

## 基于特征根方法的 $M/G_N/1$ 个性化服务排队 顾客逗留时间分布函数的数值计算\*

邹雪华<sup>1</sup> 余妙妙<sup>1,†</sup> 唐应辉<sup>2</sup> 周杰<sup>3</sup>

**摘要** 以多语种便民服务热线为实际应用背景, 研究个性化服务  $M/G_N/1$  排队系统中顾客逗留时间分布函数的数值计算方法. 首先, 利用嵌入Markov链技术和Pollaczek-Khintchine变换公式给出顾客逗留时间的Laplace-Stieltjes(LS)变换. 其次, 根据个性化服务时间分布函数的具体类型, 给出上述LS变换的有理函数表达形式. 通过求解有理函数分母之具有负实部的零点, 即所谓的特征根, 最终使用部分分式分解方法和复分析中的留数理论给出顾客逗留时间的概率分布函数.

**关键词** 排队系统, 个性化服务, 逗留时间分布函数, 特征根, Padé逼近

**中图分类号** O213.2

**2010 数学分类号** 60K25, 90B22

## Calculation of the customer's sojourn time distribution function in $M/G_N/1$ queue with customized services using roots method\*

ZOU Xuehua<sup>1</sup> YU Miaomiao<sup>1,†</sup> TANG Yinghui<sup>2</sup> ZHOU Jie<sup>3</sup>

**Abstract** Taking the multilingual convenience service hotline for a practical example, we study the numerical method for calculating the customer's sojourn time distribution function in  $M/G_N/1$  queue with customized service. Firstly, we give the Laplace-Stieltjes (LS) transform of the customer's sojourn time by using the embedded Markov chain technique and Pollaczek-Khintchine formula. Secondly, according to the specific type of customized service time distribution function, we give the rational form of the LS transform that mentioned above. By solving the zeros with negative real parts of the denominator of the rational function, namely, the so-called characteristic roots, we finally

收稿日期: 2017-05-19

\* 基金项目: 国家自然科学基金(Nos. 71301111, 71571127, 71601135), 四川理工学院人才引进项目(No.2017RCL55), 四川理工学院研究生创新基金(No. y2016024)

1. 四川理工学院数学与统计学院, 四川自贡 643000; School of Mathematics and Statistics, Sichuan University of Science and Engineering, Zigong 643000, Sichuan, China

2. 四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610068; School of Mathematics & Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China

3. 四川师范大学商学院, 成都 610101; School of Business, Sichuan Normal University, Chengdu 610101, China

† 通信作者 E-mail: mmyu75@163.com

give the customer's sojourn time probability distribution function by using the method of partial fraction and residue theory.

**Keywords** queueing system, customized service, sojourn time distribution function, characteristic roots, Padé approximation

**Chinese Library Classification** O213.2

**2010 Mathematics Subject Classification** 60K25, 90B22

## 0 引言

在经典的 $M/G/1$ 排队文献中<sup>[1-3]</sup>, 作者大都假设服务员向队列中等待服务的顾客提供单一类型的服务, 即每位顾客的服务时间均服从同一概率分布. 显然, 这样的模型假设与现实中的随机服务系统存在着一定偏差. 以北京警方与北京外国语大学 2014 年联合建立的多语言警务呼叫援助中心为例, 北京市公安局勤务指挥部依托 110 报警服务台和北京多语言服务中心两个平台, 建立 24 小时外语志愿者值守专席. 一线执勤民警在受理处置外国人求助报警过程中, 当外籍人士提出外语服务需求时, 由 110 接警中心将电话转接到多语言服务中心, 通过三方通话, 话机免提等方式实现外语志愿者为一线执勤民警和报警求助的外国人之间提供实时沟通与翻译交流的功能, 从而更加有效地帮助民警及时解决外国人遇到的困难. 目前类似的多语种便民服务系统已在国内许多城市如上海、成都等地得到了积极地推广和应用, 并面向广大外籍人士提供英、法、日、德、韩、俄、西、葡等语言服务, 成功拉动和促进了这些区域经济中心城市与国际间的无缝对接. 正是受到这样一种现实的随机服务系统的启发, 驱使我们对服务台具有多类型服务功能的排队系统展开详细研究. 众所周知, 顾客在排队系统中的逗留时间是衡量排队系统性能绩效的重要指标. 但在以往的文献中对这一指标的研究很多时候仅集中在逗留时间低阶原点矩的推导上<sup>[4-6]</sup>, 而鲜有文献从分布函数角度获取逗留时间更加精细的概率信息. 事实上, 在当前这样一个“时延敏感”的大环境下, 仅给顾客或用户提供粗糙的逗留时间均值和方差信息已远远不能满足他们对服务品质的诉求. 因此选择适当分析途径, 对上述具有个性化服务功能排队系统的顾客逗留时间分布函数给出相应数值求解方法, 在理论和实际应用中就显得十分必要了. 此外, 通过实地调研, 我们发现提供个性化服务的排队系统在备受民生关注的医疗卫生领域也屡见不鲜. 诸如协和、华西等大型国有三甲医院向病患提供的特需门诊服务, 核磁共振检查室向病人提供的针对不同部位或多个部位的医学影像扫描实际上都是因人而异的个性化服务. 为此, 在优质医疗资源极度紧张匮乏的当下, 研究顾客在个性化服务排队系统中的等待逗留时间问题, 对医疗资源的合理排程、调度、利用也具有不可小觑的意义. 以上述实际背景为支撑, 本文将利用近期 Chaudhry 和 Gupta 教授团队所提出的一种基于特征根和 Padé 逼近的性能指标反演方法来求解个性化服务队列中顾客的逗留时间分布函数, 以期全面解读顾客逗留时间这一随机变量的各种统计规律.

