

基于反正切函数权值累加生成的 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型及其应用

李 翀, 谢秀萍

(福州大学 经济与管理学院, 福州 350116)

摘 要 传统 $DGM(1,1)$ 模型的累加生成算子没有考虑数据振荡对数据序列发展趋势的影响, 模型预测结果往往呈现齐次指数增长的趋势. 该局限性使得 $DGM(1,1)$ 模型不适用于本身存在随机波动特征的序列分析与预测. 针对这一问题, 本文提出基于原始数据均值像序列的随机波动特征分析方法, 设计出均值像反正切函数变权形式的累加生成算子; 在此基础上建立了基于均值像反正切函数变权累加的 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型, 该模型综合考虑了数据的整体增长趋势与局部波动特征; 最后, 将模型应用于海域水质监测的数据分析与预测, 预测结果验证了模型的有效性及其实用性.

关键词 序列预测; $DGM(1,1)$; 变权累加生成算子; 振荡序列

The $DGM(1,1)_{atan}$ model with variable weight based on arc-tangent function and its application

LI Chong, XIE Xiuping

(College of Economics and Management, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China)

Abstract The accumulative generation operator of traditional $DGM(1,1)$ model does not consider that data volatility will affect the data development trend. This limitation makes a homogenous exponential growth prediction model difficult to simulate stochastic oscillation sequence. To solve this problem, this paper proposes a stochastic oscillation analysis method based on the mean value sequence of raw data, and design a new accumulative operator using trigonometric function values during its weight generation. Based on this accumulative operator, a new $DGM(1,1)_{atan}$ model with variable weights is provided. Finally, this model is used to forecast data in field of marine water quality monitoring. Result shows the effectiveness and practicability of the proposed model.

Keywords sequence prediction; $DGM(1,1)$; variable weight accumulative generation operator; stochastic oscillation sequence

1 引言

对时间序列的分析和预测能够为决策提供良好的支持, 常见的时间序列预测方法有^[1-3]: ARIMA 模型、神经网络模型、支持向量机以及一些组合预测模型. ARIMA 模型适用于具有线性特征的时间序列的拟合; 神经网络模型具有强大的学习功能, 可以实现非线性序列的有效拟合. 但这些预测模型都是依赖于大量的原始数据, 在原始数据不多的情况下则无法实现有效预测. 邓聚龙教授^[4]首次提出的灰色预测模型可以通过生成、变换等数据处理方法, 实现对小样本数据的有效预测. 通过对灰色预测方法的基础模型 $DGM(1,1)$ 的改

收稿日期: 2017-03-27

作者简介: 李翀(1983-), 女, 四川成都人, 副教授, 博士, 研究方向: 灰色系统, 供应链管理; 通信作者: 谢秀萍(1993-), 女, 福建龙岩人, 硕士研究生, 研究方向: 灰色系统.

基金项目: 国家自然科学基金(71401039); 国家留学基金(201606655020); 教育部人文社科项目(14YJC630060); 福建省自然科学基金(2017J01517)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China(71401039); The China Scholarship Council(201606655020); The Humanities and Social Sciences Youth Fund Project of Ministry of Education of China(14YJC630060); Fujian Natural Science Foundation(2017J01517)

中文引用格式: 李翀, 谢秀萍. 基于反正切函数权值累加生成的 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(12): 3227-3234.

英文引用格式: Li C, Xie X P. The $DGM(1,1)_{atan}$ model with variable weight based on arc-tangent function and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(12): 3227-3234.

进, 主要包括 DGM(1,1) 系列模型的性质以及使用范围分析^[5-7]、背景值改进^[8-9]、初始值改进^[10-11]、模型病态性问题^[12-13]、灰色系统模型与其他学科模型的组合^[14]等改进方法, 拓展了模型的使用范围。

但由于 DGM(1,1) 系列模型以假定原始数据序列服从近似齐次指数增长规律为基础, 而生活中很多数据如股票指数等存在随机振荡且摆动幅度较大, 所以 DGM(1,1) 系列模型对此类数据序列的预测效果较差。为此, 许多学者针对随机振荡序列的预测做了大量研究, 这类研究主要集中于: 1) 模型结构的改进: 引入时间项构造时变参数模型^[15-16]; DGM(1,1) 幂模型指数优化^[17-18]; 2) 利用算子削弱序列随机性^[19]; 3) 累加算子的改进^[20-21]。通过梳理现有研究文献, 本文发现现有的累加算子对预测模型的影响效果还有待进一步改进。例如: 文献 [20] 利用基于光滑比为权值的累加算子, 仅建模实现了对原始序列的拟合, 但没有实现真正的预测作用; 文献 [21] 对于权值的确定存在过大的主观性; 文献 [22] 对此进行了修改, 建立了基于线性加权函数的 WGM(1,1) 模型, 但线性加权函数并没有体现数据序列的振荡性对建模结果的影响。

