

# 基于 $k$ 分辨-FB 级数展开的多分量 LFM 信号分离

何其芳<sup>1</sup>, 张 群<sup>1</sup>, 罗 迎<sup>1</sup>, 梁必帅<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学信息与导航学院, 西安, 710077; 2. 边防学院, 西安, 710108)

**摘要** 针对傅里叶-贝塞尔变换(FBT)难以估计和有效分离多分量 LFM 信号的问题,提出了一种  $k$  分辨-FB ( $k$ -FB)级数展开结合 dechirp 的信号分离与估计算法。在 FB 级数的基础上引入  $k$  分辨参数,通过理论推导,得出了信号频率与级数的关系,证明了参数估计精度与  $k$  取值正相关。通过解线频调和  $k$ -FB 级数计算,实现了信号分离重构和参数估计。在不同信噪比、信号功率比和  $k$  分辨条件下对信号的分离精度进行了仿真研究,并与基于分数阶傅里叶变换(FrFT)的方法进行了对比。仿真结果验证了算法的有效性。

**关键词**  $k$  分辨-FB 级数;多分量 LFM 信号;分离重构;参数估计

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2017.04.011

**中图分类号** TN971.1 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2017)04-0060-06

## Multi-component LFM Signal Separation Based on $k$ -FB Series Expansion

HE Qifang<sup>1</sup>, ZHANG Qun<sup>1</sup>, LUO Ying<sup>1</sup>, LIANG Bishuai<sup>2</sup>

(1. Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;  
2. Border Academy, Xi'an 710108, China)

**Abstract:** Aimed at the problems that parameters are very difficult to be estimated and multi-component LFM signals are difficult to be separated by using the Fourier-Bessel transform (FBT) algorithm, a new method based on  $k$ -resolution FB ( $k$ -FB) series in conjunction with the Dechirp technique is proposed. The  $k$ -resolution is introduced into the FB series, and the relationship between the frequency content and the order of  $k$ -FB series is derived. Meanwhile, the positive correlation between the  $k$ -resolution and the estimation precision is proved. With the Dechirp technique and the  $k$ -FB series expansion, multi-component signal separation and parameter estimation are both realized. The performance of the signal separation precision under various SNR conditions with different  $k$ -resolution and signal power ratios is simulated. Moreover, a performance comparison between the proposed method and the traditional fractional Fourier transform (FrFT) based method is also provided. The simulation results show that the method is valid.

**Key words:**  $K$ -FB series; multi-component LFM signals; separation and reconstruction; parameter estimation

随着大规模复杂雷达系统投入使用,电磁环境日益复杂,大量雷达脉冲交叠从而形成多分量雷达信号<sup>[1]</sup>,其中线性调频(Linear Frequency-Modulated,

LFM)信号作为一种大带宽信号在雷达领域得到了广泛的应用<sup>[2-3]</sup>。多分量 LFM 信号有效分离和参数估计作为雷达信号有效识别与参数提取的关键,在现代

**收稿日期:** 2017-02-20

**基金项目:** 国家自然科学基金(61571457,61471386);陕西省青年科技新星计划(2016KJXX-49)

**作者简介:** 何其芳(1993—),女,陕西西安人,硕士生,主要从事雷达信号处理研究。E-mail:qifanghe@163.com

**引用格式:** 何其芳,张群,罗迎,等. 基于  $k$  分辨-FB 级数展开的多分量 LFM 信号分离 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2017, 18(4): 60-65. HE Qifang, ZHANG Qun, LUO Ying, et al. Multi-component LFM Signal Separation Based on  $k$ -FB Series Expansion [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2017, 18(4): 60-65.