事实上在最近五年的时间内, 特征根方法和 Padé 逼近才作为一种简单而有效的手段被用于排队系统性能指标, 尤其是时间依赖性指标的分析中. 考虑到定长服务时间分布不具有有理函数形式的 LS 变换, Singh, Chaudhry, Gupta<sup>[7-8]</sup>利用 Padé 逼近给出了向量化有理函数形式的顾客逗留时间和等待时间的 LS 变换. 利用上述 LS 变换分母之具有负实部零点的数值结果, 他们分别考察了 MAP/D/1 和 MAP/D<sub>N</sub>/1 排队系统中顾客逗留时间和等待时间分布函数的反演计算方法. 进一步, 在假设系统服务时间具有有理函数形式的

LS 变换的前提下, 他们三人还根据向量形式的队长母函数, 利用特征根方法结合留数计算定理给出了一般批量服务规则下  $MAP/R^{(a,b)}/1$  排队的队长分布算法<sup>[9]</sup>. 最近, Pradhan 和 Gupta 还在结合经典嵌入 Markov 链和补充变量技术的基础上, 利用特征根方法在文献 [10-13] 中分别针对 Poisson 到达和批量 Poisson 到达过程, 研究了服务时间分布依赖于服务批量大小的排队系统的队长分布算法. 他们的研究大大提高了排队模型对现实问题描述的精准程度, 使数学分析更加贴近实际. 不仅如此, Gupta, Singh 和 Chaudhry 还从顾客到达间隔时间分布相依性的角度出发, 将研究工作拓展到更为一般的批量马氏到达过程(BMAP), 并在与传统方法的对比中突出了基于特征根方法和 Padé 逼近的分布反演方法的应用优势和潜力. 实事求是地讲, 国内学者对复分析方法和函数逼近论在排队领域中的应用探究得并不多. 我国排队理论奠基人徐光辉先生<sup>[14]</sup>在其早期经典著作《随机服务系统》中针对批量服务和优先权排队, 使用复分析技巧探讨过其稳态队长分布. 但书中关于顾客等待时间、逗留时间的量化分析偏少. 例如就  $GI/G/1$  排队系统顾客等待时间的讨论而言, 作者并未给出等待时间分布函数的具体数学表达式, 只是证明了分布函数所满足的一个积分方程. 而本文的研究则试图通过复分析技巧结合有理函数 Padé 逼近给出个性化服务排队系统中顾客逗留时间的概率分布函数的确切表达. 因此我们的研究工作不再只局限于指标低阶原点矩等数字特征的推导, 这是与现有研究最大的不同和区别.

文章余下内容分四个部分展开. 首先我们对所要研究的排队模型进行了全面描述, 并对行文中所使用的数学符号做出必要交代. 其次, 根据嵌入 Markov 链分析所得结果, 利用基于顾客逗留时间分布函数LS变换之特征根的部分分式展开方法和复分析中的留数理论, 介绍了顾客逗留时间分布函数的数值反演求解途径. 再次, 为进一步说明该数值求解途径的可行性, 文中针对个性化服务时间 LS 变换是否具有有理函数形式, 借助函数逼近论中的 Padé逼近给出了三个详实的数值算例. 最后对本文的研究方法做出总结, 并给出一些可以进一步拓展研究的新方向.

## 1 模型描述

本文考虑单服务台多类型服务的  $M/G_N/1$  排队系统. 为行文方便起见, 现将模型详细描述如下:

(1) 在该排队系统中顾客到达遵循参数为  $\lambda$  的 Poisson 过程, 即顾客的到达间隔时间独立同分布且分布函数为  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ ;

(2) 每一位到达系统的顾客会以概率  $p_i$  选择第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 种类型的服务, 其服务时间服从一般分布, 记分布函数为  $B_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $t \geq 0$ , 这里概率  $p_i$  满足  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ , 分布函数  $B_i(t)$  的均值和LS变换分别记为:

$$\frac{1}{\mu_i} = \int_0^{\infty} t dB_i(t), \quad B_i^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dB_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

(3) 进一步, 我们假定顾客到达间隔时间和服务时间相互独立.

## 2 逗留时间分布函数的数值算法

记 $N(t)$ 表示时刻 $t$ 系统中的顾客数量, 再记 $N_n^+$ 表示第 $n$ 个顾客服务完毕后离开系统时存留在系统中的顾客数, 则易知 $\{N_n^+, n \geq 1\}$ 是队长过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的嵌入 Markov 链. 类似于经典 $M/G/1$ 排队系统的分析, 上述嵌入 Markov 链 $\{N_n^+, n \geq 1\}$ 的转移概率矩阵可表示如下

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $a_k = \sum_{i=1}^N p_i \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB_i(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  令 $\frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\mu_i}$ , 当系统交通强度 $\rho = \lambda/\mu < 1$ 时,  $\{N_n^+, n \geq 1\}$ 是不可约、非周期、正常返的 Markov 链, 其平稳分布 $\boldsymbol{\pi}^+ = (\pi_0^+, \pi_1^+, \dots)$ 存在, 这里分量 $\pi_j^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{N_n^+ = j\}$ , 它代表稳态情形下离去时刻系统中顾客数为 $j$ 的概率, 此时概率向量 $\boldsymbol{\pi}^+$ 还应满足平衡方程 $\boldsymbol{\pi}^+ \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^+$ . 进一步, 设 $\pi^+(z)$ 为离去时刻队长分布的概率母函数, 则通过上述平衡方程经简单代数运算后可得

$$\pi^+(z) = \frac{\left[ \sum_{i=1}^N p_i B_i^*(\lambda(1-z)) \right] (1-\rho)(1-z)}{\left[ \sum_{i=1}^N p_i B_i^*(\lambda(1-z)) \right] - z}. \quad (2.1)$$