为解决上述问题, 本文在现有研究的基础上, 从优化累加生成算子权值的角度出发, 提出利用数据序列中各元素对应的均值像分析原序列的振荡性; 设计出基于均值像的反正切函数, 并将该函数作为构造变权累加序列算子的关键要素; 最后, 在新算子基础上建立了基于反正切函数权值累加生成的 DGM(1,1) 预测模型。该模型的增长率具有随机振荡性, 能较好地拟合具有随机振荡特征的数据序列, 有效地解决了 DGM(1,1) 系列模型对不具有指数增长特征序列预测精度不高的问题。

2 累加生成算子及 DGM(1,1) 建模

2.1 累加生成算子

定义 1^[23] 数据序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$ 对于 $\forall k = 2, 3, \dots, n$:

- 1) 若 $x^0(k) - x^0(k-1) > 0$, 则称 X^0 为单调增长序列;
- 2) 若 $x^0(k) - x^0(k-1) < 0$, 则称 X^0 为单调衰减序列;
- 3) 若 $\exists k, k^* \in \{2, 3, \dots, n\}$ 有 $x^0(k) - x^0(k-1) > 0$, $x^0(k^*) - x^0(k^*-1) < 0$, 则称 X^0 为随机振荡序列。

定义 2^[24] 设原始非负序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$, D^1 为序列算子,

$$X^0 D^1 = \{x^0(1)d^1, x^0(2)d^1, \dots, x^0(n)d^1\}.$$

其中, $x^0(k)d^1 = \sum_{i=1}^k x^0(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$, 则称 D^1 为 X^0 的一次累加生成算子, 记为 1-AGO; 称 r 阶算子 D^r 为 X^0 的次 r 累加生成算子, r -AGO, 记为

$$\begin{aligned} X^0 D^1 &= X^1 = \{x^1(1), x^1(2), \dots, x^1(n)\}, \\ X^{r-1} D^r &= X^r = \{x^r(1), x^r(2), \dots, x^r(n)\}. \end{aligned}$$

其中, $x^r(k) = \sum_{i=1}^k x^{r-1}(i)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

性质 1^[24] 任何非负数据序列经过 r 次累加生成算子作用后为单调递增序列。

证明 由 $x^1(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} x^0(i)$, $x^1(k) = \sum_{i=1}^k x^0(i)$, $x^1(k+1) - x^1(k) = x^0(k+1)$, $x^0(k+1) > 0$, 所以 $x^1(k+1) - x^1(k) > 0$, X^1 为单调递增序列。

同理, $x^r(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} x^{r-1}(i)$, $x^r(k) = \sum_{i=1}^k x^{r-1}(i)$, $x^r(k+1) - x^r(k) = x^{r-1}(k+1) > 0$ 。所以, X^r 为单调递增序列。

命题 1^[24] $X^r = \{x^r(1), x^r(2), \dots, x^r(n)\}$ 为非负序列 X^0 的 r 次累加生成序列, r 为任意非负整数, 则 r 充分大时, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使对于任意 k , $N < k \leq n$, 有下式成立:

$$p^r(k) = \frac{x^r(k)}{\sum_{i=1}^{k-1} x^{r-1}(i)} < \varepsilon.$$

即序列 X^r 是充分光滑且光滑比 $p^r(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ 。

对于具有随机振荡特征的数据序列, 经过累加生成算子的作用, 都会减少随机性, 呈现近似的指数增长规律。

2.2 DGM(1,1) 模型的建模原理

设非负序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$, 其一次累加生成序列为 $X^1 = \{x^1(1), x^1(2), \dots, x^1(n)\}$, 其

中 $x^1(k) = \sum_{i=1}^k x^0(i), k = 1, 2, \dots, n$, 称

$$x^1(k+1) = \beta_1 x^1(k) + \beta_2 \quad (1)$$

为 GM(1,1) 模型的离散形式, 简称 DGM(1,1) 模型.

$$\text{若 } \hat{\beta} = [\beta_1, \beta_2]^T, \text{ 其中 } Y = \begin{bmatrix} x^1(2) \\ x^1(3) \\ \vdots \\ x^1(n) \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} x^1(1) & 1 \\ x^1(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^1(n-1) & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则灰色微分方程 } \hat{x}^1(k+1) = \beta_1 \hat{x}^1(k) + \beta_2$$

中参数的最小二乘估计为 $\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y$. 取 $\hat{x}^1(1) = x^0(1)$, 则式子 (1) 的时间响应式为:

$$\hat{x}^1(k+1) = \left(x^0(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \right) \beta_1^k + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

式 (2) 的累减还原式为:

$$\hat{x}^0(k+1) = \hat{x}^1(k+1) - \hat{x}^1(k) \quad (3)$$

对于式 (2), $x^0(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1}$ 和 $\frac{\beta_2}{1-\beta_1}$ 均为常数, 所以式 (2) 为非齐次指数增长函数.