电子对抗侦察系统中受到越来越多的重视<sup>[4-5]</sup>。

目前,国内外学者采取了多种方法对多分量 LFM 信号的检测与分离问题进行研究,主要包含非参数化方法和参数化方法。非参数化方法主要基于时频分析进行。文献[6~7]采用基于 Wigner-Hough 变换(WHT)的算法对多分量 LFM 信号进行分离。Wigner 分布作为基于能量的时频分布其时频分辨率较高,但易受噪声干扰,且在处理多分量信号时存在交叉项,导致信号检测与分离结果不准确。为克服交叉项干扰并在更低信噪比(SNR)环境下完成信号分离,小波-Radon、Radon-STFT 等算法被引入多分量信号检测中<sup>[8-11]</sup>,并结合“CLEAN”算法完成信号分离。以上 2 种算法在一定程度上克服了交叉项干扰,但它们在低信噪比条件下的参数估计精度明显降低且分离精度不足。此外,分数阶傅里叶变换(Fractional Fourier Transform, FrFT)不会带来交叉项干扰,且能够实现对 LFM 信号的最佳能量聚集,因此也常被用于多分量信号的检测<sup>[12-16]</sup>。为提高信号的参数估计精度和分离精度,近年来,一种基于傅里叶-贝塞尔变换(Fourier-Bessel Transform, FBT)的参数化方法被引入语音信号处理中,此后,不少学者采用 FBT 进行多分量 LFM 信号分离<sup>[17-20]</sup>。然而,传统基于 FBT 的信号分离算法难以分离时频域交叠信号,且无法有效进行信号参数估计,同时由于变换定义本身决定了信号分离精度无法提高。

为在完成信号精确分离的同时实现参数估计,本文在 FBT 与 FB 级数基础上引入  $k$  分辨参数,提出  $k$  分辨-FB( $k$ -FB)级数这一定义,并结合解线频调(dechirp)设计一种时频域交叠多分量 LFM 信号估计与分离算法。该算法通过增大  $k$  值提高信号频率分辨率,并结合 dechirp 和逐次消去技术实现多分量信号的准确分离;最后与基于 FrFT 的信号分离算法进行对比仿真分析,结果表明所提算法在信号分离精度和低信噪比鲁棒性等方面具有明显优势。

## 1 $k$ -FB 级数及分析

### 1.1 FBT 与 FB 级数

在无限域上,FBT 将信号分解为无限个贝塞尔函数的加权和。信号的 FBT 及逆傅里叶-贝塞尔变换(Inverse FBT, IFBT)定义为<sup>[17]</sup>:

$$S(\omega) = 2\pi \int_0^{\infty} s(t) J_0(2\pi\omega t) t dt \quad (1)$$

$$s(t) = 2\pi \int_0^{\infty} S(\omega) J_0(2\pi\omega t) \omega d\omega \quad (2)$$

式中: $J_0(\cdot)$ 为第一类零阶贝塞尔函数。对于实际中的有限时域信号  $s(t)$ ,在区间 $[0, T]$ 上, $s(t)$ 相应

展开为贝塞尔函数集上的若干项 FB 级数:

$$s(t) = \sum_{m=1}^M C_m J_0\left(\frac{\lambda_m t}{T}\right) \quad (3)$$

式中: $\lambda_m$ 为  $J_0(t)=0$  的第  $m$  项升序正根。信号的第  $m$  项 FB 级数的数学意义表示为该信号在第  $m$  项贝塞尔函数基  $J_0(\lambda_m t/T)$  上的投影值, $s(t)$  的各项 FB 级数  $C_m$  计算为<sup>[21]</sup>:

$$C_m = \frac{\langle s(t), J_0\left(\frac{\lambda_m t}{T}\right) \rangle}{\langle J_0\left(\frac{\lambda_m t}{T}\right), J_0\left(\frac{\lambda_m t}{T}\right) \rangle} = \frac{2 \int_0^T t s(t) J_0\left(\frac{\lambda_m t}{T}\right) dt}{T^2 [J_1(\lambda_m)]^2} \quad (4)$$

式中: $m=(1, 2, \dots, M)$ 为 FB 级数项数; $J_1(\lambda_m)$ 为一阶贝塞尔函数在  $\lambda_m$  处的函数值。

