

考虑不完美维修的定期检测与备件策略联合优化

赵 斐^{1,2}, 刘学娟³

(1. 东北大学 工商管理学院, 沈阳 110819; 2. 东北大学秦皇岛分校, 秦皇岛 066004;
3. 北京科技大学 东凌经济管理学院, 北京 100083)

摘要 针对退化过程服从三阶段故障过程的单部件系统提出了定期检测与备件订购策略联合优化. 该策略下, 根据检测时系统的状态执行不同的维修活动: 当系统处于正常状态, 不执行任何维修活动; 若识别轻缺陷进行不完美维修并采用比例役龄回退模型描述不完美维修效果; 若识别严重缺陷则更换系统. 当更换系统时需考虑备件状态: 若处于存货状态则立即更换, 若正处于途中则到货时更换, 若未订货需立即订货并在到货时刻更换. 考虑所有更新事件采用更新报酬理论建立以最小化单位时间内期望成本为目标的模型, 同时优化检测周期和订货点. 最后, 设计枚举优化算法和离散仿真算法求解模型, 并在算例分析中验证模型的有效性和适用性.

关键词 检测; 预防性维修; 不完美维修; 备件; 延迟时间; 更新报酬理论

Joint optimization of periodical inspection and spare parts policies considering imperfect maintenance

ZHAO Fei^{1,2}, LIU Xuejuan³

(1. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China; 3. Donlinks School of Economics and Management, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract This paper proposed a joint periodical inspection and spare parts policy for a single-unit system subject to a three-stage failure process. In such a policy different maintenance activities are performed depending on the state of the system at inspections. When the system is in the normal state, do nothing; imperfect maintenance (IPM) is performed once a minor defect is found and the proportional age reduction model is adopted to describe the effect of IPM; however, once a severe defect is detected the system should be replaced. The spare parts state should be considered if the replacement is required for the system, and there are three different scenarios. The first is that spare parts are available such that replacement can be carried out immediately, the second is that spare parts have been ordered but not delivered so a delayed replacement is performed till the arrival time of spare parts, and the last is that no spare parts are ordered then an immediate order is placed and replacement till the arrival time of spare parts. The objective function minimizing the long-run expected cost per unit time is developed by considering all possible renewal events using the renewal award theorem in order to optimize the inspection interval and the ordering point. Finally, the enumeration optimization algorithm and discrete simulation algorithm are designed, respectively; and the effectiveness and applicability of the proposed model are illustrated by a numerical example.

收稿日期: 2016-10-17

作者简介: 赵斐 (1984-), 女, 河北衡水人, 讲师, 博士, 研究方向: 可靠性、预测和健康管理, E-mail: zhaofei@neuq.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金 (71701038); 教育部人文社会科学研究项目 (16YJC630174); 中央高校基本科研业务费 (N152303004); 河北省高等学校科学技术研究项目 (QN2017104)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71701038); Humanities and Social Sciences Research Youth Fund Project of Ministry of Education of China (16YJC630174); The Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (N152303004); Hebei Province Colleges and Universities Science and Technology Research Project (QN2017104)

中文引用格式: 赵斐, 刘学娟. 考虑不完美维修的定期检测与备件策略联合优化 [J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(12): 3201-3214.

英文引用格式: Zhao F, Liu X J. Joint optimization of periodical inspection and spare parts policies considering imperfect maintenance[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(12): 3201-3214.

Keywords inspection; preventive maintenance; imperfect maintenance; spare parts; delay time; renewal award theorem

1 引言

在工业企业中, 维修活动导致了备件需求, 因此维修决策与备件管理关系紧密. 不管是预防性维修或由随机故障导致的修复性维修, 若对系统进行更换则需考虑备件的可获取性. 显然, 若有备件立刻进行维修活动; 否则, 需延期更换系统或紧急订货^[1]. 对于决策者而言, 一方面要降低对系统进行预防性维修或修复性维修的成本, 另一方面还要降低备件持有成本和缺货成本. 然而, 许多维修策略优化研究未考虑两者之间的关系^[2], 假定备件是无限获取的, 这限制了维修策略模型的应用性.