下面我们将借助(2.1)式来推导顾客逗留时间分布函数的 LS 变换. 注意到一个重要的事实, 即在统计平衡条件下, 顾客接受完服务离开系统时所存留在系统中的顾客数量应等于在该顾客逗留时间内到达系统的顾客数量. 若记逗留时间 $T$ 的概率分布函数为 $W(t) = \Pr \{T \leq t\}$ , 根据 Poisson 流的计数过程理论应有

$$\pi_j^+ = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dW(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

在(2.2)式两端同乘 $z^j$ , 再对 $j$ 从0到 $\infty$ 求和可得 $\pi^+(z) = W^*(\lambda(1-z))$ , 这里 $W^*(\lambda(1-z))$ 表示逗留时间分布函数 $W(t)$ 的LS变换在 $\lambda(1-z)$ 处的取值. 现今 $s = \lambda(1-z)$ 则有

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)s \left[ \sum_{i=1}^N p_i B_i^*(s) \right]}{s - \lambda \left[ 1 - \sum_{i=1}^N p_i B_i^*(s) \right]}. \quad (2.3)$$

Botaa<sup>[15]</sup>指出, 大量排队文献研究表明顾客服务时间分布函数的 LS 变换通常具有有理函数形式, 例如当服务时间服从指数、Erlang、超指数及位相型(phase-type)分布时其对应的 LS 变换均具有有理函数形式. 另一方面, 即使服务时间分布函数的 LS 变换不具有有理函数形式时, 如当服务时间服从 Weibull、Gamma、截断正态等分布时, 我们仍然

可以使用 Padé逼近找到这些分布函数的 LS 变换所对应的有理函数形式. 也就是说, 此时逗留时间分布函数 LS 变换中的  $\sum_{i=1}^N p_i B_i^*(s)$  一定可以通过适当途径表示成如下形式:

$$\sum_{i=1}^N p_i B_i^*(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (2.4)$$

其中  $P(s)$  和  $Q(s)$  是次数分别为  $l_1$  和  $l_2$  的有理系数多项式, 且  $l_1 \leq l_2$ . 将(2.4)式代入(2.3)式, 整理后即有

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)sP(s)}{sQ(s) - \lambda[Q(s) - P(s)]}. \quad (2.5)$$

为了从(2.5)式反演出逗留时间的分布函数, 我们需要知道其相应的 LS 变换分母的零点信息. 具体来说, 由于概率分布函数的有界性, 我们要特别关注这些零点中具有负实部的零点, 即所谓  $W^*(s)$  的特征根<sup>[16]</sup>. 之后, 再在此基础上使用部分分式分解技巧以及复分析中的留数理论最终得到分布函数的数值表达. 考虑到  $l_2 + 1$  次的代数方程  $sQ(s) - \lambda[Q(s) - P(s)] = 0$  在求解过程中可能会出现重根, 因此我们分如下两种情况来讨论  $W^*(s)$  的 Laplace 逆变换.

**情形 1** 若方程  $sQ(s) - \lambda[Q(s) - P(s)] = 0$  的根均为单根. 此时假设  $l_2 + 1$  个单根中有  $l$  个实部为负的单根  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ . 利用这些单根将(2.5)式进行部分分式分解后可得

$$W^*(s) = c_0 + \sum_{i=1}^l \frac{c_i}{s - \alpha_i}, \quad (2.6)$$

这里  $c_0, c_1, \dots, c_l$  为待定常数. 依据(2.6)式所得结果可以方便的反演出逗留时间概率密度函数  $w(t)$

$$w(t) = c_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^l c_i e^{\alpha_i t},$$

其中  $\delta(t)$  表示狄拉克  $\delta$  函数. 进一步, 由狄拉克  $\delta$  函数的筛选性质可得

$$W(t) = \int_0^t w(x) dx = \int_0^t c_0 \delta(x) dx + \int_0^t \sum_{i=1}^l c_i e^{\alpha_i x} dx = c_0 + \sum_{i=1}^l \left[ \frac{c_i}{\alpha_i} e^{\alpha_i t} - \frac{c_i}{\alpha_i} \right]. \quad (2.7)$$

注意到  $W^*(0) = 1$ , 故上式中常数  $c_0 = 1 + \sum_{i=1}^l \frac{c_i}{\alpha_i}$ . 将  $c_0$  代入(2.7)式化简后即有概率分布函数

$$W(t) = 1 + \sum_{i=1}^l \left[ \frac{c_i}{\alpha_i} e^{\alpha_i t} \right]. \quad (2.8)$$

由(2.8)式易知, 确定分布函数  $W(t)$  数值表达式的关键在于确定常数  $c_1, c_2, \dots, c_l$  的取值. 因  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  可视为  $W^*(s)$  的一级极点, 故根据留数计算规则  $c_i (i = 1, 2, \dots, l)$  可由如下公式确定

$$c_i = \frac{(1-\rho)\alpha_i P(\alpha_i)}{Q(\alpha_i) + \alpha_i Q'(\alpha_i) - \lambda[Q'(\alpha_i) - P'(\alpha_i)]}, \quad (2.9)$$

这里  $Q'(\alpha_i)$  和  $P'(\alpha_i)$  代表多项式函数  $Q(s)$  和  $P(s)$  的一阶导数在  $\alpha_i$  处的取值.