### 1.2 关键性质分析

为明确 FB 级数参数与信号的关系,阐明进行 FB 级数展开时频率不可细分的原因并解决这一问题,从而进行更为精细的信号分离重构与参数估计,在 FB 级数的基础上引入  $k$  分辨参数,并将 2 个关键参数:级数项数、 $k$  分辨取值,分别与信号分离与估计精度的关系分析如下。

#### 1.2.1 级数项数与信号频率

由式(4)可知,FB 级数的定义即为通过内积运算得到的信号在各项贝塞尔函数上的投影值。已知 FB 级数的核函数为  $J_0(\lambda_m t/T)$ ,在此基础上将参数  $k$  引入该核函数中并对信号进行展开,计算  $k$ -FB 级数用以说明级数项数与信号频率的关系。

对于单频信号:

$$s(t) = A \cos(2\pi f t), t \in [0, T] \quad (5)$$

对其进行级数展开,得到信号展开的第  $m$  项  $k$ -FB 级数为:

$$C_m^k = \frac{2A}{k^2 T^2 J_1^2(\lambda_m)} \int_0^T t \cos(2\pi f t) J_0\left(\frac{\lambda_m t}{kT}\right) dt \quad (6)$$

由贝塞尔函数的积分性质<sup>[21]</sup>:

$$\int t J_0(t) dt = t J_1(t) \quad (7)$$

$$\int J_1(t) dt = -J_0(t) \quad (8)$$

则式(6)中积分项可化为:

$$\int_0^T t \cos(2\pi f t) J_0\left(\frac{\lambda_m t}{kT}\right) dt = \frac{k^2 T^2}{\lambda_m^2 - f_1^2} \left[ \lambda_m \cos(f_1) + 2\pi f \int_0^T J_0\left(\frac{\lambda_m t}{kT}\right) \sin(2\pi f t) dt \right] \quad (9)$$

式中: $f_1 = 2\pi k T f$ 。进一步地,由贝塞尔函数积分性质可将式(9)化为:

$$\int_0^T t \cos(2\pi f t) J_0\left(\frac{\lambda_m t}{kT}\right) dt = \frac{k^2 T^2 \lambda_m J_1(\lambda_m)}{(\lambda_m^2 - f_1^2)^2 + f_1^2} \left[ (\lambda_m^2 - f_1^2) \cos(f_1) + f_1 \sin(f_1) \right] \quad (10)$$

因此,信号  $s(t)$  的第  $m$  项  $k$ -FB 级数计算为:

$$C_m^k = \frac{2A\lambda_m}{J_1(\lambda_m)[(\lambda_m^2 - f_1^2)^2 + f_1^2]} \cdot [(\lambda_m^2 - f_1^2)\cos(f_1) + f_1\sin(f_1)] \quad (11)$$

由式(11)可知,当  $\lambda_m = f_1$  时信号的  $k$ -FB 级数取得最大值。式(11)表示每项  $k$ -FB 级数均与某一频率成分一一对应,当级数项数的对应频率与信号频率相同或相近时,信号展开得到的该项级数取得最大值,则与第  $m$  项级数对应的信号频率为

$$f = \frac{\lambda_m}{2\pi kT} \quad (12)$$

式中:  $m = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} C_m^k$ 。

### 1.2.2 $k$ 分辨取值的影响

已知当  $k=1$  时  $k$ -FB 级数退化为 FB 级数,由于式(12)中贝塞尔函数的各项正根确定,则各项核函数对应的信号频率成分也同样确定,此时若对信号进行 FB 级数展开并用于信号频率的表征是将无法满足高频率分辨率的要求,而对于同一信号取  $k>1$  时得到的级数展开频率划分更为精细。已知第  $m$  项和第  $m+1$  项 FB 系数对应的零阶贝塞尔函数正根分别为  $\lambda_m$  和  $\lambda_{m+1}$ ,由贝塞尔函数根的性质<sup>[22]</sup>,当  $m \rightarrow \infty$  时相邻两项贝塞尔函数的正根之差为  $\pi$ ,即:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{m+1} - \lambda_m = \pi \quad (13)$$