针对维修与备件联合决策问题, 也有一些学者展开研究^[3-4]. Horenbeek 等对维修与备件库存的联合优化问题进行了综述^[5], 将已有模型按照三种维修策略(基于成组的维修策略, 基于役龄的维修策略、视情维修)与两种库存检查策略(定期检查策略、连续检查策略)的不同组合进行了分析. 然而, 大多数模型都假定一旦单部件系统或复杂系统中某部件达到规定役龄、预防性维修时刻、预防性维修阈值则对系统进行预防性更换(preventive replacement, PR), 若单部件系统或复杂系统中某部件发生故障则考虑修复性更换(corrective replacement, CR)^[6-12]. 无论是 PR 还是 CR 都使系统或部件恢复到新状态, 即更新. 但在实际维修活动中除了修复如新或修复如旧, 还可能通过修理使系统或部件恢复到新状态到故障状态之间的某一个状态, 即不完美维修; 目前针对不完美维修策略的研究较多^[13-14]. 然而, 在维修与备件联合策略问题中, 考虑不完美维修的研究还较少, Yu 等^[15]研究了可修系统的更换和订货问题, 假定系统退化服从几何过程且一旦系统故障, 对系统进行不完美维修; 当系统发生 $N-1$ 次故障时, 订购备件且备件提前期是随机的, 而在第 N 次故障发生且备件正处于存货状态时更换系统, 否则延期至备件到货时更换. 可一旦系统发生故障后再进行不完美维修, 很可能给环境或人员安全带来重大损失, 如炼钢厂中的转炉设备. 为此, 通常在系统发生故障之前的某个状态对其进行维修, 这种决策在实际设备管理中应用较广泛.

检测是常用的一种预防性维修方式, 通过识别系统状态采取维修活动; 而依赖于检测是否是连续的, 包括利用某种现代技术(传感器、热导)执行的在线状态监测和离散检测策略. 已有不少研究针对在线状态监测的视情维修与备件策略进行了联合优化, 但都假定维修活动是完美的^[8-10]; 但实践中并不是所有设备都能够采用在线状态监测技术, 所以离散检测策略仍作为一种重要的预防性维修方式. 检测以定期/非定期地对系统状态进行检查, 从而在系统发生潜在缺陷的早期进行预防以避免故障发生, 而有关离散检测的预防性维修策略研究已有许多, 但与备件订购联合决策的研究仍处于起步阶段. 延迟时间理论在预防性维修策略建模方面已得到了广泛应用, 并且能够通过建立检测周期与识别缺陷的关系对检测周期进行优化^[16]. 两阶段延迟时间理论将系统寿命周期划分为正常阶段和延迟时间阶段, 其中从新状态到缺陷发生点之间的时间域称为“正常阶段”, 而从缺陷发生点到故障点称为“延迟时间阶段”. Wang 首次研究了基于两阶段延迟时间理论的预防性维修与备件订购策略联合优化问题, 对多部件系统提出了定期成组检测策略与周期性检查备件策略联合模型, 同时优化订货量、订货周期和检测周期以最小化单位时间内的期望成本^[17]. 当系统中所含部件数目足够大时, 缺陷到达近似地服从齐次泊松过程; 基于此假设 Wang 进一步研究了订货周期内的随机故障数和预防性维修时刻识别的缺陷数目, 并建立了随机动态规划基本方程进行求解^[18]. 这两个研究中部件退化服从两阶段延迟时间理论, 所以部件可能的状态为正常、缺陷和故障; 因为故障无需检测即可识别且检测识别正常状态也无需进行预防性维修, 所以只有检测识别缺陷才进行维修活动, 且都假定进行预防性更换. 而实际中对部件状态的划分可能超过三个, 而基于不同的状态采取不同的维修方式, 例如不完美维修.

在工业企业中, 常采用红、黄、绿三种颜色描述设备退化水平, 红色表示系统处于严重缺陷状态、黄色意味着轻缺陷状态、绿色表示正常运转. 为此, Wang 首次提出了三阶段故障过程概念^[19], 即将两阶段延迟时间中的延迟时间阶段进一步细分为轻缺陷阶段和严重缺陷阶段; 已有相关检测策略优化的研究基于此理论进行建模^[20-21], 但仅考虑了维修策略且是完美维修. 由于此理论将系统状态划分为正常、轻缺陷、严重缺陷和故障状态四个, 这为管理者依据检测识别的不同状态进行不同决策提供了建模基础. 例如, 在钢厂的转炉冶炼过程中, 烟道系统由于要承受高温灼烤和冷却时的频繁变换循环, 易造成烟道疲劳开裂漏水等轻缺陷,

