数条件下的精确解及其动力学性质. 下面我们将在参数  $A, B, C, \alpha, \beta$  的不同取值条件下来讨论分数阶 Bagley - Torvik 方程的各种精确解及其动力学性质.

## 1 无阻尼松弛 - 振动模型的精确解及其动力学性质

本节我们讨论无阻尼情况下分数阶单摆和弹簧振子模型的精确解及其动力学性质.

**情形 1** 当  $A = m, B = 0, C = \frac{mg}{l}, 1 < \alpha < 2, f(t) = 0$  时, 方程(1) 可以变为

$${}_0^{\circ}D_t^{\alpha}y(t) + \frac{g}{l}y(t) = 0, \quad (2)$$

其中  $g$  为重力加速度,  $l$  为单摆悬线长度,  $y$  表示摆角, 此模型能够描述用黏弹性材料做成的悬线在外力为 0 的理想状态下的单摆的振动情况, 是一个线性模型. 显然, 当  $\alpha = 2$  时, 方程(2) 就变成经典的整数阶单摆线性模型. 为了获得该方程的精确解, 我们不妨设初值条件  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$  为任意常数, 这样可以获得它的通解. 在(2) 式两边同时施行 Laplace 变换得:

$$\mathcal{Q}[D_t^{\alpha}y(t)] + \mathcal{Q}\left[\frac{g}{l}y(t)\right] = 0, \quad (3)$$

即

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) - s^{\alpha-2}y'(0) + \frac{g}{l}Y(s) = 0. \quad (4)$$

由(4) 式和初值条件  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$  解得:

$$Y(s) = \frac{C_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{g}{l}}, \quad (5)$$

对(5)式两端同时施行 Laplace 逆变换得:

$$\mathcal{Q}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{Q}^{-1}\left[\frac{C_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{g}{l}}\right] + \mathcal{Q}^{-1}\left[\frac{C_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{g}{l}}\right]. \quad (6)$$

完成(6)式的逆运算可得分数阶无阻尼单摆模型(2)的精确解:

$$y(t) = C_1 E_{\alpha,1}\left(-\frac{g}{l}t^\alpha\right) + C_2 t E_{\alpha,2}\left(-\frac{g}{l}t^\alpha\right). \quad (7)$$

由于  $C_1, C_2$  为任意常数,(7)式也可以看作通解.上式中形如  $E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$  的函数为双参数

Mittag - Leffler 函数,是一个特殊的解析函数,以下情形相同,概不赘述.

**情形 2** 当  $A = m, B = 0, C = \kappa, 1 < \alpha < 2, f(t) = 0$  时,方程(1)可以变为

$$D_t^\alpha y(t) + \frac{\kappa}{m}y(t) = 0, \quad (8)$$

其中  $m$  为弹簧上所悬挂的刚性物体的质量,  $\kappa$  为弹簧的弹性系数.方程(8)可描述由黏弹性材料做成的弹簧振子模型(如橡胶弹簧)的运动规律,设初值条件  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$  为任意常数.类似地,可得到分数阶无阻尼弹簧振子模型(8)的精确解:

$$y(t) = C_1 E_{\alpha,1}\left(-\frac{\kappa}{m}t^\alpha\right) + C_2 t E_{\alpha,2}\left(-\frac{\kappa}{m}t^\alpha\right). \quad (9)$$

**情形 3** 当  $A = m, B = 0, C = \frac{mg}{l}, 1 < \alpha < 2, f(t) = mt^n$  时,方程(1)变为

$${}_0^c D_t^\alpha y(t) + \frac{g}{l}y(t) = t^n, \quad (10)$$

其中  $n$  为正整数.方程(10)为具有外力的分数阶无阻尼单摆振动模型.同样设初值条件  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$  为任意常数.在(10)式两边同时施行 Laplace 变换得:

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) - s^{\alpha-2}y'(0) + \frac{g}{l}Y(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (11)$$

从上式解得:

$$Y(s) = \frac{n! s^{-(n+1)}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{g}{l}}, \quad (12)$$

对(12)式两端同时施行 Laplace 逆变换得:

$$\mathcal{Q}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{Q}^{-1}\left[\frac{n! s^{-(n+1)}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{g}{l}}\right]. \quad (13)$$