通过数值计算发现  $|(\lambda_{m+1} - \lambda_m) - \pi|_{m \geq 7} < 10^{-3}$ ,即当  $m \geq 7$  时两相邻零阶贝塞尔函数的正根之差与  $\pi$  的差值小于  $10^{-3}$ 。对于  $m \geq 7$  的相邻项级数对应频率的差值  $\Delta f_m$  随项数增大的变化将更为微小,因此以该频率差值近似表示相邻项级数对应的频率分辨率,即:

$$\Delta f_m = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_{m+1}}{kT} - \frac{\lambda_m}{kT} \right) \approx \frac{1}{2kT} \quad (14)$$

由式(14)可知, $k$  分辨( $k \geq 1$ )取值越大,信号频率分辨率越高,信号参数估计与分离精度也越高。

### 1.3 离散 $k$ -FB 级数表示

基于以上分析,针对传统 FB 级数的频率分辨率确定不可细分的问题,提出  $k$ -FB 级数以对信号频率进行更为精细的刻画。在实际应用中,有限时域连续信号在进行信号处理之前通常进行数字采样。设信号采样间隔为  $t_s$ ,采样点数为  $N$ ,则离散信号  $s(n)$  的各项  $k$ -FB 级数展开为:

$$\mathbf{M}_{k\text{-FB}} = \frac{2t_s}{k^2 T^2 [J_1(\lambda_m)]^2} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N ns'_{11}(n) J_0\left(\frac{\lambda_m}{kNt_s}n\right) & \cdots & \sum_{n=1}^N ns'_{1N}(n) J_0\left(\frac{\lambda_m}{kNt_s}n\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{n=1}^N ns'_{2J \times 1}(n) J_0\left(\frac{\lambda_m}{kNt_s}n\right) & \cdots & \sum_{n=1}^N ns'_{2J \times N}(n) J_0\left(\frac{\lambda_m}{kNt_s}n\right) \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中:  $m=1,2,\dots,M$ 。取每一行最大值级数项构成

$$s(n) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_m^k J_0\left(\frac{\lambda_m}{kNt_s}n\right) \quad (15)$$

式中:  $M$  为最大有效  $k$ -FB 级数项数。已知信号采样频率  $f_s$ ,由奈奎斯特采样定律最大可表征信号频率为  $f_s/2$ 。考虑到  $k$ -FB 级数与信号频率成分一一对应的关系,因此最大有效项数  $M$  则与频率成分  $f_s/2$  对应,即  $M=kN$ 。信号的第  $m$  项  $k$ -FB 级数  $C_m^k$  计算为:

$$C_m^k = \frac{2}{k^2 N^2 t_s [J_1(\lambda_m)]^2} \sum_{n=1}^N ns(n) J_0\left(\frac{\lambda_m}{kNt_s}n\right) \quad (16)$$

## 2 多分量信号估计与分离

设多分量 LFM 信号模型为:

$$s(n) = \sum_{i=1}^K s_i(n) + w(n) =$$

$$\sum_{i=1}^K a_i \exp[j(2\pi f_i n + \pi \mu_i n^2)] + w(n) \quad (17)$$

式中:信号时域区间为  $[0, T]$ ,采样点数为  $N$ , $K$  为 LFM 信号分量数; $a_i$ 、 $f_i$ 、 $\mu_i$  分别为第  $i$  分量 LFM 信号的幅值、载频和调频斜率, $w(n) \sim N(0, \sigma^2)$  为加性高斯白噪声。

由式(12)可知,通过对单频信号进行  $k$ -FB 级数展开并计算与不同项核函数投影的最大值项数,可以较准确地得出信号的频率成分,而 dechirp 方法是逆合成孔径雷达系统中一种针对 LFM 信号的聚焦方法<sup>[23]</sup>,通过 dechirp 可实现 LFM 信号在频域上某一频率处的聚集。Dechirp 技术采用一具有一定时延且载频、调频斜率相同的 LFM 信号作为参考信号,与回波信号进行差频处理,使回波信号变为单频脉冲信号。