**情形 2** 若方程  $sQ(s) - \lambda[Q(s) - P(s)] = 0$  的根中存在重根. 不妨假设在总共的  $l_2 + 1$  个根中有  $k$  个实部为负的重根, 记为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , 它们的重数分别为  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , 其中  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = l$ , 且  $r_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, k)$ . 同情形 1 类似, 利用这些重根将 (2.5) 式进行部分分式分解可得

$$W^*(s) = m_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{m_{ij}}{(s - \alpha_i)^j}, \quad (2.10)$$

这里  $m_0, m_{ij} (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, r_i)$  为待定常数. 同理依据 (2.10) 式反演出逗留时间分布的概率密度函数  $w(t)$

$$w(t) = m_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{m_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\alpha_i t}.$$

进一步, 利用如下一个重要的关系式

$$\int_0^t \frac{(-\alpha_i)(-\alpha_i x)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-(\alpha_i x)} dx = \int_0^t \frac{x^{j-1} e^{\alpha_i x}}{(j-1)!} (-\alpha_i)^j dx = 1 - e^{\alpha_i t} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(-\alpha_i t)^n}{n!},$$

对  $w(t)$  积分, 由狄拉克  $\delta$  函数的筛选性质可得

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^t w(x) dx \\ &= \int_0^t m_0 \delta(x) dx + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \int_0^t \frac{m_{ij}}{(j-1)!} x^{j-1} e^{\alpha_i x} dx \\ &= m_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \left[ \frac{m_{ij}}{(-\alpha_i)^j} - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{m_{ij} (-\alpha_i t)^n e^{\alpha_i t}}{(-\alpha_i)^j n!} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

再次由  $W^*(0) = 1$  可知  $m_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{m_{ij}}{(-\alpha_i)^j}$ . 将  $m_0$  代入上述 (2.11) 式中化简可求得概率分布函数

$$W(t) = 1 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{m_{ij} (-\alpha_i t)^n e^{\alpha_i t}}{(-\alpha_i)^j n!}. \quad (2.12)$$

为求得 (2.12) 式分布函数的数值表达式关键在于确定常数  $m_{ij}$  的取值. 将  $\alpha_i (i = 1, \dots, k)$  视为  $W^*(s)$  的极点, 根据留数理论中  $j$  级极点的计算规则可给出如下关于系数  $m_{ij}$  的计算公式

$$m_{ij} = \frac{1}{(r_i - j)!} \lim_{x \rightarrow \alpha_i} \left[ \frac{d^{r_i - j}}{dx^{r_i - j}} W^*(x) (x - \alpha_i)^{r_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, r_i. \quad (2.13)$$

### 3 数值实验

为展示本文第三节关于顾客逗留时间分布函数的算法应用, 我们借助常用数值计算软件 Mathematica 10.3 给出三个详细的数值算例. 进一步, 在下述各算例中我们均约定顾客的到达间隔时间服从参数为  $\lambda = 2$  的指数分布. 鉴于文章篇幅限制, 实验中所产生的各种数据均保留至 6 位小数.

**算例1** 假设系统中服务员能根据顾客要求向其提供5种不同类型的服务,且顾客分别以 $p_1 = 5/12, p_2 = 1/4, p_3 = 1/6, p_4 = 1/8$ 和 $p_5 = 1/24$ 的概率选择5种服务类型中的一种.这里,5种类型所对应的服务时间分布分别服从参数为12,10,8,7,4的二阶、三阶、四阶、五阶及六阶Erlang分布,即它们具有如下的概率分布函数:

$$\begin{aligned} B_1(t) &= 1 - \sum_{k=0}^1 \frac{(12t)^k}{k!} e^{-12t}, t \geq 0, & B_2(t) &= 1 - \sum_{k=0}^2 \frac{(10t)^k}{k!} e^{-10t}, t \geq 0, \\ B_3(t) &= 1 - \sum_{k=0}^3 \frac{(8t)^k}{k!} e^{-8t}, t \geq 0, & B_4(t) &= 1 - \sum_{k=0}^4 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0, \\ B_5(t) &= 1 - \sum_{k=0}^5 \frac{(4t)^k}{k!} e^{-4t}, t \geq 0, \end{aligned}$$

且均值分别为 $\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{6}, \frac{1}{\mu_2} = \frac{3}{10}, \frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{2}, \frac{1}{\mu_4} = \frac{5}{7}$ 和 $\frac{1}{\mu_5} = \frac{3}{2}$ .在上述条件下该系统的交通强度 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.759127$ .将5种服务时间分布的LS变换及服务类型选择概率 $p_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 代入(2.4)式,经Mathematica 10.3运算化简后可得

$$\begin{aligned} P(s) &= 974\,504\,457\,142\,272\,000 + 2\,729\,965\,958\,411\,059\,200s + 3\,608\,410\,507\,779\,768\,320s^2 \\ &\quad + 2\,983\,578\,568\,149\,172\,224s^3 + 1\,727\,150\,228\,477\,313\,024s^4 + 742\,860\,136\,076\,541\,952s^5 \\ &\quad + 245\,954\,156\,360\,269\,824s^6 + 64\,090\,952\,698\,085\,376s^7 + 13\,325\,259\,963\,744\,256s^8 \\ &\quad + 2\,227\,179\,579\,047\,936s^9 + 299\,981\,829\,006\,592s^{10} + 32\,485\,311\,382\,528s^{11} \\ &\quad + 2\,807\,436\,552\,472s^{12} + 191\,003\,896\,460s^{13} + 10\,005\,315\,206s^{14} \\ &\quad + 389\,380\,373s^{15} + 10\,602\,064s^{16} + 180\,240s^{17} + 1\,440s^{18}; \\ Q(s) &= 24(4+s)^6(7+s)^5(8+s)^4(10+s)^3(12+s)^2. \end{aligned}$$

现将多项式 $P(s)$ 与 $Q(s)$ 代入(2.5)式后即得 $W^*(s)$ 的具体解析表达式.利用 Mathematica 10.3 中 Solve 命令计算可知 $W^*(s)$ 分母具有 21 个单根,其中有20个实部为负的单根,我们将其分别记为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}$ ,各根的具体值如表 1 所示,表中 $i = \sqrt{-1}$ ,它表示虚数单位.