而严重时将影响钢水质量, 可视为严重缺陷; 维修人员常采用红黄绿描述其状态. 当前, 每隔固定周期对其状态进行检查, 若无漏水、裂缝则认为处于正常状态不采取任何维修活动; 若发现了轻微开裂或漏水则视为轻缺陷状态而进行局部性的补焊, 补焊仅使其恢复到正常工作, 并不是新状态; 若严重漏水仍能运转, 则需立即更换; 若烟道由于严重漏水无法运转则认为发生故障, 此时需要立即更换. 一旦决定对系统进行更换则涉及到设备管理部门与库存管理部门、采购部门的沟通; 因为若备件处于存货状态则立即从库存管理部门办理备件出库手续以删除更换系统, 若备件已订购未到货则需等待到货, 可此时若还未订购则需采购部门立即订货并等到货时刻进行更换. 针对烟道系统的检修与备件订购策略联合优化问题, 本论文将在三阶段故障过程理论基础上, 构建考虑不完美维修的定期检测与备件订购联合策略模型, 同时对检测周期和备件订货点进行优化以最小化单位时间内的期望成本.

2 问题描述

2.1 系统退化特征描述

1) 考虑仅含单个部件或仅有一种故障模式的系统, 为简化下文统称“系统”. 该系统退化过程服从三阶段故障过程, 即正常阶段、轻缺陷阶段、严重缺陷阶段, 三阶段相互独立且服从某分布. 如图 1 所示, 其中 $X_n (n = 1, 2, 3)$ 表示第 n 个阶段持续运行时间的随机变量; 从而系统状态空间划分为 $S = \{\text{正常、轻缺陷、严重缺陷、故障}\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

2) 每隔固定周期 $T = \alpha \cdot \Delta T$ 以成本 C_I 检查系统, 其中 ΔT 表示单位时间 (常定义为 1 天或 1 个班次, 即 8 小时) 且有 $\alpha \in \mathbb{N}$; 为了简便在企业中一般采用“天”作为决策单位, 因此本文中令 $\Delta T = 1$ 天. 任一检测 $T_k = kT (k \in \mathbb{N})$ 都能准确识别系统的真实状态, 即检测是完美的.

3) 如果检测识别系统正处于正常状态 s_1 , 不采取任何维修活动以保持系统继续运行; 当检测识别系统处于轻缺陷状态 s_2 , 需立即采取维修活动, 但该维修不能使系统返回到新状态, 即维修是不完美的; 然而, 一旦检测识别系统正处于严重缺陷状态 s_3 , 立即更换系统.

4) 系统故障时能够自动识别而无需检测且应立即更换故障系统, 但会带来一定的经济损失 C_F .

2.2 维修与备件订购联合策略描述

1) 对处于轻缺陷系统进行不完美维修时, 基于比例役龄回退模型假定在时刻 τ_k 进行第 k 次维修使上一次系统运行时间由 $(\tau_k - \tau_{k-1})$ 变为 $(1 - \rho)(\tau_k - \tau_{k-1})$, 其中 $\rho (0 \leq \rho \leq 1)$ 是改进因子, 用于描述维修效果^[13]. 当 $\rho = 1$ 时, 维修是完美的; $\rho = 0$ 时是最小维修; 而若进行不完美维修 ($0 < \rho < 1$), 维修后系统的初始累积役龄为 $(1 - \rho)\tau_k$, 即维修引起系统役龄的回退量为 $\rho\tau_k$. 从而得到系统在 τ_k 时刻进行不完美维修后, 在时刻 $t (t > \tau_k)$ 的有效役龄为 $t - \rho\tau_k$; 由此可知系统的有效役龄仅与上一次不完美维修时刻 τ_k 有关, 而与前几次不完美维修时刻无关. 如图 2 中所示, 第 $k-1, k$ 次维修的时刻分别为 20、30, 但第 k 次维修后系统的役龄回退量 $\rho\tau_k$ 为 5、初始累积役龄 $(1 - \rho)\tau_k$ 为 25, 因此第 k 次维修后时刻 $t (t = 40)$ 系统的有效役龄为 $t - \rho\tau_k = (1 - \rho)\tau_k + (t - \tau_k) = 25 + 10 = 35$.