首先对频率区间进行  $2J$  项等分,以  $\mu_i \in [-f_2/2TJ, \dots, f_s/2TJ]^T$  为调频斜率的不同参考信号  $s'_j(n) = \exp(-j\pi\mu_j n^2)$  依次与  $s(n)$  进行 dechirp 处理,得到信号矩阵:

$$\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} s(n_1) \cdot s'_1(n_1) & \cdots & s(n_N) \cdot s'_1(n_N) \\ \vdots & & \vdots \\ s(n_1) \cdot s'_j(n_1) & \cdots & s(n_N) \cdot s'_j(n_N) \end{bmatrix}_{2J \times N} \quad (18)$$

对矩阵每一行进行  $k$ -FB 级数展开,并计算其最大级数值及项数,得到  $k$ -FB 级数矩阵:

$$\mathbf{M}'_{k\text{-FB}} =$$

$$\mathbf{M}'_{k\text{-FB}} = [\max C_{m_1}^k, \max C_{m_2}^k, \dots, \max C_{m_{2j}}^k]^T \quad (20)$$

式中:  $m_j = m_1, m_2, \dots, m_{2j}$  依次为  $\mathbf{M}_{k\text{-FB}}$  中第  $j$  行得到的最大值  $k$ -FB 级数项数。取最大项级数:

$$C_{m'}^k = \max\{\max C_{m_j}^k\} \quad (21)$$

以第  $m'$  项计算对应信号频率即为第  $i$  分量 LFM 信号的初始载频:

$$f_i = \frac{\lambda_{m'}}{2k\pi T} \quad (22)$$

则该分量信号调频斜率  $\mu_i$  为最大项级数  $C_{m_0}^k$  对应的参考信号的调频斜率取反, 即  $\mu_i = -\mu_j$  且  $j = \arg \max[\max C_{m_j}^k]$ 。依次重复以上操作, 直到不存在显著的  $k$ -FB 级数项为止。

### 3 仿真实验与分析

实验 I: 基于  $k$ -FB 级数展开的多分量 LFM 信号分离。设 LFM 信号包含三分量, 信号相关参数设置如下: 时域区间  $T = 20 \mu\text{s}$ , 采样频率  $f_s = 51.2 \text{ MHz}$ ; 分量:  $s_1: f_1 = 12 \text{ MHz}, \mu_1 = -3.5 \times 10^{11} \text{ Hz/s}$ ; 分量:  $s_2: f_2 = 18 \text{ MHz}, \mu_2 = 1.25 \times 10^{11} \text{ Hz/s}$ ; 分量:  $s_3: f_3 = 5 \text{ MHz}, \mu_3 = 2.5 \times 10^{11} \text{ Hz/s}$ , 各分量幅值均为 1。无噪声条件下且  $k = 1$  时, 多分量 LFM 信号及分离后各单分量信号的时频分布分别如图 1(a) 和图 1(b)~(d) 所示, 各分量信号的  $k$ -FB 级数见图 2。

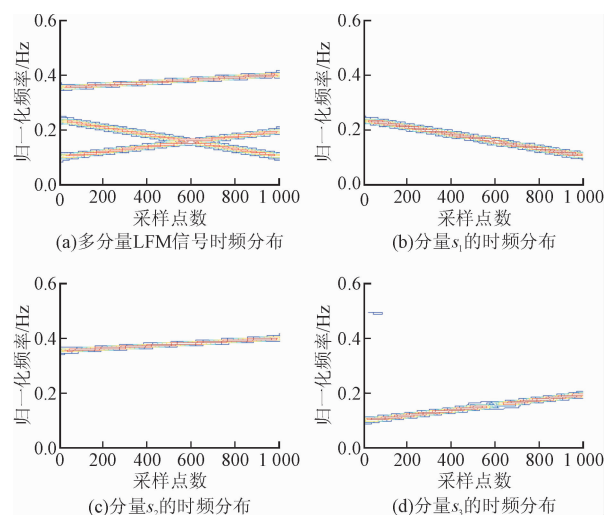


图 1 多分量 LFM 信号及分离后信号的时频分布

Fig. 1 TF distribution of multi-component LFM signals and signals after separation