完成(13)式的逆运算获得非齐次方程(10)的通解:

$$y(t) = n! t^{\alpha+n} E_{\alpha,\alpha+n+1}\left(-\frac{g}{l}t^\alpha\right) + C_1 E_{\alpha,1}\left(-\frac{g}{l}t^\alpha\right) + C_2 t E_{\alpha,2}\left(-\frac{g}{l}t^\alpha\right). \quad (14)$$

**情形 4** 当  $A = m, B = 0, C = \kappa, 1 < \alpha < 2, f(t) = mt^n$  时,方程(1)变为

$${}_0^c D_t^\alpha y(t) + \frac{\kappa}{m}y(t) = t^n, \quad (15)$$

其中  $n$  为正整数.方程(15)为具有外力的分数阶无阻尼黏弹性弹簧振子模型.在任意的初值条件  $y(0) =$

$C_1, y'(0) = C_2$  下, 分数阶无阻尼粘弹性弹簧振子模型 (15) 的精确解为:

$$y(t) = n! t^{\alpha+n} E_{\alpha, \alpha+n+1} \left( -\frac{\kappa}{m} t^\alpha \right) + C_1 E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\kappa}{m} t^\alpha \right) + C_2 t E_{\alpha, 2} \left( -\frac{\kappa}{m} t^\alpha \right). \quad (16)$$

**情形 5** 当  $A = m, B = 0, C = \frac{mg}{l}, 1 < \alpha < 2, f(t) = \tilde{\sigma}$  时, 方程 (1) 变为

$${}_0^c D_t^\alpha y(t) + \frac{g}{l} y(t) = \sigma, \quad (17)$$

其中  $\tilde{\sigma}, \sigma$  为常数. 方程 (17) 为具有恒定外力的分数阶无阻尼单摆振动模型. 设初值条件  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$  为任意常数. 在 (17) 式两边同时施行 Laplace 变换得:

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0) + \frac{g}{l} Y(s) = \frac{\sigma}{s}. \quad (18)$$

从上式解得:

$$Y(s) = \frac{\sigma s^{-1}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{g}{l}}, \quad (19)$$

对 (19) 式两端同时施行 Laplace 逆变换得:

$$\mathcal{Q}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{Q}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha-(1+\alpha)}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} + \frac{C_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{g}{l}} \right]. \quad (20)$$

完成 (20) 式的逆运算获得非齐次方程 (17) 的通解:

$$y(t) = \sigma t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{g}{l} t^\alpha \right) + C_1 E_{\alpha, 1} \left( -\frac{g}{l} t^\alpha \right) + C_2 t E_{\alpha, 2} \left( -\frac{g}{l} t^\alpha \right). \quad (21)$$

**情形 6** 当  $A = m, B = 0, C = \kappa, 1 < \alpha < 2, f(t) = \tilde{\sigma}$  时, 方程 (1) 变为

$${}_0^c D_t^\alpha y(t) + \frac{\kappa}{m} y(t) = \sigma, \quad (22)$$

其中  $\tilde{\sigma}, \sigma$  为常数. 方程 (22) 为具有外力的分数阶无阻尼黏弹性弹簧振动模型. 在任意的初值条件  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$  下, 分数阶无阻尼黏弹性弹簧振动模型 (22) 的精确解为:

$$y(t) = \sigma t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{\kappa}{m} t^\alpha \right) + C_1 E_{\alpha, 1} \left( -\frac{\kappa}{m} t^\alpha \right) + C_2 t E_{\alpha, 2} \left( -\frac{\kappa}{m} t^\alpha \right). \quad (23)$$

**情形 7** 当  $A \neq 0, C \neq 0, B = 0, 1 < \alpha < 2, f(t)$  为其它函数时, 方程 (1) 可以变为

$$A_0 {}_0^c D_t^\alpha y(t) + C y(t) = f(t), \quad (24)$$

设初值条件  $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$  为任意常数. 对 (24) 式施行 Laplace 变换得:

$$A[s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0)] + C Y(s) = F(s), \quad (25)$$

从而

$$Y(s) = \frac{1}{A} \frac{F(s)}{s^\alpha + C} + \frac{C_1 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + C} + \frac{C_2 s^{\alpha-2}}{s^\alpha + C}. \quad (26)$$