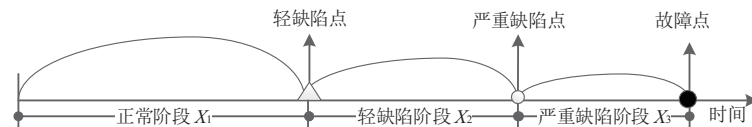


图 1 三阶段故障过程模型

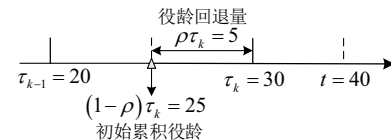


图 2 比例役龄回退模型举例, 其中 $\rho = 1/6$

若第 k 次不完美维修是由第 i 次检测引起的, 即 $\tau_k = T_i$, 则系统在时刻 T_i 进行不完美维修后的初始累积役龄为 $\Delta_{T_i} = (1 - \rho)T_i$. 该初始累积役龄会影响系统每个退化阶段的瞬时发生率, 由此得到系统在时刻 T_i 不完美维修后, 轻缺陷阶段、严重缺陷阶段、故障的瞬时发生率分别为:

$$\begin{aligned} \lambda_{i+1}(x) &= \lambda(x + \Delta_{T_i}), & x &= t - T_i \\ \phi_{i+1}(y) &= \phi(y + \Delta_{T_i}), & y &= t - T_i - x \\ \varphi_{i+1}(z) &= \varphi(z + \Delta_{T_i}), & z &= t - T_i - x - y \end{aligned} \tag{1}$$

其中, x 表示距离上一次不完美维修时刻 T_i 的时间长度、 y 是距轻缺陷点的时间长度、 z 是距严重缺陷点的时间长度; 当 $i = 0$ 时, 意味着任一检测均未识别系统的轻缺陷状态, 即未进行不完美维修. 由可靠性理论知

系统寿命的概率密度函数为 $f(t) = h(t) \cdot e^{-\int_0^t h(s)ds}$, 其中 $h(t)$ 表示故障率函数; 由式 (1) 推导出系统在时刻 T_i 不完美维修后三阶段的概率密度函数, 分别表示为:

$$\begin{aligned} f_{X_{1,i+1}}(x) &= \lambda_{i+1}(x) \cdot e^{-\int_0^x \lambda_{i+1}(s)ds} = \lambda(x + \Delta T_i) \cdot e^{-\int_0^x \lambda(s+\Delta T_i)ds} = \lambda(x + \Delta T_i) \cdot e^{-\int_{\Delta T_i}^{x+\Delta T_i} \lambda(s)ds} \\ f_{X_{2,i+1}}(y) &= \phi_{i+1}(y) \cdot e^{-\int_0^y \phi_{i+1}(s)ds} = \phi(y + \Delta T_i) \cdot e^{-\int_0^y \phi(s+\Delta T_i)ds} = \phi(y + \Delta T_i) \cdot e^{-\int_{\Delta T_i}^{y+\Delta T_i} \phi(s)ds} \\ f_{X_{3,i+1}}(z) &= \varphi_{i+1}(z) \cdot e^{-\int_0^z \varphi_{i+1}(s)ds} = \varphi(z + \Delta T_i) \cdot e^{-\int_0^z \varphi(s+\Delta T_i)ds} = \varphi(z + \Delta T_i) \cdot e^{-\int_{\Delta T_i}^{z+\Delta T_i} \varphi(s)ds} \end{aligned} \quad (2)$$

2) 在每个离散时刻 $t_o = o \cdot \Delta T$ ($o \in \mathbb{N}$) 订购备件, 经过提前期 L 后备件到货, 本文中认为 L 是固定常数且 $L = l \cdot \Delta T$ ($l \in \mathbb{N}$) (因为 $\Delta T = 1$, 所以 $t_o, L \in \mathbb{N}$). 对于单部件系统而言, 在其生命周期内, 仅需订货一次且订货量为 1. 备件处于存储状态时不会发生退化, 即始终处于新状态.

3) 令变量 V_{t_β} 表示备件在时刻 t_β 时的状态; 依赖于备件是否订货、是否到货, 考虑以下几种情形: $V_{t_\beta} = 0$ 表示未订货, 此时 $t_o > t_\beta$; $V_{t_\beta} = 1$, 虽已订货但备件正在送货途中, 即 $t_o + L > t_\beta$ 且 $t_o \leq t_\beta$; $V_{t_\beta} = 2$ 表示时刻 t_β 备件已到货且正处于存储状态 $t_o + L \leq t_\beta$.