图 1 表明, 时频域交叠信号采用基于  $k$ -FB 级数展开结合 dechirp 的分离算法的完成了信号有效分离, 各分量的时频分布较好的反应了各自的时频特征。图 2 表明, 经 dechirp 处理后信号的  $k$ -FB 级数的最大值分别位于第 484 项、第 719 项和第 197 项,

通过级数聚集性能能够清晰地反映出信号分量个数, 经计算, 信号的载频和调频斜率与估计值对比见表 1。

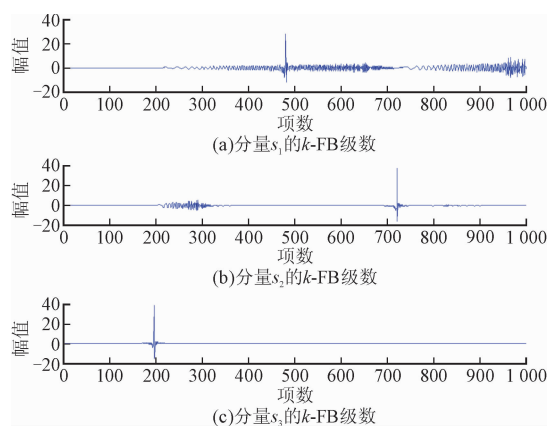


图 2 多分量 LFM 信号的  $k$ -FB 级数

Fig. 2  $k$ -FB series of multi-component LFM signals

表 1 真实值与估计值对比

Tab. 1 Comparison of real parameters and estimation parameters

		$s_1$	$s_2$	$s_3$
载频/ MHz	真实值	12	18	5
	估计值	12.09	17.97	4.92
调频斜率/ MHz/ $\mu\text{s}$	真实值	-0.350	0.125	0.250
	估计值	-0.358	0.128	0.256

实验 II: 无噪声背景下, 对弱 LFM 信号分离的性能分析。设两时频域交叠信号的性能分析。设两时频域交叠信号的性能分析。设两时频域交叠信号的性能分析。设两时频域交叠信号的性能分析。设两时频域交叠信号的性能分析。设两时频域交叠信号的性能分析。定义信号分离相关系数为  $r(s_i(n), s_i(n))$ , 用于表示分离后信号与原信号分量的相关程度。定义参数  $SSR = 20 \lg(a_1/a_2)$  为两分量 LFM 信号的功率比<sup>[13]</sup>,  $SSR$  取值范围为  $0 \sim 15 \text{ dB}$ 。在不同  $k$  分辨取值和  $SSR$  条件下得到的两信号分离相关系数见图 3。

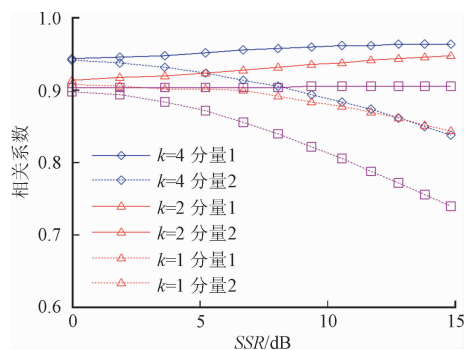


图 3 弱 LFM 信号分离的性能分析

Fig. 3 Performance analysis of weak LFM signal separation

图3表明:①随着 $k$ 分辨取值的增大,信号分离的相关系数逐渐提高,且两信号分量的相关系数在 $k$ 取值较大时较 $k$ 较小时更为稳定,说明通过增大 $k$ 分辨取值可提高信号的分离精度和鲁棒性;②当两信号功率相等即 $SNR > -4$  dB时,分量1与分量2的相关系数均较高且差距较小;③随着SSR的增大,后分离出来的分量2的相关系数逐渐减小,说明对强分量具有更好的分离效果。