对 (26) 式两端同时施行 Laplace 逆变换可得方程 (24) 的解的一般表达式:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s) - i\infty}^{\text{Re}(s) + i\infty} \frac{F(s)}{A(s^\alpha + C)} e^{st} ds + C_1 E_{\alpha, 1} \left( -\frac{C}{A} t^\alpha \right) + C_2 t E_{\alpha, 2} \left( -\frac{C}{A} t^\alpha \right). \quad (27)$$

当外力函数  $f(t)$  复杂时, 它的 Laplace 变换式  $F(s)$  比较复杂, 从而导致上式中反演变换部分的积分尤其复杂, 因此要想通过 (27) 式来获得方程 (24) 的精确解是十分困难的.

为了能够直观地反映无阻尼分数阶弹簧振子和单摆模型的运动规律和动力学性质, 我们以解 (9) 和解 (21) 为例, 分别绘出它们的坐标图形, 通过图像能够显示振幅随时间变化的动力学演化行为. 取固定参

数值  $\alpha = 1.8, C_1 = 2, C_2 = 0, m = 1, \kappa = 0.5, t \in [0.01, 25.2]$ , 绘出解(9) 的坐标图, 见图 1.

从图 1 可以看出, 即便是在理想状态下, 由于弹簧的材料是由黏弹性材料做成的, 如橡胶弹簧等, 它有记忆性, 因此弹簧在振动过程中振幅会随着时间的增加而减小, 最终回到平衡位置. 从图 1 还可以看出, 初始时, 弹簧被拉离平衡位置, 此时运动速度为 0 ( $C_2 = 0$ ).

类似地, 取固定参数值  $\sigma = 0.5, \alpha = 1.8, C_1 = 3, C_2 = -8, l = 10, g = 9.8, t \in [0.1, 20]$ , 绘出解(21) 的坐标图, 见图 2.

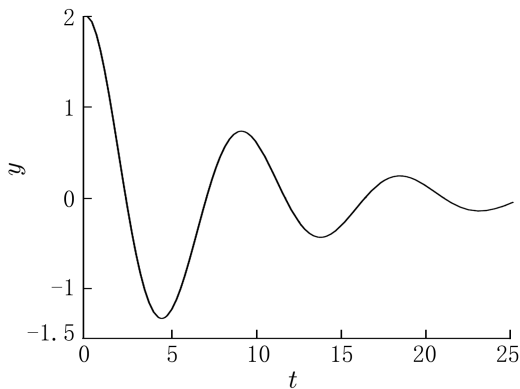


图 1 无阻尼的分数阶弹簧振子模型振幅随时间增加而递减的动力学行为图

Fig.1 The graph of dynamical behavior for the amplitude of undamped fractional spring oscillator model decreases according to the time increases

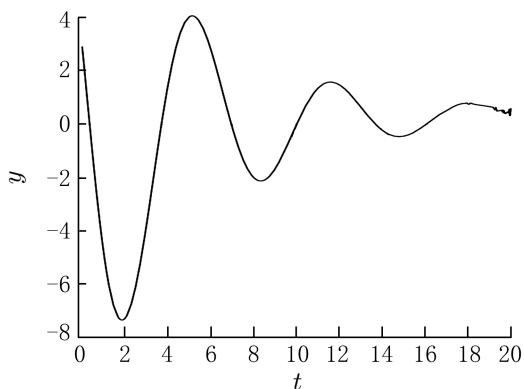


图 2 无阻尼的分数阶简单摆模型振幅随时间增加而递减的动力学行为图

Fig.2 The graph of dynamical behavior for the amplitude of undamped fractional simple pendulum model decreases according to the time increases

从图 2 也可以看出, 即便是在理想状态下, 由于单摆的悬线材料是由有记忆性的粘弹性材料做成的, 因此单摆在振动过程中振幅同样会随着时间的增加而减小, 这与整数阶单摆模型在理想状态下保持不变振幅的周期振动相比, 显得有些“反常”, 这种反常现象完全是由于复杂的弹性悬线材料所引起的. 以上 2 种现象, 就像文献[21]中所研究的磁流变减震系统那样, 由特殊材料做成的分数阶模型系统在减震吸收效果方面确实优于整数阶模型系统, 这也是这么多年来分数阶数学建模以及分数阶微分方程越来越受到人们的亲睐和重视的一个原因. 但是, 由于目前分数阶微积分的理论发展得还不够完善, 再加上分数阶微积分的定义本身就比较整数阶微积分的定义复杂, 所以在科学研究中, 特别是在分数阶的数学模型的求解方面还不能像整数阶微分方程领域求解那样可以得心应手.