4) 当检测识别系统处于严重缺陷状态 s_3 或系统发生故障 s_4 时, 需更换系统; 但可能因为备件不能够立即获取则需进行等待或紧急订货, 而关于紧急订货的决策将在以后研究中进一步建模. 为了建立基于定期检测的预防性维修与备件联合策略模型, 需根据拟更换系统时刻系统可能的状态 $\{s_3, s_4\}$ 以及备件状态进行决策, 可能发生的事件如下:

事件 1: 检测 T_k 识别系统处于严重缺陷状态 s_3 且备件状态为 $V_{T_k} = 0$, 此时立即订货并等待到货时刻对系统进行更新; 然而在此等待期间内, 由于系统仍处于运行状态则有可能发生故障;

事件 2: 检测 T_k 识别系统处于严重缺陷状态 s_3 且备件状态为 $V_{T_k} = 1$, 此时不得不等待备件到货时更换系统; 同样地, 在等待备件到货的期间内, 系统有可能发生故障;

事件 3: 检测 T_k 识别系统处于严重缺陷状态 s_3 且备件状态为 $V_{T_k} = 2$, 则立即更换系统;

事件 4: 系统在时刻 T_f 发生随机故障而此时备件状态为 $V_{T_f} = 0$, 需立即订货并等备件到货时刻更换系统;

事件 5: 系统在时刻 T_f 发生随机故障且备件状态为 $V_{T_f} = 1$, 等待备件到货时刻更换系统;

事件 6: 系统在时刻 T_f 发生随机故障且备件状态为 $V_{T_f} = 2$, 立即以备件更换故障系统.

5) 系统处于严重缺陷状态 s_3 时单位时间内等待备件的惩罚成本 $C_w^{s_3}$ 小于系统处于故障状态 s_4 时等待备件的惩罚成本 $C_w^{s_4}$. 这主要是因为当系统处于严重缺陷状态时, 虽然等待备件但此时系统仍在运转并产生收益, 因此设定 $C_w^{s_3} < C_w^{s_4}$ 合理. 单位时间内备件持有成本为 C_H .

6) 由于识别严重缺陷或系统发生故障而对系统进行更换时, 所花费的成本为 C_R ; 该费用既包括订购备件的成本、备件自身价值还涉及到对系统进行更换时支付的安装费、专业人员服务费、辅助材料费用等.

3 基于定期检测的预防性维修与备件订购联合策略模型

根据系统退化特征描述以及维修与备件订购联合策略描述, 将采用更新报酬理论建立优化模型; 决策变量为检测周期 T 、备件的订货点 t_o , 目标函数为最小化单位时间内的期望成本. 首先需要确定各种更新事件的概率, 由此得到相应的更新周期内的期望成本和期望长度; 基于问题描述中的六种事件, 还需针对任一事件考虑在严重缺陷被识别或故障发生前, 是否存在检测识别系统的轻缺陷状态.

3.1 检测 T_k 识别系统处于严重缺陷状态 s_3 , 备件状态为 $V_{T_k} = 0$ 或 $V_{T_k} = 1$

1) 计算更新概率

在检测 T_k 识别严重缺陷状态之前, 依赖于轻缺陷状态是否被识别且对系统进行了不完美维修, 需考虑两种不同的更新情况, 分别如图 3 和图 4 所示. 其中图 3 表示在检测时刻 T_k ($k = 1, \dots, \infty$) 之前, 任一检测都未识别轻缺陷状态; 而图 4 表明在时刻 T_k 之前, 检测 T_i ($i = 1, \dots, k-1; k = 2, \dots, \infty$) 最后一次识别系统轻缺陷状态 s_2 并进行不完美维修. 显然, 当在时刻 T_k 备件状态为 $V_{T_k} = 0$ 时, 需立即进行订货并在时刻 $T_R = T_k + L$ 进行更换, 其中 T_R 表示系统更新时刻; 而当时刻 T_k 备件正在途中时, 即 $V_{T_k} = 1$ 或 $t_o + L > T_k \cap t_o \leq T_k$, 需等到到货时刻 $T_R = t_o + L$ 更换系统. 在等待备件期间 $[T_k, T_R]$ 内无需进行检测直至