实验Ⅲ:高斯白噪声背景下,多分量LFM信号分离性能分析。取两分量LFM信号的功率比为 $SNR > -4$  dB,信号参数设置如实验Ⅱ,在 $SNR = -12$  dB至 $12$  dB且 $k$ 分辨率取值分别为 $SNR > -4$  dB的条件下,采用基于 $k$ -FB级数展开的算法进行500次Monte-Carlo仿真实验,并采用FrFT算法在相同搜索步长下进行对比实验,所得信号的分离相关系数见图4。

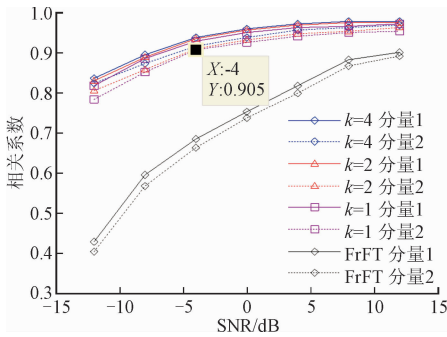


图4 不同信噪比下多分量LFM信号分离相关系数

Fig. 4 Correlation coefficient of separated LFM signals under different SNR conditions

图4表明:①LFM信号分离的相关系数随着信噪比的增加逐渐增大,并趋于一定值,与实验Ⅱ中强分量的分离结果类似;②在同一信噪比条件下,随着 $k$ 分辨取值的增大,信号分离的相关系数有所提高;③当 $SNR > -4$  dB时,基于 $k$ -FB级数展开算法得到的分量1与分量2的相关系数均达到0.9以上,明显优于FrFT算法。

## 4 结语

在FB级数的基础上引入了 $k$ 分辨参数,通过增大 $k$ 分辨系数对信号频率的划分更为精细,仿真结果验证了 $k$ 分辨参数的引入较传统FB级数提高了信号的分离精度和鲁棒性,同时实现了LFM信号载频和调频斜率的估计。 $k$ -FB级数展开结合dechirp的方法还可适用于类线性调频的时频域交叠信号分离,如非刚体微动目标主体分量与微动分量的分离、微动参数的估计等。

## 参考文献(References):

- [1] 荣海娜,张葛祥,金炜东. 多分量雷达辐射源信号检测新方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(9): 2096-2100.  
RONG H N, ZHANG G X, JIN W D. Novel Detection Method for Multi-Component Radar Emitter Signals [J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(9): 2096-2100. (in Chinese)
- [2] FU W, JIANG D F, SU Y, et al. Implementation of Wideband Digital Transmitting Beamformer Based on LFM Waveforms [J]. IET Signal Processing, 2017, 11(2): 205-212.
- [3] GARCIA M B, MARTINEZ F P, MENOYO J G. Radar Signature of a Helicopter Illuminated by a Long LFM Signal [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(3): 1104-1110.
- [4] ZHENG J B, LIAO G S, LIU Q H. PCFCRD for Multicomponent LFM Signals Analysis [J]. Electronics Letters, 2017, 53(1): 31-32.
- [5] 杨少奇,田波,李欣,等. 基于时频图像特征提取的LFM雷达有缘欺骗干扰识别[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2016, 17(1): 56-59.  
YANG S Q, TIAN B, LI X. A Recognition Method of LFM Radar Active Deception Jamming Based on SPWVD Figure [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2016, 17(1): 56-59. (in Chinese)
- [6] BARBAROSSA S. Analysis of Multicomponent LFM Signals by a Combined Wigner-Hough Transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(6): 1511-1515.
- [7] LIU F, SUN D P, TAO R, et al. Multi-Component LFM Signal Feature Extraction Based on Improved Wigner-Hough Transform [C]// The 4th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, Dalian, China, 2008: 1-4.
- [8] 郭付阳,张子敬,杨林森. 线性调频信号时/频差估计算法[J]. 电波科学学报, 2016, 31(1): 166-172.  
GUO F Y, ZHANG Z J, YANG L S. TDOA/FDOA Estimation Algorithm for Linear Frequency Modulated Signals [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2016, 31(1): 166-172. (in Chinese)
- [9] 郭汉伟,王岩,杨风凤,等. 基于小波Radon变换检测线性调频信号[J]. 国防科技大学学报, 2003, 25(1): 91-94.  
GUO H W, WANG Y, YANG F F, et al. Linear Chirp Signals Detection by Wavelet-Radon Transform [J]. Journal of National University of Defense Tech-