## 2 带阻尼的松弛-振动模型的精确解及其动力学性质

这一节, 我们仅以数学家 Torvik 和 Bagley 于 1984 年研究牛顿黏弹性流体中的刚性板块浸入的振动问题时提出的松弛-振动模型<sup>[22]</sup> 为例来讨论带阻尼的分数阶 Torvik-Bagley 方程的精确解及其动力学行为.

**情形 1** 当参数  $A = m, B = 2S\sqrt{\mu\rho}, C = \kappa, \alpha = 2, 1 < \beta < 2$  时, 方程(1) 就变为

$$y''(t) + b_0^c D_t^\beta y(t) + cy(t) = f(t), 1 < \beta < 2, \quad (28)$$

且满足初值条件  $y(0) = y'(0) = 0$ . 其中  $b = \frac{2S\sqrt{\mu\rho}}{m}, c = \frac{\kappa}{m}$  且  $m$  为弹簧上悬挂的重物的质量,  $\kappa$  为弹簧的弹性系数,  $\mu$  为阻尼系数,  $S$  为重物的横切面面积,  $\rho$  为黏弹性流体(介质) 的密度,  $v$  为重物的体积,  $g$  为重力加速度,  $f(t)$  为合外力. 显然原始模型中  $\beta = \frac{3}{2}$  只是方程(28) 的一种特殊情况, 这表明方程(28) 可以描述更为复杂的黏弹性流体中刚性板块浸入后的弹性振动问题.

在初值条件  $y(0) = y'(0) = 0$  下对 (28) 式两边同时施行 Laplace 变换得:

$$s^2 Y(s) + bs^\beta Y(s) + cY(s) = F(s). \quad (29)$$

由方程 (29) 解得:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + bs^\beta + c}. \quad (30)$$

在 (30) 式中取

$$g_3(s) = \frac{1}{s^2 + bs^\beta + c}. \quad (31)$$

上式整理成:

$$g_3(s) = \frac{1}{s^2 + bs^\beta + c} = \frac{1}{c} \frac{cs^{-\beta}}{s^{2-\beta} + b} \frac{1}{1 + \frac{cs^{-\beta}}{s^{2-\beta} + b}} = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c^{k+1} \frac{s^{-\beta(k+1)}}{(s^{2-\beta} + b)^{k+1}}. \quad (32)$$

对 (32) 式取 Laplace 逆变换得下列 Green 函数:

$$G_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} c^k t^{2k+1} E_{2-\beta, 2+\beta k}^{(k)}(-bt^{2-\beta}). \quad (33)$$

于是,带阻尼的分数阶 Torvik - Bagley 方程的解为 Green 函数与  $f(t)$  的卷积,即

$$y(t) = G_3(t) * f(t) = \int_0^t G_3(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (34)$$

显然要想将 (33) 式代入 (34) 式后通过积分来获得分数阶 Torvik - Bagley 方程的精确解的确是非常困难的,但在实际中可以通过 (34) 式的数值成像来展示解的动力学性质和动力学行为.

**情形 2** 当参数  $A = m, B = 2s\sqrt{\mu\rho}, C = \kappa, \alpha = 2\beta, 0 < \beta < 1, f(t) = 0$  时,方程 (1) 就变为

$${}_0^c D_t^{2\beta} y(t) + b {}_0^c D_t^\beta y(t) + cy(t) = 0, 0 < \beta < 1, \quad (35)$$

对于方程 (35) 这样的线性齐次方程,我们类似于整数阶线性齐次微分方程那样设方程 (35) 的一个基本解为下列单参数形式的 Mittag - Leffler 函数

$$y(t) = E_\beta(\lambda t^\beta), \quad (36)$$

其中  $\lambda$  为待定的非 0 常数. 将 (36) 式代入方程 (35) 中,利用 Mittag - Leffler 函数的  $m\beta$  阶导数公式