由式 (2)、(3) 可得到序列 X^0 的时间响应式为 $\hat{x}^0(k+1) = (\beta_1 - 1)(x^0(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1})\beta_1^{k-1}, k = 1, 2, \dots, n-1$ 其中, $(\beta_1 - 1)(x^0(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1})$ 为常数, 所以序列 X^0 的时间响应式为齐次指数增长函数.

当一阶累加生成序列是权值为 1 的等权累加生成时, 得到的序列 X^0 的时间响应式为齐次指数增长函数, 而实际序列 X^0 可能为随机振荡序列, 当完全没有指数增长趋势时, 模型的预测精度将大大降低.

通过累加生成算子可以看出序列积累过程的发展态势, 使原本没有规律的数据呈现出增长趋势, 为建模提供了很大的帮助. 现有的累加生成算子没有考虑原始数据的波动性, 累加生成与累减还原是互逆的过程, 累减还原得到的时间相应式也将是忽略原始序列振荡性.

3 基于反正切函数权值累加算子的 DGM(1,1) 模型

3.1 基于反正切函数权值的累加算子

定义 3^[24] 设非负数据序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$, $\bar{X}^0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x^0(i)$, 则称

$$\varphi^0(k) = \frac{x^0(k-1)}{\bar{X}^0}, k = 2, 3, \dots, n+1$$

为序列 X^0 的均值像, 构成均值像序列 $\varphi^0 = \{\varphi^0(2), \varphi^0(3), \dots, \varphi^0(n+1)\}$.

性质 2^[24] 数据序列 X^0 与均值像序列 φ^0 的相对关联度等于 1, 均值像序列 φ^0 相对于始点的变化速率完全相同.

证明 数据序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$ 与 $\varphi^0 = \{\varphi^0(2), \varphi^0(3), \dots, \varphi^0(n+1)\}$ 长度相同, 且初值皆不等于零, 其中 $\varphi^0(k) = \frac{x^0(k-1)}{\bar{X}^0}, k = 2, 3, \dots, n+1$, $\frac{1}{\bar{X}^0}$ 是常数, 由文献 [24] 知, 灰色相对关联度是两个序列相对于始点的变化速率之联系的表征, 相对关联度为 1 时, 两个序列变化速率相等, 并且数乘不改变灰色相对关联度. 因为 $\varphi^0 = \frac{X^0}{\bar{X}^0}$, φ^0 是 X^0 的 $\frac{1}{\bar{X}^0}$ 倍, 所以序列 X^0 与序列 φ^0 的相对关联度为 1, 即数据序列 X^0 与 φ^0 相对于始点的变化速率相同.

定义 4 设非负序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$, W^1 为一阶累加生成序列算子,

$$X_w^1 = X^0 W^1 = \{x^0(1)w^1, x^0(2)w^1, \dots, x^0(n)w^1\}.$$

$$x^0(k)w^1 = x_w^1(k) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^0(i)) \cdot x^0(i) \right), k = 1, 2, \dots, n.$$

其中, $\varphi^0(1) = 1; \varphi^0(i), i = 2, 3, \dots, n+1$ 为序列 X^0 的均值像. 则称 W^1 为 X^0 的反正切函数权值一阶累加生成算子, 记为 1-WAGO. 称 r 阶算子 W^r 为 X^0 的 r 次反正切函数权值累加生成算子, 记为 r -WAGO.

$$X_w^r = X^{r-1} W^r = \{x^{r-1}(1)w^r, x^{r-1}(2)w^r, \dots, x^{r-1}(n)w^r\}.$$

$$x^{r-1}(k)w^r = x_w^r(k) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^{r-1}(i)) \cdot x_w^{r-1}(i) \right), k = 1, 2, \dots, n.$$

其中, $\varphi^{r-1}(k) = \frac{x_w^{r-1}(k-1)}{X_w^{r-1}}, k = 2, 3, \dots, n+1, \bar{X}^{r-1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_w^{r-1}(i)$.

由性质 2 可得均值像序列 φ^0 与序列 X^0 相对于始点的变化速率完全相同, 即可以用均值像序列 φ^0 反应序列 X^0 相对于始点的发展趋势. $\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^0(i))$ 为非负单调递增函数, 所以 $\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^0(i))$ 同样可以反映数据序列 X^0 的振荡情况.

