

DOI: 10.15960/j.cnki.issn.1007-6093.2017.02.007

线性方程组 l_1 范数问题的松弛投影算法及其应用*

屈彪^{1,†} 张文伟¹ 于丽超¹

摘要 考虑线性方程组 l_1 范数问题的求解, 在分别将其转化为一个分裂可行问题和凸可行问题的基础上, 设计了几种松弛投影算法, 然后将所设计的求解方法用于信号处理问题的求解上.

关键词 线性方程组, l_1 范数问题, 松弛投影算法

中图分类号 O22.2

2010 数学分类号 90C30, 90C90, 665K05

The relaxed projection methods for solving the l_1 -norm problem of linear equations and their applications*

QU Biao^{1,†} ZHANG Wenwei¹ YU Lichao¹

Abstract This paper discusses of the methods for solving the l_1 -norm problem of linear equations. First, the problem is translated into a split feasibility problem and a convex feasibility problem, respectively. Then, some relaxed projection algorithms are presented. Finally, the new algorithms are applied to solve some signal processing problems.

Keywords linear equations, l_1 -norm problem, relaxed projection algorithm

Chinese Library Classification O22.2

2010 Mathematics Subject Classification 90C30; 90C90; 665K05

0 引言

考虑如下线性方程组的 l_1 范数问题:

$$\text{求 } x \in \mathbb{R}^n, \text{ 使得 } Ax = b \text{ 且 } \|x\|_1 \leq s, \quad (0.1)$$

其中 A 是一个给定的 $m \times n$ 阶的实值矩阵, $b \in \mathbb{R}^m$, $s > 0$ 为一给定的数.

问题(0.1)的提出有其应用价值. 例如, 近年来, 求解欠定线性方程组的稀疏解得到了广泛的关注和研究, 这是因为这类问题在信号处理和统计学等领域有着广泛的应用. 设 \bar{x} 是一个稀疏的或接近稀疏的原始信号, $A \in \mathbb{R}^{m \times n} (m \ll n)$ 是一个线性算子, $b \in \mathbb{R}^m$ 是一个观察值, 满足关系 $b = A\bar{x}$. 原始信号 \bar{x} 若能从线性方程组 $Ax = b$ 中重新构造出来, 则它是令人满意的. 然而, 线性方程组是欠定的(或病态的), 能够产生无穷多个解. 从压缩传

收稿日期: 2017-03-24

* 基金项目: 国家自然科学基金(No. 11271226)

1. 曲阜师范大学管理学院、运筹学研究所, 山东日照 276826; Institute of Operations Research, School of Management, Qufu Normal University, Rizhao 276826, Shandong, China

† 通信作者 E-mail: qubiao001@163.com

感的基本原则出发, 在所有的解中寻找最稀疏的那个是合理的方法. 因此, l_0 -范数正则极小化问题将是合适的. 理论证明^[1], 在 b 与 A 满足一定条件的前提下, 可以通过求解最优 l_0 范数达到精确重构原始信号的目的:

$$\min_x \{\|x\|_0 | Ax = b\},$$

其中, $\|x\|_0$ 表示向量 x 的 l_0 范数, 即 x 中非零分量的个数. 但是, 对于 l_0 -范数的最优化问题而言, 它是个组合问题, 其本质是 NP 问题, 很难在多项式时间内求解, 计算起来很棘手, 甚至对于解的可靠性都无法给出证明. 一个可替代的模型是将 l_0 范数替换为 l_1 范数, 然后求解所谓的 Basis-Pursuit (BP) 问题^[2]:

$$\min_x \{\|x\|_1 | Ax = b\}. \quad (0.2)$$

基于(0.2), 文献[3]的作者将压缩传感问题转化为一个类似于(0.1)的问题. 问题(0.1)不完全等价于问题(0.2), 它是压缩传感问题的一种不同的转化形式, 为问题的求解提供了一个新的解题思路.