$\frac{d^{m\beta}}{dt^{m\beta}} E_\beta(\lambda t^\beta) = \lambda^m E_\beta(\lambda t^\beta)$  ( $m \in \mathbf{N}^+$ ) 可得:

$$\lambda^2 E_\beta(\lambda t^\beta) + b\lambda E_\beta(\lambda t^\beta) + cE_\beta(\lambda t^\beta) = 0. \quad (37)$$

上式约去 Mittag - Leffler 函数得:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (38)$$

方程 (38) 有点类似于整数阶线性齐次微分方程的特征方程,当  $\Delta = b^2 - 4c > 0$  时,方程 (38) 有 2 个不相

等的实根  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ , 此时方程 (35) 有下列形式的精确解:

$$y(t) = C_1 E_\beta\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} t^\beta\right) + C_2 E_\beta\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} t^\beta\right), \quad (39)$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数; 当  $\Delta = b^2 - 4c = 0$ , 即  $c = \frac{b^2}{4}$  时,方程 (38) 有 2 个相等的实根  $\lambda = -\frac{b}{2}$ , 此时方程

(35) 有下列形式的精确解:

$$y(t) = C_0 E_\beta\left(-\frac{b}{2} t^\beta\right), \quad (40)$$

其中  $C_0$  为任意常数. 由于方程 (35) 是分数阶的, 因此我们无法像处理整数阶线性齐次方程具有二重特征根的情况时那样, 把解 (40) 也写成那种把  $C_0$  部分变成一次函数的形式; 当  $\Delta = b^2 - 4c < 0$  时, 方程 (38)

有 2 个共轭复根  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4c - b^2}}{2}$  ( $i$  为虚数单位), 此时方程(35) 有下列形式的复值型解:

$$y(t) = C_1 E_{\beta,1} \left( \frac{-b + i\sqrt{4c - b^2}}{2} t^\beta \right) + C_2 E_{\beta,1} \left( \frac{-b - i\sqrt{4c - b^2}}{2} t^\beta \right), \quad (41)$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数. 我们也无法像处理整数阶线性齐次方程那样, 把这个复值解写成一个解析的实值解, 但在 2 个初值条件相等时, 我们却可以将复值解(41) 写成实值的无穷级数形式, 若记  $\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ ,  $r = \sqrt{c}$ ,  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{4c - b^2}}{-b}$ . 则当  $C_1 = C_2 = C_0$  为非 0 常数时, 复值解(41) 可写成实值的无穷级数形式:

$$y(t) = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{2(\sqrt{c}t^\beta)^k}{\Gamma(\beta k + 1)} \cos \left( k \arctan \frac{\sqrt{4c - b^2}}{-b} \right) \right]. \quad (42)$$

**情形 3** 当参数  $A = m, B = 2s\sqrt{\mu\rho}, C = \kappa, \alpha = 2\beta, 0 < \beta < 1, f(t) = mg - \rho gv$  时, 方程(1) 就变为

$${}_0 D_t^{2\beta} y(t) + b {}_0 D_t^\beta y(t) + cy(t) = g \left( 1 - \frac{\rho v}{m} \right), 0 < \beta < 1. \quad (43)$$

在这种情况下模型仅受弹簧的回复力、阻力、重力与刚性物体在粘弹性流体中的浮力等合力, 而不受其它外力的干涉作用. 对于这个线性非齐次方程(43), 我们同样无法像处理整数阶线性非齐次方程那样先求对应齐次方程的通解, 再求它的一个特解的办法来获得其通解, 显然整数阶求特解那套理论在分数阶这儿完全行不通, 于是只能对方程(43) 两边施行 Laplace 变换, 为简便起见, 不妨设初值条件为  $y(0) = y'(0)$ , 这正是文献[22] 中所给出的初值条件, 在这个条件下, 我们来求方程(43) 的特解. 对方程(43) 两边施行 Laplace 变换得:

$$s^{2\beta} Y(s) + bs^\beta Y(s) + cY(s) = g \left( 1 - \frac{\rho v}{m} \right) \frac{1}{s}. \quad (44)$$

当  $\Delta = b^2 - 4c > 0$  时, 由方程(44) 可得:

$$Y(s) = \frac{g}{\sqrt{b^2 - 4c}} \left( 1 - \frac{\rho v}{m} \right) \left[ \frac{s^{-1}}{s^\beta - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} - \frac{s^{-1}}{s^\beta - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \right]. \quad (45)$$