性质 3 反正切函数权值累加序列算子是单调递增序列.

证明 非负序列 X^0 的一阶反正切函数权值累加生成序为 $X_w^1 = \{x_w^1(1), x_w^1(2), \dots, x_w^1(n)\}$, 由定义 4 得

$$\begin{aligned} x_w^1(k) &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^0(i)) \cdot x^0(i) \right), \\ x_w^1(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^0(i)) \cdot x^0(i) \right), \\ x_w^1(k+1) - x_w^1(k) &= \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^0(k+1)) \cdot x^0(k+1). \end{aligned}$$

由于反正切函数单调递增函数, 且当 $\varphi^0(k+1) > 0$ 时, $0 < \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^0(k+1)) < 1$, 所以

$$x_w^1(k+1) - x_w^1(k) > 0.$$

X_w^1 为单调递增序列.

同理, 对于序列 $X_W^r = \{x_w^r(1), x_w^r(2), \dots, x_w^r(n)\}$, 由定义 4 得

$$\begin{aligned} x_w^r(k) &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^{r-1}(i)) \cdot x_w^{r-1}(i) \right), \\ x_w^r(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^{r-1}(i)) \cdot x_w^{r-1}(i) \right), \\ x_w^r(k+1) - x_w^r(k) &= \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varphi^{r-1}(k+1)) \cdot x_w^{r-1}(k+1) > 0. \end{aligned}$$

所以 X_W^r 为单调递增序列.

3.2 基于反正切函数权值累加算子的预测模型

设非负数据序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$, 根据定义 4, 序列 X^0 的一阶反正切函数权值累加生成序列为 $X_W^1 = \{x^0(1)w^1, x^0(2)w^1, \dots, x^0(n)w^1\}$, 根据公式 (1) 得 $\hat{x}_w^1(k+1) = \beta_3 \hat{x}_w^1(k) + \beta_4$, 其中, $\hat{\omega} = [\beta_3, \beta_4]^T$

$$= (B^T B)^{-1} B^T Y, \text{ 且 } Y = \begin{bmatrix} x_w^1(2) \\ x_w^1(3) \\ \vdots \\ x_w^1(n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x_w^1(1) & 1 \\ x_w^1(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_w^1(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

1) 取 $\hat{x}_w^1(1) = x^0(1)$

$$\hat{x}_w^1(k+1) = \left(x^0(1) - \frac{\beta_4}{1-\beta_3} \right) \beta_3^k + \frac{\beta_4}{1-\beta_3}, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

2) 还原值

$$\hat{x}_w^1(k+1) - \hat{x}_w^1(k) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\hat{\varphi}^0(k+1)) \cdot \hat{x}^0(k+1), k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

黄辉在文献 [25] 中提出在累减还原过程中, 模拟误差的累积会进一步扩大 $\hat{x}^0(k+1)$ 的模拟误差, 为了避免累积效应对模拟结果的影响, 设计了一种优化累减还原方法. 本文将采用这种优化累减还原方法, 将数据的还原分为两部分:

1) 当模型用于模拟时, 即 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 时:

$$\hat{x}^0(k+1) = \frac{((\beta_3 - 1) \cdot x^0(1) + \beta_4) \beta_3^{k-1}}{\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\hat{\varphi}^0(k+1))} \quad (6)$$

其中, $\hat{\varphi}^0(k+1) = \varphi^0(k+1) = \frac{x^0(k)}{X^0}$.

2) 当模型用于预测时, 即 $i = 1, 2, \dots$ 时:

$$\hat{x}^0(n+i) = \frac{((\beta_3 - 1) \cdot x^0(1) + \beta_4) \beta_3^{n+i-2}}{\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\hat{\varphi}^0(n+i))} \quad (7)$$

其中, $\hat{\varphi}^0(n+i) = \frac{\hat{x}^0(n+i-1)}{X^0}$.

式 (6) 和 (7) 合称为基于反正切函数权值累加生成 DGM(1,1) 模型, 简称为 DGM(1,1)_{atan}.

3.3 DGM(1,1)_{atan} 模型分析

定义 5 设非负序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\}$, 则称 $\mu(k+1) = \frac{x^0(k+1) - x^0(k)}{x^0(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, 为序列 X^0 的增长率.