我们知道, 投影算法^[4-7]是求解非线性最优化问题的一类重要算法, 它具有如下鲜明的优点: 此类算法很容易执行, 尤其是当问题的约束比较简单时; 算法的存储量小, 可用于求解大规模的问题; 算法可以容易地利用问题相应映射或约束集的任何稀疏或可分离的结构; 在算法的每次迭代中, 可以在有效集上减少或增加一些约束等. 基于其结构和理论上的诸多优点, 人们逐渐提出了很多投影类算法. 这类算法所用到的基本运算就是投影的计算. 我们知道, 计算一个点到某一集合的投影本身就是一个最优化问题, 当投影区域具有某些特殊结构时, 此最优化问题很容易求解. 然而, 在某些情况下, 精确计算点到集合上的投影是不可能的或者是需要花费很大的计算量, 当这些情况发生时, 投影类算法的有效性将受到影响. 为此, 从减少算法的计算量、减少传统投影算法的计算难度出发, 人们提出了松弛投影算法^[8-10], 其根本思想是把具体投影的区域做些适当变换, 使得在具体计算时, 能够在一个好计算投影的集合上或区域上(如超平面、半空间、凸多面体等)做投影, 从而代替原来难以计算的投影.

在本文中, 我们将研究求解问题(0.1)的松弛投影算法. 在将(0.1)分别转化为一个分裂可行问题和一个凸可行问题的基础之上, 分别设计不同的松弛投影算法来求解, 最后将所设计的算法用于信号处理问题的求解, 给出了数值实验结果.

1 预备知识

在本节中, 我们复习一下在本文中将要用到的一些定义和基本结果.

对于一个给定的非空闭凸集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, 从 \mathbb{R}^n 到 Ω 上的正交投影定义为:

$$P_\Omega(x) = \operatorname{argmin}\{\|x - y\| | y \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

它有如下一些众所周知的性质.

引理 1.1^[11] 设 Ω 是 \mathbb{R}^n 的一个给定的非空闭凸子集, 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和 $z \in \Omega$,

$$(1) \langle P_\Omega(x) - x, z - P_\Omega(x) \rangle \geq 0;$$

$$(2) \|P_{\Omega}(x) - P_{\Omega}(y)\|^2 \leq \langle P_{\Omega}(x) - P_{\Omega}(y), x - y \rangle;$$

$$(3) \|P_{\Omega}(x) - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|P_{\Omega}(x) - x\|^2.$$

注释 1.1 从引理1.1的第(2)部分, 我们可知投影 P_{Ω} 是一个非扩张的算子, 即, 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|P_{\Omega}(x) - P_{\Omega}(y)\| \leq \|x - y\|.$$

由投影的定义知, 求一点到某一闭凸集上的投影本身是一个最优化问题. 当闭凸集具有某些特殊结构时, 投影是好求的, 如, 求到超平面和半空间上的投影, 就可以显式表示出来, 见下面的引理.

引理 1.2^[12] (1) 点 x^0 到超平面 $H = \{x | a^T x = b\}$ 的投影由下式给出

$$P_H(x^0) = x^0 + \frac{b - a^T x^0}{\|a\|^2} a.$$

(2) 点 x^0 到半空间 $C = \{x | a^T x \leq b\}$ 上的投影由下式给出

$$\begin{aligned} P_C(x^0) &= \begin{cases} x^0 + \frac{b - a^T x^0}{\|a\|^2} a, & \text{如果 } a^T x^0 > b; \\ x^0, & \text{如果 } a^T x^0 \leq b. \end{cases} \\ &= x^0 - \frac{\max\{0, a^T x^0 - b\}}{\|a\|^2} a. \end{aligned}$$

因此, 当到一个闭凸集上的投影不好求的时候, 人们往往是通过构造包含此闭凸集的一个超平面或者是半空间, 通过到超平面或半空间上的投影来逐渐逼近到此闭凸集上的投影. 这其中用到的一个重要工具是次梯度.