记  $s^{-1} = s^{\beta - (\beta + 1)}$ , 对(45) 式施行 Laplace 逆变换, 我们获得非齐次方程(43) 的一个特解为

$$y(t) = \frac{g(m - \rho v)}{m\sqrt{b^2 - 4c}} t^\beta \left[ E_{\beta, \beta + 1} \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} t^\beta \right) - E_{\beta, \beta + 1} \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} t^\beta \right) \right]. \quad (46)$$

当  $\Delta = b^2 - 4c = 0$ , 即  $c = \frac{b^2}{4}$  时, 由方程(44) 可得:

$$Y(s) = g \left( 1 - \frac{\rho v}{m} \right) \frac{s^{-1}}{\left( s^\beta + \frac{b}{2} \right)^2} = g \left( 1 - \frac{\rho v}{m} \right) \frac{s^{\beta - (\beta + 1)}}{\left( s^\beta + \frac{b}{2} \right)^2}. \quad (47)$$

对(47) 式施行 Laplace 逆变换, 我们获得非齐次方程(43) 的一个特解为

$$y(t) = g \left( 1 - \frac{\rho v}{m} \right) t^{2\beta} E'_{\beta, \beta + 1} \left( -\frac{b}{2} t^\beta \right). \quad (48)$$

当  $\Delta = b^2 - 4c < 0$  时, 由方程(44) 可得:

$$Y(s) = \frac{g}{i\sqrt{4c - b^2}} \left( 1 - \frac{\rho v}{m} \right) \left[ \frac{s^{-1}}{s^\beta - \frac{-b + i\sqrt{4c - b^2}}{2}} - \frac{s^{-1}}{s^\beta - \frac{-b - i\sqrt{4c - b^2}}{2}} \right]. \quad (49)$$

对 (49) 式施行 Laplace 逆变换, 我们获得非齐次方程 (43) 的一个复值解

$$y(t) = \frac{g(m - \rho v)}{im\sqrt{4c - b^2}} t^\beta \left[ E_{\beta, \beta+1} \left( \frac{-b + i\sqrt{4c - b^2}}{2} t^\beta \right) - E_{\beta, \beta+1} \left( \frac{-b - i\sqrt{4c - b^2}}{2} t^\beta \right) \right]. \quad (50)$$

同样记  $\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ ,  $r = \sqrt{c}$ ,  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{4c - b^2}}{-b}$ . 则复值解 (50) 可写成实值的无穷级数形式:

$$y(t) = \frac{g(m - \rho v)}{m\sqrt{4c - b^2}} t^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2(\sqrt{c}t^\beta)^k}{\Gamma[\beta(k+1) + 1]} \sin \left( k \arctan \frac{\sqrt{4c - b^2}}{-b} \right) \right]. \quad (51)$$

为了能够直观地反映有阻尼的分数阶弹簧振子模型的运动规律和动力学性质, 我们以解析解 (39) 和 (51) 为例, 分别绘出它们的坐标图形, 通过图像能够显示振幅与时间的动力学演化行为.

取固定参数值  $\beta = 0.75$ ,  $C_1 = 0.5$ ,  $C_2 = 1$ ,  $b = 5$ ,  $c = 2$ ,  $t \in [0.01, 2.5]$ , 我们绘出解 (39) 的坐标图, 见图 3. 从图 3 可以看出, 在大阻尼情况下, 弹簧在振动过程中振幅会随着时间的增加而迅速减小, 很快回到平衡态, 在快达到平衡态时产生高频的微小震荡. 类似地, 取固定参数值  $\beta = 0.75$ ,  $m = 10$ ,  $g = 9.8$ ,  $\rho = 1.5$ ,  $v = 0.4$ ,  $b = 2$ ,  $c = 4$ ,  $t \in [0.1, 2.8]$ , 我们绘出解 (51) 的坐标图, 见图 4.