表 1  $W^*(s)$ 20个特征根的数值计算结果

$j$	$\alpha_j$	$j$	$\alpha_j$	$j$	$\alpha_j$	$j$	$\alpha_j$
1	-14.346 761	6	-11.030 746+2.280 004i	11	-7.647 572-0.411 801i	16	-5.066 039+0.401 942i
2	-11.289 496	7	-9.134 473-0.471 222i	12	-7.647 572+0.411 801i	17	-4.571 864-1.368 600i
3	-7.600 680	8	-9.134 473+0.471 222i	13	-6.221 259-3.041 430i	18	-4.571 864+1.368 600i
4	-0.622 661	9	-8.198 641-2.223 028i	14	-6.221 259+3.041 430i	19	-2.699 607-1.667 630i
5	-11.030 746-2.280 004i	10	-8.198 641+2.223 028i	15	-5.066 039-0.401 942i	20	-2.699 607+1.667 630i

由表 1 可知此算例与节二中情形1的分析是吻合的,由(2.9)式计算可得 $c_j (j = 1, 2, \dots, 20)$ 各值如表 2 所示.

表 2  $W(t)$ 中待定系数 $c_j$ 的数值计算结果

$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$
1	-1.791 654	6	-0.043 670+0.505 632i	11	-0.002 060-0.000 111i	16	0.002 963+0.002 294i
2	0.015 065	7	0.001 467-0.003 559i	12	-0.002 060+0.000 111i	17	0.013 847-0.025 562i
3	-0.001 122	8	0.001 467+0.003 559i	13	0.345 635-0.339 667i	18	0.013 847+0.025 562i
4	0.600 040	9	0.098 280-0.115 496i	14	0.345 635+0.339 667i	19	0.170 747+0.086 448i
5	-0.043 670-0.505 632i	10	0.098 280+0.115 496i	15	0.002 963-0.002 294i	20	0.170 747-0.086 448i

明显, 将表1与表2中的数值结果代入(2.8)式计算后会发现, 此时顾客逗留时间分布函数表达式中出现了复系数, 这与概率论中传统意义上随机变量分布函数的表达形式相去甚远. 为了规避这种形式上的异常, 我们采用复分析中的 Euler 公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 将分布函数用实系数的指数及正、余弦函数加以表示, 最终给出如下关于  $W(t)$  的解析表达

$$\begin{aligned}
W(t) = & 1 + 0.124\ 882e^{-14.346\ 761t} - 0.001\ 334e^{-11.289\ 496t} \\
& + 0.000\ 148e^{-7.600\ 679t} - 0.963\ 670e^{-0.622\ 661t} \\
& + 2[0.000\ 269e^{-7.647\ 572t} \cos(0.411\ 801t) \\
& + e^{-5.066\ 039t}(-0.000\ 545 \cos(0.401\ 942t) + 0.000\ 496 \sin(0.401\ 942t)) \\
& + e^{-9.134\ 473t}(-0.000\ 140 \cos(0.471\ 222t) + 0.000\ 397 \sin(0.471\ 222t)) \\
& + e^{-4.571\ 864t}(-0.001\ 244 \cos(1.368\ 600t) + 0.005\ 963 \sin(1.368\ 600t)) \\
& + e^{-2.699\ 607t}(-0.060\ 097 \cos(1.667\ 630t) + 0.005\ 102 \sin(1.667\ 630t)) \\
& + e^{-8.198\ 641t}(-0.007\ 608 \cos(2.223\ 028t) + 0.016\ 150 \sin(2.223\ 028t)) \\
& + e^{-11.030\ 746t}(0.012\ 886 \cos(2.280\ 004t) + 0.043\ 175 \sin(2.280\ 004t)) \\
& + e^{-6.221\ 260t}(-0.023\ 297 \cos(3.041\ 430t) + 0.065\ 987 \sin(3.041\ 430t))].
\end{aligned}$$

**算例2** 假设系统中服务员能根据顾客要求向其提供 3 种不同类型的服务, 且顾客分别以  $p_1 = 1/2$ ,  $p_2 = 1/3$  和  $p_3 = 1/6$  的概率选择 3 种服务类型中的一种. 这三种服务时间概率密度函数对应如下:

$$f_1(t) = \frac{2}{0.3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2 \times 0.09}}, t \geq 0, \quad f_2(t) = \frac{2}{0.7\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2 \times 0.49}}, t \geq 0, \quad f_3(t) = \frac{2}{0.9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2 \times 0.81}}, t \geq 0.$$

事实上, 上述三种服务时间分布是均值全为 0, 方差分别为  $\sigma_1^2 = 0.09$ ,  $\sigma_2^2 = 0.49$ ,  $\sigma_3^2 = 0.81$  的正态分布的截断分布. 此时, 该系统的交通强度  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.851\ 077$ . 由于上述截断正态分布的 LS 变换不具备有理函数形式, 综合考虑数值计算精度的要求, 通过求解这三种分布各自的前 11 阶原点矩, 我们先使用形式为 [5/6] 的 Padé 逼近找到每个分布函数的 LS 变换所对应的有理函数形式, 这里符号 [5/6] 表示 Padé 逼近中分子是关于  $s$  的 5 次多项式, 而分母是关于  $s$  的 6 次多项式.