定义 1.1^[13] 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个凸函数. 我们说一个向量 $d \in \mathbb{R}^n$ 为函数 f 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的一个次梯度, 如果

$$f(z) \geq f(x) + \langle d, z - x \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

凸函数 f 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的所有次梯度构成的集合称为 f 在 x 处的次微分, 记为 $\partial f(x)$.

从次梯度的定义, 我们可很容易地求得凸函数 $\|x\|_1$ 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的次梯度.

引理 1.3 函数 $f(x) = \|x\|_1$ 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的次梯度 $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T$ 可表示为

$$t_i = \begin{cases} \alpha \in [-1, 1], & \text{如果 } x_i = 0; \\ 1, & \text{如果 } x_i > 0; \\ -1, & \text{如果 } x_i < 0. \end{cases}$$

如下引理提供了关于次微分的重要性质.

引理 1.4^[14] 假设 $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个凸函数, 则它是处处次可微的, 且其次微分在 \mathbb{R}^n 的任意有界集上是一致有界的.

引理 1.5^[13] 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个凸函数. 如果序列 $\{x^k\}$ 收敛到一个向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 且对所有的 k , 有 $d^k \in \partial f(x^k)$, 则序列 $\{d^k\}$ 是有界的且它的每一个聚点都是 f 在 x 的一个次梯度.

2 问题的转化形式及算法

在本节中, 我们将介绍问题的两种转化形式, 即分裂可行问题及凸可行问题的转化形式, 然后利用半空间松弛投影技术提出了几种松弛投影算法. 首先, 我们介绍一下关于凸可行问题及分裂可行问题的相关知识.

凸可行问题是一类常见而又重要的数学问题, 其严格的数学定义如下^[15]: 设 X 是一个欧式空间, C_1, C_2, \dots, C_N 是 X 的一些闭凸子集且它们的交集非空, 即, $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_N \neq \emptyset$, 凸可行问题就是求点 $x \in C$. 它包含许多问题, 如分裂可行问题(包含线性分裂可行问题、多集分裂可行问题等)、线性方程组问题、凸可行域问题等, 其中分裂可行问题由 Censor 和 Elfving 提出^[16]: 设 C 和 Q 分别是 \mathbb{R}^N 和 \mathbb{R}^M 中的非空闭凸集, A 是一个 $M \times N$ 阶的实矩阵, 求 $x \in C, Ax \in Q$. 而当 C 和 Q 分别是 \mathbb{R}^N 和 \mathbb{R}^M 中的一些非空闭凸集的交集时, 此问题即为多集分裂可行问题^[17,18]. 凸可行问题有着极强的应用背景, 在现代物理、医学、信号处理、图像重建、博弈论中都有着广泛的应用. 医疗中的 CT、B 超、自动手术刀等, 军事上的智能天线、精密制导炸弹、电子预警, 以及目前迅速发展的快速图像处理技术、高清晰度数字电视技术、语音处理系统等技术的处理中, 都存在着凸可行问题.

2.1 分裂可行问题形式的转化及算法

观察一下问题(0.1), 若令 $C = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_1 - s \leq 0\}$, $Q = \{y \in \mathbb{R}^m | y = b\}$, 则问题(0.1)可以转化为如下问题:

$$\text{求 } x^* \in C, \text{ 使得 } Ax^* \in Q. \quad (2.1)$$

即, 问题(0.1)可以转化为一个特殊的分裂可行问题(2.1).

令 $f(x) = \|x\|_1 - s$. 则由引理 1.3, 此函数在 $x^k \in \mathbb{R}^n$ 处的次梯度 $t^k \in \mathbb{R}^n$ 很容易求出. 利用次梯度, 可以构造如下半空间

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x^k) + \langle t^k, x - x^k \rangle \leq 0\}.$$

注释 2.1 利用次梯度的定义, 易证得 $C \subseteq C_k$, 即 C_k 是包含集合 C 的一个半空间.