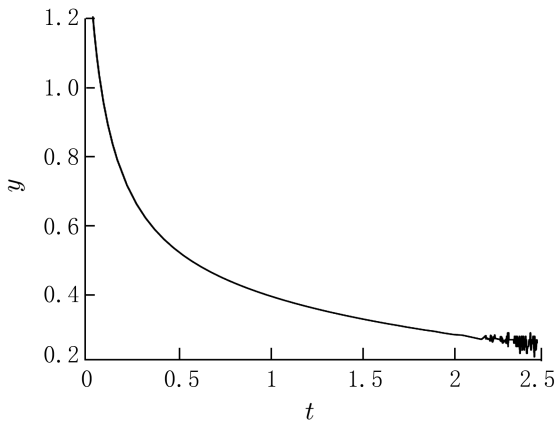


图 3 带阻尼的分数阶弹簧振子模型振幅随时间增加而迅速递减后发生高频震荡的效果图

Fig.3 The graph of effect of high frequency oscillation on the amplitude of fractional spring oscillator model with damping increases rapidly with time

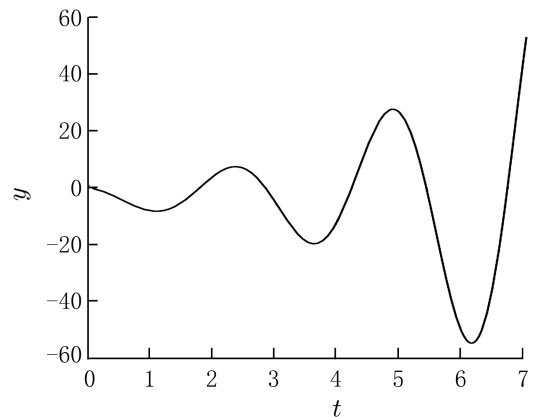


图 4 带阻尼的分数阶弹簧振子模型振幅随时间增加而增大的动力学行为图

Fig.4 The graph of dynamical behavior for the amplitude of fractional spring oscillator model with damping amplifies according to the time increases

从图 4 可以看出, 在弹性系数很大的情况下, 超强弹簧在振动过程中振幅会随着时间的增加而迅速的增大, 就好像受到外力发生共振现象一样. 然而弹簧此时并没有受到与固有频率相同的外力干扰, 也没有发生共振, 只是这种“反常”现象是分数阶模型所特有的现象而已. 这也是为什么分数阶模型与整数阶模型非常不一样的地方, 这将给我们一种提示, 在共振系统 (如振动器材) 的设计方面, 人们能否考虑将其设计成用复杂材料 (特殊材料) 做成的分数阶共振系统呢?

## 参考文献:

- [1] TAN W, PAN W X, XU M Y. A note on unsteady flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model between two parallel plates[J]. Int J Non-Linear Mech, 2003, 38(5): 645-650.
- [2] HAYAT T, NADEEM S, ASGHAR S. Periodic unidirectional flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model[J]. Appl Math Comput, 2004, 151(1): 153-161.
- [3] TRIPATHI D, PANDEY S K, DAS S. Peristaltic flow of viscoelastic fluid with fractional Maxwell model through a channel[J].