$$\begin{aligned}
\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} &= \frac{1 + 0.231\ 207s + 0.028\ 170s^2 + 0.001\ 901s^3 + 0.000\ 072s^4 + 1.175\ 655 \times 10^{-6}s^5}{1 + 0.470\ 572s + 0.095\ 809s^2 + 0.010\ 839s^3 + 0.000\ 722s^4 + 0.000\ 027s^5 + 4.428\ 194 \times 10^{-7}s^6}; \\
\frac{P_2(s)}{Q_2(s)} &= \frac{1 + 0.539\ 482s + 0.153\ 372s^2 + 0.024\ 143s^3 + 0.002\ 127s^4 + 0.000\ 081s^5}{1 + 1.098\ 001s + 0.521\ 626s^2 + 0.137696s^3 + 0.021\ 387s^4 + 0.001\ 862s^5 + 0.000\ 072s^6}; \\
\frac{P_3(s)}{Q_3(s)} &= \frac{1 + 0.693\ 620s + 0.253\ 533s^2 + 0.051\ 314s^3 + 0.005\ 812s^4 + 0.000\ 286s^5}{1 + 1.411\ 716s + 0.862\ 280s^2 + 0.292\ 655s^3 + 0.058\ 442s^4 + 0.006\ 543s^5 + 0.000\ 323s^6}.
\end{aligned}$$



将 LS 变换的有理函数形式及其所对应的服务类型选择概率  $p_i (i = 1, 2, 3)$  代入(2.4)式, 化简后可得

$$\begin{aligned} P(s) = & 9.788\ 853 \times 10^{13} + 2.500\ 807 \times 10^{14}s + 3.048\ 466 \times 10^{14}s^2 \\ & + 2.348\ 261 \times 10^{14}s^3 + 1.276\ 946 \times 10^{14}s^4 + 5.189\ 651 \times 10^{13}s^5 \\ & + 1.628\ 721 \times 10^{13}s^6 + 4.023\ 885 \times 10^{12}s^7 + 7.909\ 183 \times 10^{11}s^8 \\ & + 1.242\ 150 \times 10^{11}s^9 + 1.557\ 313 \times 10^{10}s^{10} + 1.549\ 326 \times 10^9s^{11} \\ & + 1.208\ 736 \times 10^8s^{12} + 7.248\ 505 \times 10^6s^{13} + 323\ 180.522\ 064s^{14} \\ & + 10\ 114.393\ 670s^{15} + 199.000\ 998s^{16} + 1.854\ 238s^{17}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(s) = & 9.788\ 853 \times 10^{13} + 2.917\ 361 \times 10^{14}s + 4.121\ 873 \times 10^{14}s^2 \\ & + 3.666\ 375 \times 10^{14}s^3 + 2.299\ 332 \times 10^{14}s^4 + 1.078\ 924 \times 10^{14}s^5 \\ & + 3.922\ 833 \times 10^{13}s^6 + 1.129\ 173 \times 10^{13}s^7 + 2.606\ 600 \times 10^{12}s^8 \\ & + 4.858\ 076 \times 10^{11}s^9 + 7.322\ 915 \times 10^{10}s^{10} + 8.902\ 121 \times 10^9s^{11} \\ & + 8.660\ 745 \times 10^8s^{12} + 6.652\ 634 \times 10^7s^{13} + 3.948\ 274 \times 10^6s^{14} \\ & + 174\ 897.216\ 257s^{15} + 5\ 454.727\ 314s^{16} + 107.131\ 628s^{17} + s^{18}. \end{aligned}$$

继而将  $P(s)$  与  $Q(s)$  代入(2.5)式后可得  $W^*(s)$  的具体数值解析表达式. 再利用 Mathematica 10.3 中 Solve 命令可知  $W^*(s)$  分母具有 19 个单根, 其中有 18 个实部为负的单根, 我们将其记为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{18}$ , 其结果如表 3 所示.

表 3  $W^*(s)$  18 个特征根的数值计算结果

$j$	$\alpha_j$	$j$	$\alpha_j$	$j$	$\alpha_j$
1	-13.498 720	7	-6.153 209+0.963 524i	13	-3.773 321+0.585 255i
2	-11.174 145-5.888 456i	8	-4.697 577-2.880 774i	14	-3.467 864-1.745 791i
3	-11.174 145+5.888 456i	9	-4.697 577+2.880 774i	15	-3.467 864+1.745 791i
4	-9.326 209-8.117 249i	10	-3.903 610-3.417 033i	16	-3.134 519-2.694 234i
5	-9.326 209+8.117 249i	11	-3.903 610+3.417 033i	17	-3.134 519+2.694 234i
6	-6.153 209-0.963 524i	12	-3.773 321-0.585 255i	18	-0.372 001

由表 3 可知此算例仍与节三中情形 1 的分析是吻合的, 由(2.9)式计算可得  $c_j (j = 1, \dots, 18)$  各值如表 4 所示.