以问题(2.1)为基础, 将我们在文献[19]给出的求解分裂可行问题的算法应用于问题的求解, 提出如下算法:

算法 1 设 x^0 是任给的. 对 $k = 0, 1, \dots$, 计算

$$x^{k+1} := P_{C_k}(x^k + \omega_k \gamma_k A^T(b - Ax^k)),$$

其中, $\gamma_k = \frac{\|b - Ax^k\|^2}{\|A^T(b - Ax^k)\|^2}$, $0 < \underline{\omega} \leq \omega_k \leq \bar{\omega} < 2$.

注释 2.2 实际上, 算法 1 是非线性规划中梯度投影算法的一种推广. 这是因为, 问题(0.1)可以转化为如下非线性规划问题

$$\min_{x \in C} g(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

来求解. 利用梯度投影算法来求解上述问题的基本公式是:

$$x^{k+1} := P_C(x^k - \alpha_k \nabla g(x^k)) = P_C(x^k + \alpha_k A^T(b - Ax^k)),$$

其中, $\alpha_k > 0$ 是步长. 我们在这里的算法, 将经典梯度投影算法中到闭凸集 C 上的投影用到包含 C 的一个半空间 C_k 上的投影来代替, 步长 α_k 的选择是根据当前迭代点的信息直接给出的. 由引理 1.2 知, 这里所用的投影极易求得, 而步长可直接给出, 避免了用线性搜索等寻找步长的麻烦. 因此, 松弛投影算法 1 是极易得到执行的.

利用与文献[19]中相似的证明思路, 我们可立即得到关于算法 1 的如下收敛性结果:

定理 2.1 设 $\{x^k\}$ 是由算法 1 产生的迭代点列, 则 $\{x^k\}$ 收敛到问题(0.1)的一个解上.

2.2 凸可行问题形式的转化及算法

下面, 我们利用文献[3]的基本思想, 考虑将问题(0.1)转化为更为一般的凸可行问题, 并设计松弛投影类算法来求解.

令

$$Q_j = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a^j, x \rangle = b_j\}, j = 1, 2, \dots, m,$$

其中, a^j 是矩阵 A^T 的第 j 列, b_j 是向量 b 的第 j 个分量. 显然 $Q_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 是超平面, 且满足:

$$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\} = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \triangleq \bigcap_{j=1}^m Q_j.$$

这样, 问题(0.1)可以转化为如下问题:

$$\text{求 } x^* \in \left(\bigcap_{j=1}^m Q_j \right) \cap C. \quad (2.2)$$

这里的集合 C 如 2.1 小节中所定义. 问题(2.2)是一个凸可行问题.

对问题(2.2), 我们给出如下算法:

算法 2 设 x^0 是任给的, $0 < \underline{\omega} \leq \omega_k \leq \bar{\omega} < 2$. 对 $k = 0, 1, \dots$, 计算

$$x^{k+1} := P_{C_k}(x^k + \omega_k \gamma_k d_k),$$

其中, $\bar{d}_j^k = P_{Q_j}(x^k) - x^k (j = 1, 2, \dots, m)$, $d_k = \sum_{j=1}^m \bar{d}_j^k$, $\gamma_k = \frac{\|\sum_{j=1}^m \bar{d}_j^k\|^2}{\|d_k\|^2}$. 而集合 C_k 如 2.1 小节中所定义的半空间.

注释 2.3 算法 2 是我们将文献[20]中的算法的一个松弛, 将到闭凸集 C 上的投影用到包含 C 的一个半空间 C_k 上的投影来代替, 也是一种松弛投影算法. 同样, 步长 α_k 的选择是根据当前迭代点的信息直接给出的. 而算法中用到的另外一些投影 $P_{Q_j} (j = 1, \dots, m)$, 因 $Q_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 是超平面, 由引理 1.2 知, 这些投影极易求得. 因此, 松弛投影算法 2 是极易得到执行的.

利用投影算子的相关理论及前面的引理, 我们可得到如下关于算法 2 的收敛性定理. 在此, 我们省去了具体的证明过程, 有兴趣的读者可参看相关松弛投影算法的文献[8-10].

