第三章

平面与空间直线

第三章 平面与空间直线

§1 平面的方程

Contents

一、由平面上一点与平面的方位向量决定的平面的方程

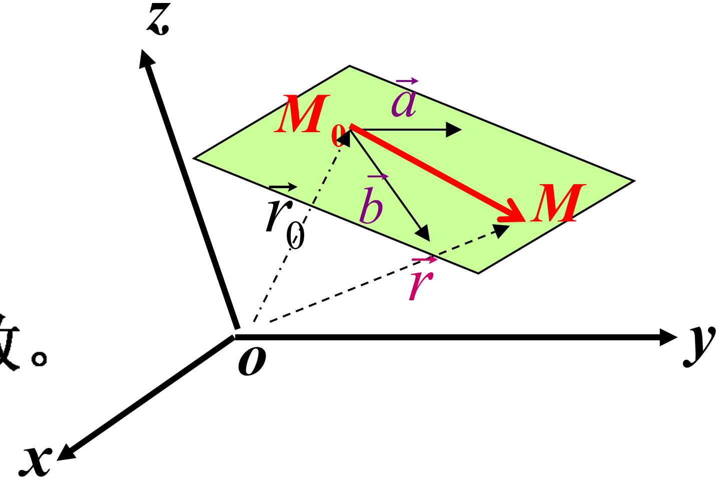
- 1. 平面的参数方程
- 2. 平面的点位式方程
- 3. 平面的截距式方程

1. 向量式参数方程

在空间给定了一点 M_0 与两不共线向量 $\vec{a},\vec{b}$，那么通过点 M_0 且与向量 $\vec{a},\vec{b}$ 平行的平面 π 就惟一地被确定，向量 $\vec{a},\vec{b}$ 叫做平面 π 的方位向量。

在空间取仿射坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ **，并设点** M_0 **的向径** $\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}_0$ **，**

平面 π **上任意一点** M **的向径为** $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ **，**



则平面 π 的向量式参数方程为

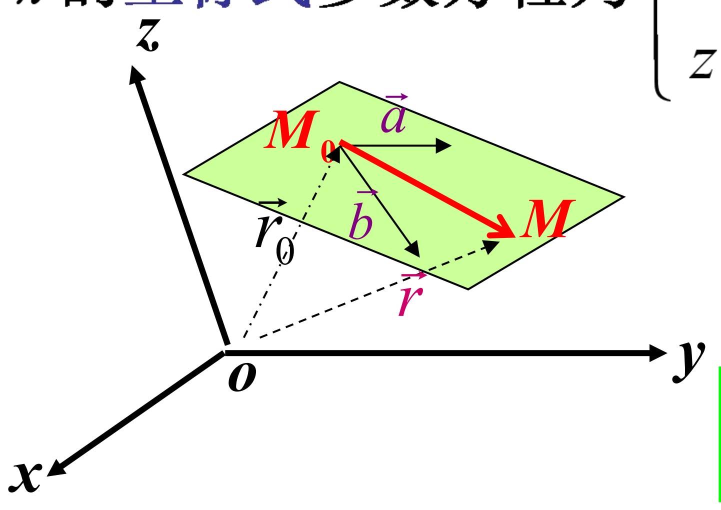
$$\vec{r}=\vec{r}_0+u\vec{a}+v\vec{b},$$ 其中 u,v 为参数。

2. 坐标式参数方程

设点 M_0, M 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z)$，那么

$\vec{r_0} = \{x_0, y_0, z_0\}, \vec{r} = \{x, y, z\}$；并设 $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$

则平面 π 的坐标式参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + X_1 u + X_2 v \\ y = y_0 + Y_1 u + Y_2 v \\ z = z_0 + Z_1 u + Z_2 v \end{cases}$，$u, v$ 为参数。