- Appl Math Comput, 2010, 215(10) : 3 645-3 654.
- [4] GRIGORENKO I, GRIGORENKO E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91(3) : 034101.
- [5] PEI S C, DING J J. Relations between Gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing [J]. IEEE Trans Signal Process, 2007, 55(10) : 4 839-4 850.
- [6] SEJDIĆ E, DJUROVIĆ I, STANKOVIĆ L J. Fractional Fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments [J]. Signal Process, 2011, 91(6) : 1 351-1 3691.
- [7] LOHMANN A W, MENDLOVIC D, ZALEVSKY Z, et al. Some important fractional transformations for signal processing [J]. Opt Commun, 1996, 125(1) : 18-20.
- [8] BALEANU D, MACHADO J A T, LUO A C J. Fractional dynamics and control [M]. Springer Science and Business Media, 2011.
- [9] SAKTHIVEL R, MAHMUDOV N I, NIETO J J. Controllability for a class of fractional-order neutral evolution control systems [J]. Appl Math Comput, 2012, 218(20) : 1 033-10 340.
- [10] METZLER R, BARKAI E, KLAFTER J. Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium; a fractional Fokker-Planck equation approach [J]. Phys Rev Lett, 1999, 82(18) : 3563.
- [11] METZLER R, GLÖCKLE W G, NONNENMACHER T F. Fractional model equation for anomalous diffusion [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1994, 211(1) : 13-24.
- [12] HENRY B I, LANGLANDS T A M, WEARNE S L. Anomalous diffusion with linear reaction dynamics: from continuous time random walks to fractional reaction-diffusion equations [J]. Phys Rev E, 2006, 74(3) : 031116.
- [13] ANH V V, LEONENKO N N. Scaling laws for fractional diffusion-wave equations with singular initial data [J]. Statist Probab Lett, 2000, 48(3) : 239-252.
- [14] AHMED E, ELGAZZAR A S. On fractional order differential equations model for nonlocal epidemics [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2007, 379(2) : 607-614.
- [15] EL-SAYED A M A, RIDA S Z, ARAFA A A M. Exact solutions of fractional-order biological population model [J]. Commun. Theor Phys, 2009, 52(6) : 992.
- [16] LIU F, BURRAGE K. Novel techniques in parameter estimation for fractional dynamical models arising from biological systems [J]. Comput Math Appl, 2011, 62(3) : 822-833.
- [17] JAMIL M, KHAN A N, SHAHID N. Fractional magnetohydrodynamics Oldroyd-B fluid over an oscillating plate [J]. Thermal Sci, 2013, 17(4) : 997-1011.
- [18] MOUSTAFA E L S. MHD of a fractional viscoelastic fluid in a circular tube [J]. Mech Res Commun, 2006, 33(2) : 261-268.
- [19] ZAFAR A A, VIERU D, AKHTAR S. Magnetohydrodynamics of rotating fractional second grade fluid in porous Medium [J]. J Prime Res Math, 2015, 10(1) : 45-58.
- [20] 刘刚, 胡卫敏, 张稳根. 非线性分数阶微分方程边值问题多重正解的存在性 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2012, 34(3) : 258-264.
- LIU G, HU W M, ZHANG W G. The problem of the existence of multiple positive solutions of nonlinear fractional differential equations boundary value [J]. Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition, 2012, 34(3) : 258-264.
- [21] 汤小松. 一类分数阶微分方程三点边值问题正解的存在性和多重性 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2012, 34(4) : 385-392.
- TANG X S. Existence and multiplicity of positive solutions for a class of fractional differential equations with three point boundary value problems [J]. Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition, 2012, 34(4) : 385-392.
- [22] TORVIK P J, BAGLEY R L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials [J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 1984, 51(2) : 294-298.
- [23] CHEN B, LI C, WILSON B, et al. Fractional modeling and analysis of coupled MR damping system [J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2016, 3(3) : 288-294.
- [24] YOUSSEFI Y H. A new operational matrix of Caputo fractional derivatives of Fermat polynomials: an application for solving the Bagley-Torvik equation [J]. Advances in Difference Equations, 2017, 2017(1) : 73.
- [25] RAJA M A Z, KHAN J A, QURESHI I M. Solution of fractional order system of Bagley-Torvik equation using evolutionary

computational intelligence[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011(2011): 1-18.

- [26] WANG Z H, WANG X. General solution of the Bagley–Torvik equation with fractional–order derivative[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(5): 1 279-1 285.
- [27] 李慧芳. 分数阶 Bagley–Torvik 方程的数值方法的稳定性和收敛性分析[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2013.
- LI H F. Stability and convergence analysis of numerical methods for fractional Bagley–Torvik equations[D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2013.

## Different kinds of exact solutions of fractional generalized Bagley–Torvik equation and their dynamical properties

HUANG Xiao, RUI Wei-guo

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** The fractional generalized Bagley–Torvik equation as a generalized form of relaxation–vibration model, it has better physical background, and it has very good applications on investigating the problem of vibration in complex medium and modeling motion of a rigid plate immersed in a Newtonian viscous fluid. By using the Laplace transform, exact solutions of the fractional generalized Bagley–Torvik equation are studied, under different parametric conditions, different kinds of analytic solutions of this model are obtained, the dynamical behaviors of these exact solutions are also discussed. In order to show dynamical properties of these exact solutions intuitively, by using software of Maple, the graphs according to time evolution of several representative exact solutions are illustrated.

**Key words:** Laplace Transform; Relaxation–vibration Model; fractional Bagley–Torvik equation; exact solutions