- nology, 2003, 25(1): 91-94. (in Chinese)
- [10] CHEN W W, CHEN R S. Multi-Component LFM Signal Detection and Parameter Estimation Based on Radon-HHT [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2008, 19(6): 1097-1101.
- [11] TAN X G, WEI P, LI L P. Combining Radon-Ambiguity Transform with Second-Order Difference to Improve Detection Probability of LFM Signals in Low SNR [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(1): 13-19
- [12] COWELL M J, FREEAR S. Separation of Overlapping Linear Frequency Modulated (LFM) Signals Using the Fractional Fourier Transform [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2010, 57(10): 2324-2333.
- [13] 黄宇, 刘锋, 王泽众, 等. 基于周期 FRFT 的多分量 LFM CW 雷达信号分离 [J]. 航空学报, 2013, 34(4): 846-854.  
HUANG Y, LIU F, WANG Z Z, et al. Periodic FRFT-Based Multi-Component LFM CW Radar Signal Separating [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(4): 846-854. (in Chinese)
- [14] 李彦, 姜军, 朱丰, 等. 一种线性调频信号参数提取方法 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2014, 15(6): 49-52.  
LI Y, JIANG J, ZHU F, et al. A Novel Parameter Extraction Method of Linear Frequency Modulation Signal [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2014, 15(6): 49-52. (in Chinese)
- [15] 方标, 黄高明, 高俊, 等. FRFT 域 LFM 雷达回波信号的压缩采样模型 [J]. 西安电子科技大学学报, 2015, 42(1): 201-206.  
FANG B, HUANG G M, GAO J, et al. Compressive Sensing of Linear Frequency Modulated Echo Signals in Fractional Fourier Domains [J]. Journal of Xidian University, 2015, 42(1): 201-206. (in Chinese)
- [16] COWELL D, FREEAR S. Separation of Overlapping Linear Frequency Modulated (LFM) Signals Using the Fractional Fourier Transform [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2010, 57(10): 2324-2333.
- [17] SURESH P, THAYAPARAN T, OBULESU T, et al. Extracting Micro-Doppler Radar Signatures from Rotating Targets Using Fourier-Bessel Transform and Time-Frequency Analysis [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2014, 52(6): 3204-3210.
- [18] SURESH P, THAYAPARAN T, VENKATARAMANIAN K. Fourier-Bessel Transform and Time-Frequency-Based Approach for Detecting Manoeuvring Air Target in Sea-Clutter [J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2015, 9(5): 481-491.
- [19] PACHORI R B, SICAR P. A New Technique to Reduce Cross Terms in the Wigner Distribution [J]. Digital Signal Processing, 2007, 17(2): 466-474.
- [20] SCHROEDER J. Signal Processing via Fourier-Bessel Series Expansion [J]. Digital Signal Processing, 1993, 3(2): 112-124.
- [21] SPIEGEL R M, LIPSCHUTZ S, LIU J. Mathematical Methods for Physicists [M]. New York: Academic Press, 2009.
- [22] 郭时光. 数学物理方程 [M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2005.  
GUO S G. Mathematical Physics Equation [M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 2005. (in Chinese)
- [23] 邓云凯, 刘亚东, 行坤, 等. 一种结合时频分析与 Dechirp 技术提高运动目标参数估计精度的多通道方法 [J]. 电子与信息学报, 2011, 33(1): 14-20.  
DENG Y K, LIU Y D, XING K, et al. A High Accurate Method of Estimating Moving Target's Parameters Using Time-Frequency Analysis and Dechirp Technology with Multi-Channel [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2011, 33(1): 14-20. (in Chinese)

(编辑: 徐楠楠)