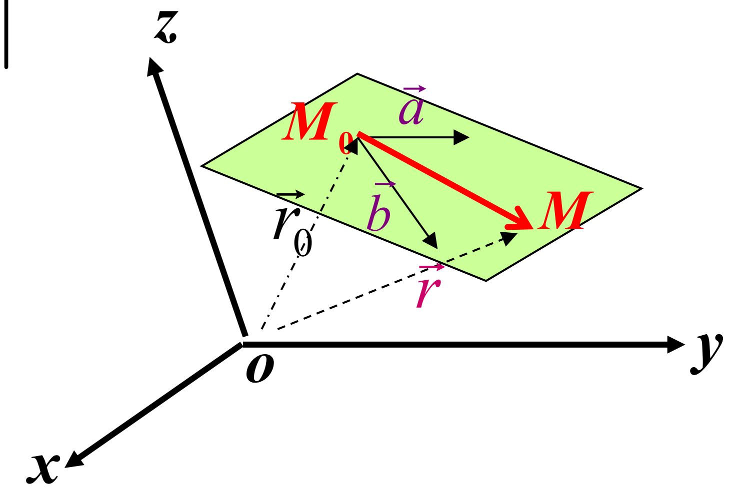


$\vec{r} = \vec{r_0} + u\vec{a} + v\vec{b}$，其中 u, v 为参数。

3. 平面的点位式方程

平面的点位式方程为 $\left(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{a},\vec{b}\right)=0$

或 $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0$$



例1 已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$，求通过三点 M_1,M_2,M_3 的平面 π 的方程。

解： 其向量式参数方程 $\vec{r}=\vec{r_1}+u\left(\vec{r_2}-\vec{r_1}\right)+v\left(\vec{r_3}-\vec{r_1}\right)$

其坐标式参数方程
$$\begin{cases} x=x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1) \\ y=y_1+u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1) \\ z=z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1) \end{cases}$$

或 $\left(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{r_2}-\vec{r_1},\vec{r_3}-\vec{r_1}\right)=0$

或 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ 或 $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

4. 平面的截距式方程

若已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0), M_2(0,b,0), M_3(0,0,c)$，其中 $abc \neq 0$，则平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

二、平面的一般方程

定理1

空间中任一平面的方程都可以表示成一个关于变量 x,y,z 的一次方程；

反过来，每一个关于变量 x,y,z 的一次方程都表示一个平面，

$Ax+By+Cz+D=0$ 叫做平面的一般方程。

几种特殊情形讨论：

1）当且仅当 $D=0$ $Ax+By+Cz=0$ 平面通过原点

2）当 A,B,C 中有一为0

当且仅当 $C=0$, ① $D\neq 0$ 时, $Ax+By+D=0$ 平面平行于 z 轴

② $D=0$ 时，$Ax+By=0$ 平面通过 z 轴

$A=0$, ① $D\neq0$ 时, $By+Cz+D=0$ 平面平行于 x 轴

当 A,B,C 中有一为0 时，方程表示的平面平行于（$D\neq0$）或通过（$D=0$）与所缺元同名的坐标轴。

② $D=0$ 时，$Ax+Cz=0$ 平面通过 y 轴

3）当 A，B，C 中有两个为 0 时

当且仅当 $B=C=0$，① $D\neq0$, 平面平行于 yOz 平面

② $D=0$, 即为 yOz 平面

$A=C=0$，① $D\neq0$, 平面平行于 xOz 平面

当 A,B,C 中有两个为0 时，方程表示的平面平行于（$D\neq0$）或就是（$D=0$）由所缺元表示的坐标面。

② $D=0$, 即为 xOy 平面

例2 求通过$M_1(2,-1,1)$ $M_2(3,-2,1)$ ，且平行于 z 轴的平面方程。

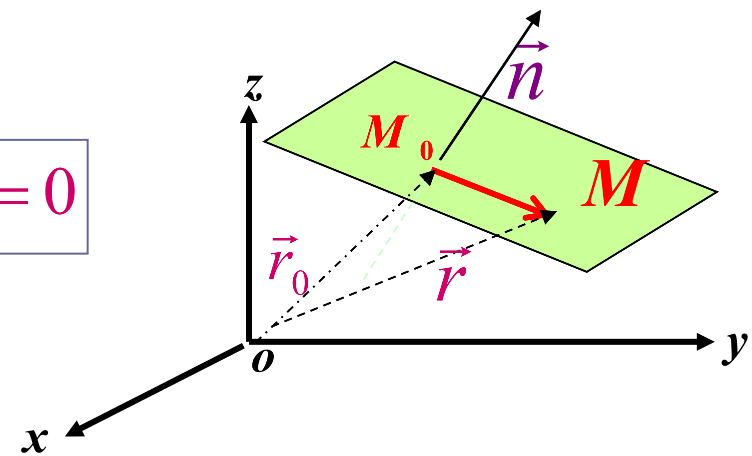
三、平面的法式方程

如果给定空间一点 M_0 和一个非零向量 $\vec{n}$，那么通过点 M_0 且与向量 $\vec{n}$ 垂直的平面也惟一地被确定，把与平面垂直的非零向量 $\vec{n}$ 叫做平面的法向量。