到更新时刻 T_R 更换系统, 在时刻 T_R 系统可能仍处于严重缺陷状态, 如图 3(a) 和图 4(a) 中所示; 但在此等待期间内系统也可能发生随机故障, 如图 3(b) 和图 4(b) 中所示, 下面将分别对这两种情况进行建模. 图中, “◆” 表示系统更新时刻, “★” 表示最后一次不完美维修时刻, “—” 表示系统在严重缺陷状态下运转并等待备件, “▨” 表示系统在故障状态下等待备件.

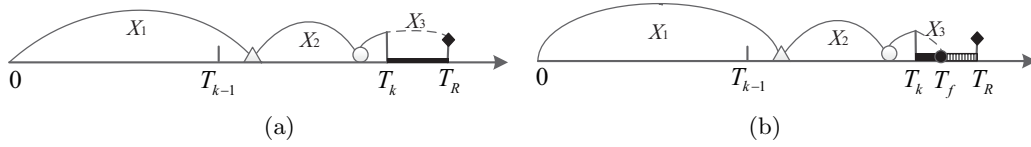


图 3 检测 T_k 识别状态 s_3 且 $V_{T_k} = 0$ 或 1 , T_k 时刻前没有检测识别状态 s_2

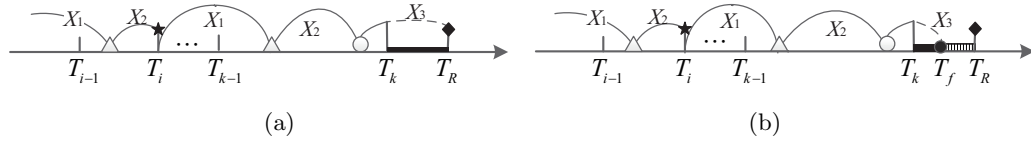


图 4 检测 T_k 识别状态 s_3 且 $V_{T_k} = 0$ 或 1 , 系统在时刻 T_i 进行最后一次不完美维修

若系统在等待备件期间 $[T_k, T_R]$ 内未发生故障, 如图 3(a) 和图 4(a) 所示, 得到更新概率如式 (3) 所示:

$$\begin{aligned} P_1(T_R) &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot P(T_{k-1} - T_i < X_1 < T_k - T_i, T_{k-1} - T_i < X_1 + X_2 < T_k - T_i, X_1 + X_2 + X_3 > T_R - T_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \int_{T_{k-1}-T_i}^{T_k-T_i} \int_0^{T_k-T_i-x} \int_{T_R-T_i-x-y}^{\infty} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $k = 1, \dots, \infty$. $P_{IPM}(T_i)$ 表示在时刻 T_i 对系统进行最后一次不完美维修的概率. 显然, $i = 0$ 意味着系统正处于初始时刻, 未进行不完美维修, 从而 $P_{IPM}(T_0) = 1$; 下文中含义相同. 若在 T_i 时刻前的上一次不完美维修发生在第 j 个检测, 则递推得到 $P_{IPM}(T_i) = \sum_{j=0}^{i-1} P_{IPM}(T_j) \int_{T_{i-1}-T_j}^{T_i-T_j} \int_{T_i-T_j-x}^{\infty} f_{X_{1,j+1}}(x) f_{X_{2,j+1}}(y) dy dx^{[13]}$.

如图 3(b) 和图 4(b) 所示, 系统在等待备件期间 $[T_k, T_R]$ 内也可能发生故障, 但仍需在故障状态下等待备件直至备件到货时刻 T_R 再进行更新. 其更新概率为:

$$\begin{aligned} P_2(T_k < T_f < T_R) &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot P(T_{k-1} - T_i < X_1 < T_k - T_i, T_{k-1} - T_i < X_1 + X_2 < T_k - T_i, T_k - T_i < X_1 + X_2 + X_3 < T_R - T_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \int_{T_{k-1}-T_i}^{T_k-T_i} \int_0^{T_k-T_i-x} \int_{T_k-T_i-x-y}^{T_R-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx \end{aligned} \quad (4)$$