表 4  $W(t)$ 中待定系数 $c_j$ 的数值计算结果

$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$
1	-1.110 033	7	0.213 074+0.211 178i	13	0.005 040 58+0.004 004 1i
2	-0.127 550-0.858 193i	8	0.093 305-0.206 673i	14	0.007 963 59-0.018 077 6i
3	-0.127 550+0.858 193i	9	0.093 305+0.206 673i	15	0.007 963 59+0.018 077 6i
4	0.227 457+0.153 675i	10	0.068 925 6+0.082 136 8i	16	0.015 394+0.017 977 3i
5	0.227 457-0.153 675i	11	0.068 925 6-0.082 136 8i	17	0.015 394-0.017 977 3i
6	0.213 074-0.211 178i	12	0.005 040 58-0.004 004 1i	18	0.378 951

类似算例 1 中的处理方法, 此时分布函数 $W(t)$ 可用实系数的指数及正、余弦函数加以表示

$$\begin{aligned}
 W(t) = & 1 - 1.018\ 682e^{-0.372\ 001t} + 0.082\ 233e^{-13.498\ 720t} \\
 & + 2[e^{-11.174\ 145t}(0.040\ 610 \cos(5.888\ 456t) + 0.055\ 402 \sin(5.888\ 456t)) \\
 & + e^{-9.326\ 209t}(-0.022\ 037 \cos(8.117\ 249t) + 0.002\ 702 \sin(8.117\ 249t)) \\
 & + e^{-6.153\ 209t}(-0.028\ 554 \cos(0.963\ 524t) + 0.038\ 791 \sin(0.963\ 524t)) \\
 & + e^{-4.697\ 577t}(0.005\ 173 \cos(2.880\ 774t) + 0.040\ 824 \sin(2.880\ 774t)) \\
 & + e^{-3.903\ 610t}(-0.020\ 425 \cos(3.417\ 033t) + 0.003\ 162 \sin(3.417\ 033t)) \\
 & + e^{-3.773\ 321t}(-0.001\ 144 \cos(0.585\ 255t) + 0.001\ 239 \sin(0.585\ 255t)) \\
 & + e^{-3.467\ 864t}(0.000\ 262 \cos(1.745\ 791t) + 0.005\ 081 \sin(1.745\ 791t)) \\
 & + e^{-3.134\ 519t}(-0.005\ 660 \cos(2.694\ 234t) + 0.000\ 871 \sin(2.694\ 234t))].
 \end{aligned}$$

**算例 3** 假设系统中服务员能根据顾客要求向其提供 8 种不同类型的服务, 且每个需要服务的顾客分别以 $p_1 = 1.624\ 098 \times 10^{-14}$ ,  $p_2 = 0.750\ 752$ ,  $p_3 = 0.217\ 637$ ,  $p_4 = 0.029\ 282\ 6$ ,  $p_5 = 0.002\ 226\ 82$ ,  $p_6 = 0.000\ 098\ 696\ 8$ ,  $p_7 = 2.387\ 801 \times 10^{-6}$ 和 $p_8 = 2.444\ 813 \times 10^{-8}$ 的概率选择这 8 种服务类型中的一种. 这里, 8 种类型所对应的服务时间分布分别服从参数均为 7 的一阶、二阶、三阶、四阶、五阶、六阶、七阶和八阶的 Erlang 分布, 即它们具有如下的概率分布函数:

$$\begin{aligned}
 B_1(t) &= 1 - e^{-7t}, t \geq 0, & B_2(t) &= 1 - \sum_{k=0}^1 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0, \\
 B_3(t) &= 1 - \sum_{k=0}^2 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0, & B_4(t) &= 1 - \sum_{k=0}^3 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0, \\
 B_5(t) &= 1 - \sum_{k=0}^4 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0, & B_6(t) &= 1 - \sum_{k=0}^5 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0, \\
 B_7(t) &= 1 - \sum_{k=0}^6 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0, & B_8(t) &= 1 - \sum_{k=0}^7 \frac{(7t)^k}{k!} e^{-7t}, t \geq 0,
 \end{aligned}$$

且均值分别为 $\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{7}$ ,  $\frac{1}{\mu_2} = \frac{2}{7}$ ,  $\frac{1}{\mu_3} = \frac{3}{7}$ ,  $\frac{1}{\mu_4} = \frac{4}{7}$ ,  $\frac{1}{\mu_5} = \frac{5}{7}$ ,  $\frac{1}{\mu_6} = \frac{6}{7}$ ,  $\frac{1}{\mu_7} = 1$ 和 $\frac{1}{\mu_8} = \frac{8}{7}$ . 在上述条件下系统的交通强度 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.652\ 369$ . 将 8 种服务时间分布的 LS 变换及服务类型选

择概率  $p_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  代入(2.4)式, 经 Mathematica 10.3 运算化简后可得

$$P(s) = 5.764\ 801 \times 10^6 + 4.707\ 956 \times 10^6 s + 1.602\ 395 \times 10^6 s^2 + 290\ 942.138\ 907 s^3 \\ + 29\ 721.378\ 095 s^4 + 1\ 619.697\ 241 s^5 + 36.786\ 848 s^6 + 1.136\ 868 \times 10^{-13} s^7; \\ Q(s) = (s + 7)^8.$$

继而将  $P(s)$  与  $Q(s)$  代入(2.5)式后可得  $W^*(s)$  的具体数值解析表达式. 再利用 Mathematica 10.3 中 NSolve 命令可知  $W^*(s)$  分母具有 8 个根. 其中  $\alpha_1 = -7.353\ 588$  与  $\alpha_2 = -1.502\ 076$  是单根, 而  $\alpha_3 = -7.524\ 056$  是六重根. 与情形 2 类似, 将  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  代入(2.13)式可知系数  $m_{11}$ ,  $m_{21}$  及  $m_{3j} (j = 1, \dots, 6)$  的数值结果如表 5.