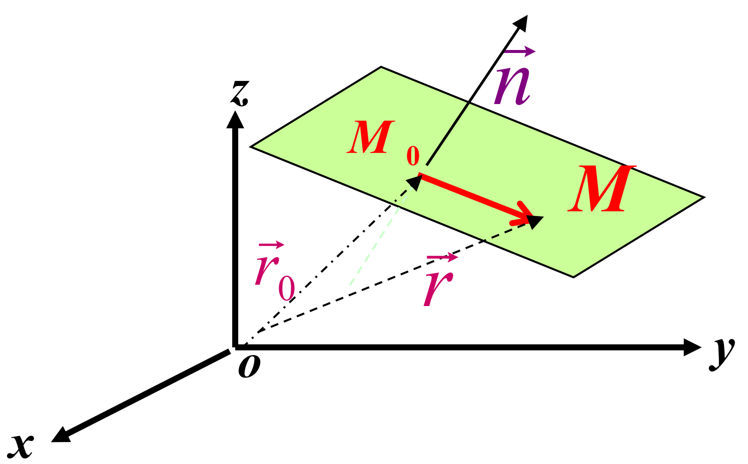
取空间直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$，设点 M_0 的向径为 $\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}_0$，平面上的任意一点 M 的向径为 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，则平面的点法式方程 $\vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)=0$

若设 $\vec{n}=\{A,B,C\},M_0\left(x_0,y_0,z_0\right),M\left(x,y,z\right)$，那么有平面的点法式方程：

$$\boxed{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0}$$



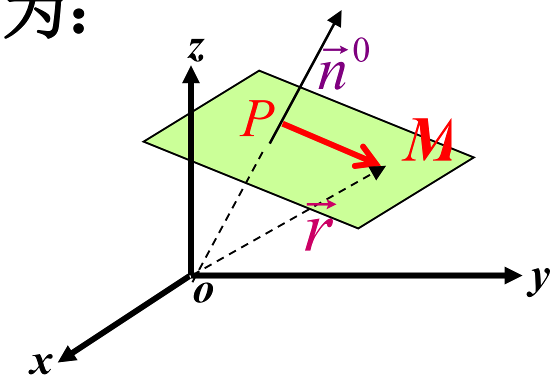
平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的系数A，B，C 有简明的几何意义，它们是平面的一个法向量的坐标.



平面的法式方程

若平面上的一点M_0特殊地取自原点O向平面π所引垂线的垂足P，而π的法向量取单位向量$\overrightarrow{n^0}$，设$\left|\overrightarrow{OP}\right| = p$，那么由点$P$和法向量$\overrightarrow{n^0}$决定的平面的向量式法式方程为：

$$\overrightarrow{n^0}\cdot\left(\vec{r} - p\overrightarrow{n^0}\right) = 0$$



平面的坐标式法式方程，简称法式方程为

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$$

平面的法式方程是一种具有下列两个特征的一般方程：

①一次项的系数是单位法向量的坐标，它们的平方和等于1；

②因为p是原点O到平面π的距离，所以常数$-p \le 0$。

平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 法式化

取 $\lambda=\frac{1}{\pm|\vec{n}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 乘平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$

可得法式方程

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

λ符号的选取由 $\lambda D=-p\le 0$ 决定，通常与常数项 D 的符号相反。

λ在取定符号后叫做法式化因子。

例3 已知两点 $M_1(1,-2,3), M_2(3,0,-1)$ ，求线段M_1M_2 的垂直平分面 π 的方程。

例4 把平面 π 的方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程，求自原点指向平面 π 的单位法向量及其方向余弦，并求原点到平面的距离

练习： 求过三点$A(2,1,0), B(0,-1,2), C(3,0,4)$ 的平面方程.
（向量式，参数式，点位式，截距式，一般式，点法式，法式）

作业

$P_{105\sim106}$ ：

5(2),(4),(6) ；7 ， 8, 9

思考题：

P_{106} ： 10 ，11