由公式 (6) 得, 模拟值的增长率为:

$$\frac{\hat{x}^0(k+1) - \hat{x}^0(k)}{\hat{x}^0(k)} = \beta_3 \cdot \frac{\arctan(\varphi^0(k))}{\arctan(\varphi^0(k+1))} - 1, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

由公式 (7) 得, 预测值的增长率为:

$$\frac{\hat{x}^0(n+i+1) - \hat{x}^0(n+i)}{\hat{x}^0(n+i)} = \beta_3 \cdot \frac{\arctan(\hat{\varphi}^0(n+i))}{\arctan(\hat{\varphi}^0(n+i+1))} - 1, i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

对于 DGM(1,1) 模型的时间响应式: $\hat{x}^0(k+1) = (\beta_1 - 1)(x^0(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1})\beta_1^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, 其增长率为:

$$\frac{\hat{x}^0(k+1) - \hat{x}^0(k)}{\hat{x}^0(k)} = \beta_1 - 1 \quad (10)$$

性质 4 DGM(1,1)_{atan} 模型不能完全拟合齐次指数增长序列.

证明 设存在齐次指数增长序列 $X^0 = \{x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n)\} = \{c, c^2, \dots, c^n\}$, 其增长率为 $c-1$.

假设 DGM(1,1)_{atan} 模型能完全拟合序列 X^0 , 则 $\hat{x}^0(k) = c^k$, $k = 1, 2, \dots, n$. 根据定义 5, 模拟值的增长率为:

$$\frac{\hat{x}^0(k+1) - \hat{x}^0(k)}{\hat{x}^0(k)} = \frac{c^{k+1} - c^k}{c^k} = c - 1, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (11)$$

由公式 (8) 知模型 DGM(1,1)_{atan} 的模拟值增长率为: $\frac{\hat{x}^0(k+1) - \hat{x}^0(k)}{\hat{x}^0(k)} = \beta_3 \cdot \frac{\arctan(\varphi^0(k))}{\arctan(\varphi^0(k+1))} - 1$. 根据式 (8)、(11) 知, 当假设成立时, 对于任意 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 有

$$\beta_3 \cdot \frac{\arctan(\varphi^0(k))}{\arctan(\varphi^0(k+1))} - 1 = c - 1 \quad (12)$$

成立.

又因为, 由定义 3 知 $\arctan((\varphi)^0(1)) = \arctan(1)$, $\arctan(\varphi^0(k+1)) = \arctan(\frac{n \cdot c^{k-1} \cdot (1-c)}{1-c^n})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, 所以, $\frac{\arctan(\varphi^0(1))}{\arctan(\varphi^0(2))}$, $\frac{\arctan(\varphi^0(2))}{\arctan(\varphi^0(3))}$, \dots , $\frac{\arctan(\varphi^0(n-1))}{\arctan(\varphi^0(n))}$ 不全相等, 即存在 $k = 1, 2, \dots, n-1$, 使得

$$\beta_3 \cdot \frac{\arctan(\varphi^0(k))}{\arctan(\varphi^0(k+1))} \neq c \quad (13)$$

式 (12) 与式 (13) 矛盾, 即假设不成立, 所以模型 DGM(1,1)_{atan} 不能完全拟合齐次指数增长序列.

由文献 [26] 可知 DGM(1,1) 模型可以完全拟合齐次指数增长序列 $X^0 = \{c, c^2, \dots, c^n\}$. 根据性质 4 可知, DGM(1,1)_{atan} 模型不能完全拟合齐次指数增长序列, 当数据序列为指数增长序列或近似指数增长序列时, DGM(1,1)_{atan} 模型拟合精度可能不优于 DGM(1,1) 模型. 但是 DGM(1,1) 模型完全拟合齐次指数增长序列和时间响应函数为指数函数的特性, 使 DGM(1,1) 模型不能根据原始数据的发展趋势调整增长率, 导致一些随机振荡序列建模的拟合误差很大. 由式 (8)、(9) 知 DGM(1,1)_{atan} 模型的时间响应函数为非指数增长函数, 其增长率与 β_3 和一阶反正切函数权值累加生成算子的比值相关, 和一阶反正切函数权值累加生成算子的比值相关在模型中不断有新信息的加入, 模型可以及时地根据原始数据的发展趋势调整增长率, 反映数据的随机振荡变化.

DGM(1,1)_{atan} 模型模型通过均值像的反正切三角函数反应序列的波动情况, 同时在预测模型中不断加入新信息, 既体现了新信息优先的原理, 又结合了历史信息, 使模型的增长率具有很好的适应性, 虽然对近似指数增长序列的拟合效果不如 DGM(1,1) 模型, 但对于短期内数据振荡具有连续性的预测问题, 反映了增长率的时变性, 使得模型能够较好地适应原始数据序列的振荡性, 提高了模型的灵活性和有效性.