定理 2.2 设 $\{x^k\}$ 是由算法 2 产生的迭代点列, 则 $\{x^k\}$ 收敛到问题(0.1)的一个解上. 下面, 我们给出问题(2.2)的一个序列松弛投影算法:

算法 3 设 x^0 是任给的, $0 < \underline{\omega} \leq \omega_k \leq \bar{\omega} < 2$. 对 $k = 0, 1, \dots$, 计算

$$x^{k+1} := P_{Q_m} P_{Q_{m-1}} \cdots P_{Q_1} (x^k + \omega_k d_k),$$

其中, $d_k = P_{C_k}(x^k) - x^k$.

同样, 我们可建立算法 3 的全局收敛定理.

定理 2.3 设 $\{x^k\}$ 是由算法 3 产生的迭代点列, 则 $\{x^k\}$ 收敛到问题(0.1)的一个解上. 在算法 3 中, 取 $\omega_k = 1$, 则得算法 3 的一个特例, 即如下算法:

算法 4 设 x^0 是任意给定的. 对 $k = 0, 1, \dots$, 计算

$$x^{k+1} := P_{Q_m} P_{Q_{m-1}} \cdots P_{Q_1} P_{C_k}(x^k).$$

3 应用(数值实验)

这一节, 我们通过几个例子来验证算法的可行性和有效性. 以下的实验均是在 Matlab 2010b 环境中完成的.

例 3.1 考虑一个典型的压缩传感场景: 从 m 个观测信号中恢复一个 n 维的信号, 由于电脑的存储限制, 我们测试中令 $n = 2^{11}$, $m = \frac{n}{4}$, 并且原始信号中包含 $k = \frac{n}{8}$ 个随机的非零元素. 矩阵 A 是一个高斯随机阵, 在实际应用中, 观测向量 b 一般是含噪的, 也就是:

$$b = A\bar{x} + \omega.$$

这里 ω 是一个高斯噪音 $N(0, \sigma^2 I)$, 我们选择 $\sigma^2 = 10^{-3}$, 我们是要从含噪的观测信号 b 中恢复出原始信号 \bar{x} . 分别用算法 1、算法 2、算法 3 进行操作实现, 参数选取为: $\omega_k = 1, \xi = 10^{-2}$, 初始点用 $\text{ones}(n, 1)$. 我们用相对误差 (RE) 来判断恢复质量, 也就是:

$$\text{RE} = \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \times 100\%.$$

从图 1 可以看出在右侧的对比图像中的圈可以把线条的顶端圈住, 说明 3 个算法的恢复效果都很好, 为了更好地将 3 个算法做比较, 我们从时间、迭代步、相对误差三个方面再做对比(表 1)

从恢复程度 RE 看, 算法 1 和算法 2 的恢复准确度更高, 而算法 3 的迭代步最少, 综合比较算法 1 是解决此类问题更为有效的方法.

例 3.2 在这个实验里, 我们测试一个 Shepp-Logan Phantom 图像, A 是对重建出的图像进行傅立叶变换, 再按采样轨道进行欠采样, 用它可以比用高斯随机矩阵处理更大规模的数据, 参数的选取同例 3.1 一样. 由于算法 2 和算法 3 不能处理这类型的矩阵 A , 所以这个实验仅使用算法 1 操作. 我们用相对误差 (RE) 和信噪比 (SNR) 两个指标对恢复效果进行评判, 其中:

$$\text{SNR} = 20 \times \log_{10} \left(\frac{\|\bar{x}\|}{\|x - \bar{x}\|} \right).$$