表 5  $W(t)$  中特定系数  $m_{ij}$  的数值计算结果

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$i = 1$	-2.765 961	-	-	-	-	-
$i = 2$	1.820 960	-	-	-	-	-
$i = 3$	0.945 000	2.293 986	-1.024 748	0.424 300	-0.085 668	0.009 174

将上述  $m_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6)$  代入(2.12)式, 可知顾客的逗留时间分布函数为:

$$W(t) = 1 - 0.163\ 842e^{-7.524\ 056t} + 0.376\ 138e^{-7.353588t} - 1.212\ 296e^{-1.502\ 076t} \\ - 0.287\ 755te^{-7.524\ 056t} + 0.064\ 449\ 8t^2e^{-7.524\ 056t} - 0.009\ 150\ 11t^3e^{-7.524\ 056t} \\ + 0.000\ 467\ 66t^4e^{-7.524\ 056t} - 0.000\ 010\ 160\ 5t^5e^{-7.524\ 056t}, t \geq 0.$$

最后, 为直观起见我们在图 1 中绘制了顾客逗留时间分布函数的图像, 从图中可见当  $t \rightarrow \infty$  时分布函数  $W(t)$  的取值趋近于 1, 这与事实是完全吻合的.

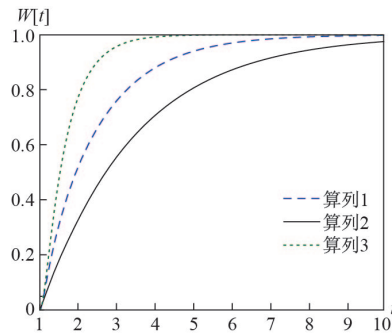


图1 算例 1、算例 2 与算例 3 中顾客逗留时间分布函数的图像

## 4 结论

文章将排队模型分析中的两种典型分析方法, 即嵌入 Markov 链和 LS 变换方法与复分析中的某些处理技巧及数值逼近中的 Padé 逼近相结合, 利用有理函数形式的顾客逗留

时间 LS 变换, 巧妙借助“基于分母特征根”的变换反演思想成功探索了求解个性化服务排队系统中顾客逗留时间分布函数的数值途径. 值得一提的是, 本文的研究工作不再仅仅只将注意力停留在系统关键性能指标的低阶原点矩等数字特征的理论推导上, 而是充分利用分母特征根的数值结果给出顾客逗留时间分布函数的较为精准的数值估计. 毫无疑问, 这会使人们更加全面完整地掌握随机服务系统中顾客逗留时间指标的各种概率信息, 从而为现实中系统的管理决策过程提供更加详尽可靠的量化依据. 因此, 不论从实用性角度看还是从理论性角度看本文的研究都具有重要意义. 此外, 延续本文的分析思路, 我们认为还可将顾客的到达过程从 Poisson 流推广到更加一般的 Markovian Arrival Process (MAP), 研究具有马氏到达过程的个性化服务排队系统中顾客逗留时间的概率分布.

## 参考文献

- [1] 唐应辉, 唐小我. 排队论: 基础与分析技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] Doshi B. Queueing systems with vacations—a survey [J]. *Queueing Systems*, 1986, **1**(1): 29-66.
- [3] Chaudhry M L, Templeton J G C. *A First Course in Bulk Queues* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [4] 唐应辉, 兰绍军.  $N$ -策略与  $\text{Min}(N, V)$ -策略的  $M/G/1/\infty$  排队系统等待时间的随机分解结构 [J]. *系统工程理论与实践*, 2016, **36**(1): 174-183.
- [5] Li J H. Analysis of the discrete-time Geo/G/1 working vacation queue and its application to network scheduling [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, **65**(4): 594-604.
- [6] Gao S, Liu Z M. An  $M/G/1$  queue with single working vacation and vacation interruption under Bernoulli schedule [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, **37**(3): 1564-1579.
- [7] Singh G, Chaudhry M L, Gupta U C. Computing system-time and system length distributions for MAP/D/1 queue using distributional Little's law [J]. *Performance Evaluation*, 2012, **69**(2): 102-118.
- [8] Singh G, Gupta U C, Chaudhry M L. Analysis of queueing-time distributions for MAP/ $D_N$ /1 queue [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2014, **91**(9): 1911-1930.
- [9] Singh G, Gupta U C, Chaudhry M L. Computational analysis of bulk service queue with Markovian arrival process MAP/ $R^{(a,b)}/1$  queue [J]. *Opsearch*, 2013, **50**(4): 582-603.
- [10] Pradhan S, Gupta U C, Samanta S K. Queue-length distribution of a batch service queue with random capacity and batch size dependent service:  $M/G_r^Y/1$  [J]. *Opsearch*, 2016, **53**(2): 329-343.
- [11] Pradhan S, Gupta U C, Samanta S K. Analyzing an infinite buffer batch arrival and batch service queue under batch-size-dependent service policy [J]. *Journal of the Korean Statistical Society*, 2016, **45**(1): 137-148.
- [12] Pradhan S, Gupta U C. Modeling and analysis of an infinite-buffer batch arrival queue with batch-size-dependent service:  $M^X/G_n^{(a,b)}/1$  [J]. *Performance Evaluation*, 2017, **108**: 16-31.
- [13] Gupta U C, Singh G, Chaudhry M L. An alternative method for computing system-length distributions of BMAP/R/1 and BMAP/D/1 queues using roots [J]. *Performance Evaluation*, 2016, **95**: 60-79.
- [14] 徐光辉. 随机服务系统 [M]. 北京: 科学出版社, 1980.
- [15] Botta R F, Harris C M, Marchal W G. Characterization of generalized hyperexponential distribution functions [J]. *Stochastic Models*, 1987, **3**(1): 115-148.
- [16] Chaudhry M L, Singh G, Gupta U C. A simple and complete computational analysis of MAP/R/1 queue using roots [J]. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2013, **15**(3): 563-582.