4 实例分析

海域水质对海洋生态环境有重要影响, 有效地预测海域近海海域的水质指标可以对入海口河流的污染问题进行及时防治. 海域水质质量是一个随机变化的过程, 且水质变化是一个连续过程. 本文将应用 DGM(1,1)_{atan}

模型构建福建省入海河流入海监测断面之诏安澳子头断面的高锰酸盐指数变化预测,并将该模型的模拟效果与传统的 DGM(1,1) 模型进行比较和分析. 表 1 中的数据来自福建省入海河流入海监测断面监测信息.

表 1 2016 年 4 月 - 10 月诏安澳子头断面的高锰酸盐指数

月份	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月
诏安澳子头断面的高锰酸盐指数(g/l)	39.0	32.5	38.6	36.2	33.7	35.0	34.85

表 1 中的 2016 年 4 月到 10 月的数据构成序列 $X^0 = \{39.0, 32.5, 38.6, 36.2, 33.7, 35.0\}$, 分别用 DGM(1,1) 模型及 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型对序列 X^0 构建预测模型, 将 10 月的数据用于验证模型的模拟效果.

从图 1 可以看出, 原始数据序列 X^0 随机振荡, 无明显规律, 但是经过反正切函数权值累加算子处理后, 得到一阶反正切函数权值累加生成序列 $X^0 = \{19.5, 36.63, 54.73, 73.68, 90.64, 107.46\}$ 的数据序列呈现出明显的单调递增规律, 如图 2 所示.

表 2 是 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型与传统 DGM(1,1) 模型的模拟值与预测值以及相对误差. $DGM(1,1)_{atan}$ 模型及传统 DGM(1,1) 模型对 4 月 - 10 月诏安澳子头断面的高锰酸盐指数的模拟值的散点折线图如图 3 所示.

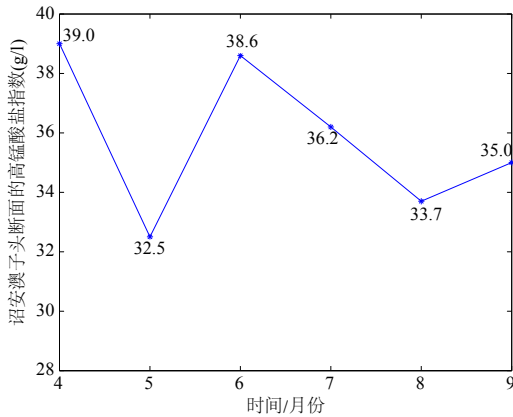


图 1 原始序 X^0 的散点折线图

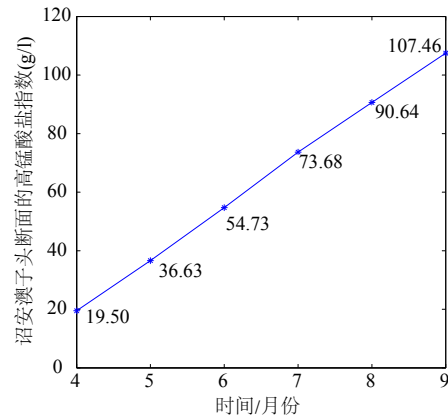


图 2 反正切函数权值累加算子处理后序列散点折线图

表 2 $DGM(1,1)_{atan}$ 与传统 DGM(1,1) 模拟与预测结果的比较

月份	实际数据	$DGM(1,1)_{atan}$		DGM(1,1)	
		模拟预测值	相对误差 (%)	模拟预测值	相对误差 (%)
4 月	39.0	39.0	0.00	39.00	0.00
5 月	32.5	34.07	4.83	35.24	8.44
6 月	38.6	37.89	1.83	35.22	8.75
7 月	36.2	33.59	7.21	35.20	2.76
8 月	33.7	34.60	2.67	35.18	4.39
9 月	35.0	35.87	2.49	35.16	0.45
平均拟合相对误差		—	3.17	—	4.13