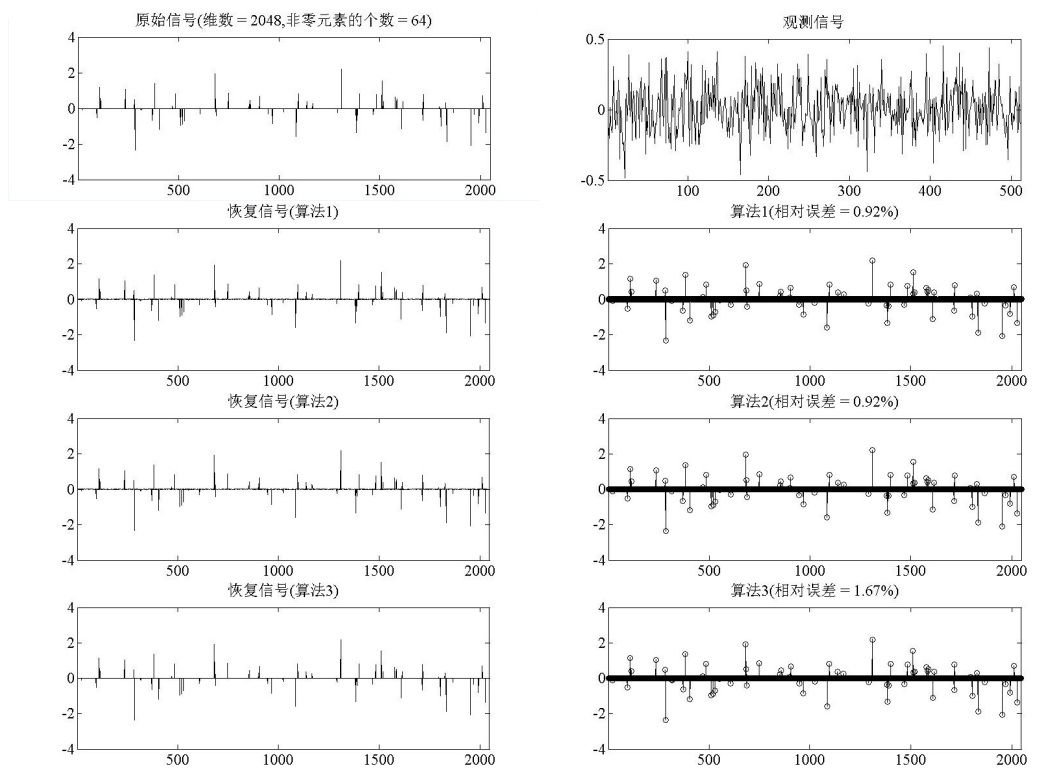


图1原始信号、观测信号、恢复信号、原始信号与恢复信号对比

表 1 3个算法的恢复结果

	时间	迭代步	相对误差
算法1	4.39	435	0.92
算法2	29.27	435	0.92
算法3	18.33	310	1.67

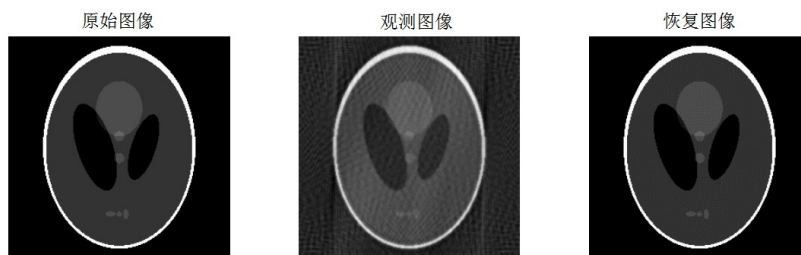


图2 shepp-Logan phantom 原图, 观测图, 恢复图

从图2可以看出算法1的恢复效果不错, 算法的具体结果放在了表2中.

例 3.3 这也是一个图像恢复的实验, 我们测试了 Lena 和 Cameraman 图像, 这里A是DFT变换, 观测值百分比为60%, 令 $\xi = 162.5$, 其余参数的选取同例 3.1 一样. 同样仅使用算法 1 操作. 从下面的图 3 可以看出算法 1 可以对不同的图像进行恢复.