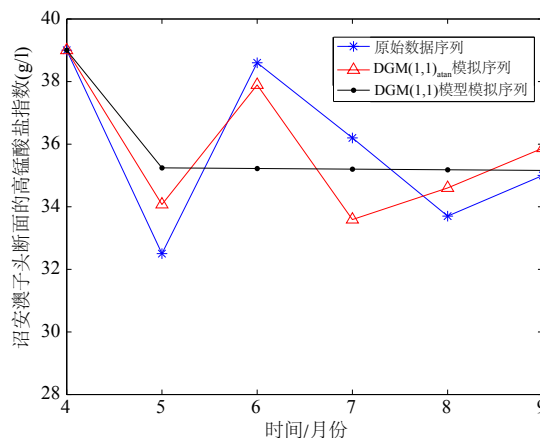


图 3 两种模型对 X^0 模拟值的散点折线图

从图 3 中的 5 月到 6 月的原始数据序列、 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型模拟值序列、 $DGM(1,1)$ 模型模拟值序列的折线可以看出, 当原始数据出现突然的增大时, $DGM(1,1)$ 模型模拟值序列的折线还是保持递减趋势, 而 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型模拟值折线与原始数据保持一致的变化, 使模拟值更接近原始数据. 从 6 月到 7 月的数据折线图可以看出, 虽然 7 月份 $DGM(1,1)_{atan}$ 模型的模拟值精确度不如 $DGM(1,1)$ 模型, 但是从图中折线的变化趋势可以看出, 原始数据递减时, $DGM(1,1)_{atan}$ 模型也对数据变化做出快速反应. 当原始数据递增、递减的交替变化时, $DGM(1,1)_{atan}$ 模型都能及时地响应数据的振荡变化.

从总体上看 $DGM(1,1)$ 模型的平均模拟相对误差为 4.13%, $DGM(1,1)_{atan}$ 模型的平均模拟相对误差为 3.17%, 明显比 $DGM(1,1)$ 模型的平均模拟相对误差值低. 从预测误差看, $DGM(1,1)$ 模型的预测相对误差为 0.93%, $DGM(1,1)_{atan}$ 的预测相对误差为 0.60%, 由此看出, $DGM(1,1)_{atan}$ 模型无论在模拟还是预测中都优于 $DGM(1,1)$. $DGM(1,1)$ 模型的时间响应函数为齐次指数递减函数, $DGM(1,1)_{atan}$ 的时间响应函数是包含最新信息的非齐次指数函数, $DGM(1,1)_{atan}$ 模型的模拟结果具有与原始数据相近的数据变化规律, 模拟结果也是具有随机振荡特征, 因而具有较好的模拟性能.

5 结论

现有的 $DGM(1,1)$ 系列模型预测结果具有指数增长规律, 使得这类模型难以准确模拟不具备指数增长规律的数据序列. 本文从具有随机振动特征的序列出发, 提出了一种新的基于原始序列均值像反正切函数的累加生成算子, 该算子依据序列随机波动特征具有变权累加赋值的特性, 从而弥补了传统等权累加算子的不足. 此外, 结合新算子对应的累减还原方法, 避免了预测误差累加对模拟精度的影响. 最后, 本文设计出基于反正切函数数值累加生成的 $DGM(1,1)_{atan}$ 预测模型. 该预测模型具有时变特征, 对具有随机振荡特征的数据序列有较高的模拟精度, 实例分析验证了模型的理论价值和实用价值.

参考文献

- [1] Lei Y, Guo M, Hu D D, et al. Short-term prediction of UT1-UTC by combination of the grey model and neural networks[J]. *Advances in Space Research*, 2017, 59(2): 524–531.
- [2] 郑莉, 段冬梅, 陆凤彬, 等. 我国猪肉消费量集成预测 —— 基于 ARIMA、VAR 和 VEC 模型的实证 [J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(4): 918–925.
Zheng L, Duan D M, Lu F B, et al. Integration forecast of Chinese pork consumption demand — Empirical based on ARIMA, VAR and VEC models[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2013, 33(4): 918–925.
- [3] Lin Y, Yan H S, Zhou B. Nonlinear time series prediction method based on multi-dimensional Taylor network and its applications[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(5): 795–801.
- [4] Deng J L. Control problems of grey systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1982, 1(5): 288–294.
- [5] 刘思峰, 曾波, 刘解放, 等. GM(1,1) 模型的几种基本形式及其适用范围研究 [J]. *系统工程与电子技术*, 2014, 36(3): 501–508.
Liu S F, Zeng B, Liu J F, et al. Several basic model of GM(1,1) and their applicable bound[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(3): 501–508.
- [6] 姚天祥, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型的特性与优化 [J]. *系统工程理论与实践*, 2009, 29(3): 142–148.
Yao T X, Liu S F. Characteristics and optimization of discrete GM(1,1) model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2009, 29(3): 142–148.
- [7] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理 [J]. *系统工程理论与实践*, 2005, 25(1): 93–99.
Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2005, 25(1): 93–99.
- [8] 肖新平, 王欢欢. GM(1,1, α) 模型背景值的变化对相对误差的影响 [J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(2): 408–415.
Xiao X P, Wang H H. Change of GM(1,1, α) model background value on the influences of relative error[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(2): 408–415.
- [9] 蒋诗泉, 刘思峰, 周兴才. 基于复化梯形公式的 GM(1,1) 模型背景值的优化 [J]. *控制与决策*, 2014, 29(12): 2221–2225.
Jiang S Q, Liu S F, Zhou X C. Optimization of background value in GM(1,1) based on compound trapezoid formula[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(12): 2221–2225.
- [10] 熊萍萍, 党耀国, 姚天祥. 基于初始条件优化的一种非等间距 GM(1,1) 建模方法 [J]. *控制与决策*, 2015, 30(11): 2097–2102.
Xiong P P, Dang Y G, Yao T X. Modeling method of non-equidistant GM(1,1) model based on optimization

- initial condition[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 2097–2102.
- [11] 郭金海, 杨锦伟. GM(1,1) 模型初始条件和初始点的优化 [J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(9): 2333–2338.
Guo J H, Yang J W. Optimizing the initial condition and the initial point of GM(1,1)[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2015, 35(9): 2333–2338.
- [12] 吴正朋, 刘思峰, 党耀国, 等. 再论离散 GM(1,1) 模型的病态问题研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(1): 108–112.
Wu Z P, Liu S F, Dang Y G, et al. Study on the morbidity problem in grey model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2011, 31(1): 108–112.
- [13] 荆科, 刘业政. GM(1,1) 模型的病态性问题再研究 [J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 869–874.
Jing K, Liu Y Z. Morbidity problem of GM(1,1) model[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 869–874.
- [14] 郭晓君, 刘思峰, 方志耕, 等. 融合自忆性原理的优化 GM(1,1) 幂模型构建及应用 [J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(1): 117–122.
Guo X J, Liu S F, Fang Z G, et al. Construction and application of optimized GM(1,1) power model incorporating self-memory principle[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(1): 117–122.
- [15] 蒋诗泉, 刘思峰, 刘中侠, 等. 三次时变参数离散灰色预测模型及其性质 [J]. 控制与决策, 2016, 31(2): 279–286.
Jiang S Q, Liu S F, Liu Z X, et al. Cubic time-varying parameters discrete grey forecasting model and its properties[J]. Control and Decision, 2016, 31(2): 279–286.
- [16] 郭丽云, 吴正朋, 李梅. 二次时变参数离散灰色模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2887–2893.
Wu L Y, Wu Z P, Li M. Quadratic time-varying parameters discrete grey model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(11): 2887–2893.
- [17] 王俊芳, 罗党. 振荡序列的分数阶离散 GM(1,1) 幂模型及其应用 [J]. 控制与决策, 2017, 32(1): 176–180.
Wang J F, Luo D. Fractional order discrete grey GM(1,1) power model based on oscillation sequences and its application[J]. Control and Decision, 2017, 32(1): 176–180.
- [18] 王正新. 时变参数 GM(1,1) 幂模型及其应用 [J]. 控制与决策, 2014, 29(10): 1828–1832.
Wang Z X. GM(1,1) power model with time-varying parameters and its application[J]. Control and Decision, 2014, 29(10): 1828–1832.
- [19] 曾波, 刘思峰. 基于振幅压缩的随机振荡序列预测模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(11): 2493–2497.
Zeng B, Liu S F. Prediction model of stochastic oscillation sequence based on amplitude compression[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(11): 2493–2497.
- [20] 钱吴永, 党耀国, 王叶梅. 加权累加生成的 GM(1,1) 模型及其应用 [J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(15): 47–51.
Qian W Y, Dang Y G, Wang Y M. GM(1,1) model based on weighting accumulated generating operation and its application[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(15): 47–51.
- [21] 乔正明. 基于粒子群算法的变权累加生成的 GM(1,1) 模型 [J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(1): 71–77.
Qiao Z M. GM(1,1) model based on variable weight accumulate generating operation and particle swarm optimization[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2011, 41(1): 71–77.
- [22] 苏先娜, 谢富纪. 基于函数 $\gamma + \delta i$ 的加权 WGM(1,1) 模型及其在技术创新中的应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(11): 2885–2890.
Su X N, Xie F J. The WGM(1,1) model based on the function of $\gamma + \delta i$ and its application in the technology innovation[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2015, 35(11): 2885–2890.
- [23] 钱吴永, 党耀国. 基于振荡序列的 GM(1,1) 模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(3): 149–154.
Qian W Y, Dang Y G. GM(1,1) model based on oscillation sequences[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(3): 149–154.
- [24] 刘思峰, 谢乃明, 等. 灰色系统理论及其应用 [M]. 6 版. 北京: 科学出版社, 2013.
Liu S F, Xie N M, et al. Gray systems theories and its applications[M]. 6th ed. Beijing: Science Press, 2013.
- [25] 黄辉. 基于改进累减还原方法的 DGM(1,1)_{IIR} 模型及其应用 [J]. 统计与决策, 2016(3): 80–83.
Huang H. The DGM(1,1)_{IIR} model based on improve inverse accumulating reduction operator and its application[J]. Control and Decision, 2016(3): 80–83.
- [26] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93–99.
Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 25(1): 93–99.