图3 Lena, Cameraman 原图, 模糊图, 恢复图

进一步从时间、迭代步、相对误差(RE)和信噪比(SNR)四个方面做比较:

表 2 算法 1 的图像恢复结果

	时间	迭代步	SNR	RE
Phantom	15.99	388	25.24	5.47
Lena	5.82	220	17.42	13.46
Cameraman	10.68	481	16.36	15.21

从表 2 可以看出算法 1 对 Shepp-Logan phantom 图像的恢复效果最好, 对 Lena 和 Cameraman 图像恢复的也不错, 这些结果表明了算法 1 在稀疏信号恢复上的高效稳定.

利用本文所设计的松弛投影算法来解决信号处理中的 3 个较常用的例子, 来说明我们所设计算法的可行性和有效性, 正如前面所强调的, 我们在本文中所设计的算法的最突出的优点, 就是算法计算的简单性, 使得算法很容易得到执行.

4 结 论

本文我们对在信号处理等领域中有着重要应用的一类问题: 线性方程组的 l_1 范数问题进行了数值方法的研究, 在将其等价地转化为一个分裂可行问题和凸可行问题的基础上, 分别设计几种松弛投影算法来求解, 最后又通过数值实验来验证了所设计算法的可行性和有效性. 我们所设计的松弛投影算法与经典一些投影算法相比, 其优越性很显然: 1、它用半空间上的投影来代替到闭凸集上的投影, 大大简化了投影的计算量; 2、在计算

相关步长时,可直接利用迭代点的相关信息,有显式公式表示出来,而不再需要计算矩阵的逆或特征值、线性搜索等技巧来获得.

参 考 文 献

- [1] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**: 489-509.
- [2] Shen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM Rev*, 2001, **43**: 129 - 159.
- [3] Carmi A, Censor Y, Gurfil P. Convex feasibility modeling and projection methods for sparse signal recovery [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2012, **236**: 4318 - 4335.
- [4] Gafni E M, Bertsekas D P. Two-metric projection problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems [J]. *Math Programming*, 1984, **53**: 99-110.
- [5] He B S. A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities [J]. *Applied Mathematics & Optimization*, 1997, **35**: 69-76.
- [6] Solodov M V, Tseng P. Modified projection-type methods for monotone variational inequalities [J]. *SIAM J Control and Optimization*, 1996, **34**(5): 1814-1830.
- [7] Xiu N H, Zhang J Z. Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, **152**: 559-585.
- [8] Fukushima M. A relaxed projection method for variational inequalities [J]. *Math Programming*, 1986, **35**: 58-70.
- [9] Qu B, Xiu N H. A note on the CQ algorithm for the split feasibility problem [J]. *Inverse Problems*, 2005, **21**: 1655-1665.
- [10] Yang Q Z. The relaxed CQ algorithm solving the split feasibility problem [J]. *Inverse Problems*, 2004, **20**: 1261-1266.
- [11] Zarantonello E H. Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory [M]. *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, New York: Academic Press, 1971.
- [12] Boyd S, Vandenberghe L. *Convex optimization* [M]. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [13] Bertsekas D P, Nedić A, Ozdaglar A E. *Convex Analysis and Optimization* [M]. Nashua: Athena Scientific, 2003.
- [14] Rockafellar R T. *Convex Analysis* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1970.
- [15] Bauschke H H, Borwein J M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems [J]. *SIAM Review*, 1996, **38**: 367-426.
- [16] Censor Y, Elfving T. A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space [J]. *Numerical Algorithms*, 1994, **8**: 221-239.
- [17] Censor Y, Elfving T, Kopf N, et al. The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems [J]. *Inverse Problems*, 2005, **21**: 2071-2084.
- [18] Liu B H, Qu B, Zheng N. A successive projection algorithm for solving the multiple-sets split feasibility problem [J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2014, **35**: 1459-1466.
- [19] Qu B, Liu B H, Zheng N. On the computation of the step-size for the CQ-like algorithms for the split feasibility problem [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **262**: 218 - 223.
- [20] Yu L C, Qu B. A projection algorithm for compressive sensing [J]. *Operations Research and Fuzziology*, 2015, **5**: 1-5.