2) 更新周期内的期望成本和期望长度

针对图 3(a) 和图 4(a) 中的更新事件可知, 系统在更新周期 $[0, T_R]$ 内的总成本为 $C_1(T, t_0)$, 如式 (5) 所示; 其中 $C_{IPM}(\rho)$ 表示每次不完美维修的费用, 该费用是改进因子 ρ 的增函数.

$$C_1(T, t_0) = k \cdot C_I + (T_R - T_k) \cdot C_w^{s_3} + \sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) + C_R \quad (5)$$

其中, 当 $k = 1$ 时 $\sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) = 0$. 结合式 (3) 中的更新概率, 得到系统在更新周期 $[0, T_R]$ 内的期望成本 $EC_1(T, t_0)$ 和期望长度 $EL_1(T, t_0)$:

$$EC_1(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_1(T, t_0) \cdot P_1(T_R) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k \cdot C_I + (T_R - T_k) \cdot C_w^{s_3} + \sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) + C_R \right] \cdot P_1(T_R) \quad (6)$$

$$EL_1(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} [T_R] \cdot P_1(T_R) \quad (7)$$

由式 (4) 得到系统在等待周期 $[T_k, T_R]$ 内发生随机故障且在备件到货时刻 T_R 进行更新的期望成本

$EC_2(T, t_0)$ 和期望长度 $EL_2(T, t_0)$:

$$EC_2(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k \cdot C_I + C_F + (T_f - T_k) \cdot C_w^{s_3} + (T_R - T_f) \cdot C_w^{s_4} + \sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) + C_R \right] \cdot P_2(T_k < T_f < T_R) \quad (8)$$

$$EL_2(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} [T_R] \cdot P_2(T_k < T_f < T_R) \quad (9)$$

其中, $T_f = T_i + x + y + z$.

3.2 检测 T_k 识别系统处于严重缺陷状态 s_3 , 备件状态为 $V_{T_k} = 2$

图 5 描述了检测 T_k 识别严重缺陷状态 s_3 且由于备件状态为 $V_{T_k} = 2$ 时立即进行更新的情况. 考虑到在检测时刻 T_k 备件状态为 $V_{T_k} = 2$, 则一定有 $t_o + L \leq T_k$; 显然, 当 $t_o + L = T_k$ 时, 备件刚到货; 否则 $t_o + L < T_k$ 意味着备件正处于存储状态.

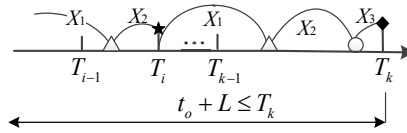


图 5 检测 T_k 识别严重缺陷状态 s_3 , 备件状态为 $V_{T_k} = 2$

对图 5 中的更新情况建立更新概率模型, 如下:

$$\begin{aligned} & P_3(T_R = T_k) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot P(T_{k-1} - T_i < X_1 < T_k - T_i, T_{k-1} - T_i < X_1 + X_2 < T_k - T_i, X_1 + X_2 + X_3 > T_k - T_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \int_{T_{k-1}-T_i}^{T_k-T_i} \int_0^{T_k-T_i-x} \int_{T_k-T_i-x-y}^{\infty} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx \end{aligned} \quad (10)$$

并得到该更新周期内的期望成本和期望长度, 分别为:

$$EC_3(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k \cdot C_I + (T_k - t_o - L) \cdot C_H + \sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) + C_R \right] \cdot P_3(T_R = T_k) \quad (11)$$

$$EL_3(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} [T_k] \cdot P_3(T_R = T_k) \quad (12)$$

3.3 系统在时刻 T_f 发生随机故障 s_4 , 备件状态为 $V_{T_f} = 0$

该事件情况下由于在 T_f 时刻备件状态为 0, 可知 $T_f < t_o$ 一定成立, 如图 6 中所示; 而依赖于 t_o 和 T_k 的大小, t_o 的取值范围可分为以下两种: $T_{k-1} < t_o < T_k$ 和 $t_o \geq T_k$. 因为系统故障时还未订货, 所以立即订货并在 L 单位时间后对系统进行更换, 所以更新时刻是 $T_f + L$.

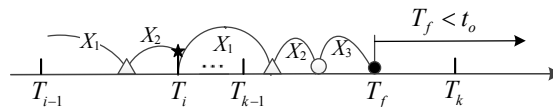


图 6 系统发生故障时未订购备件的更新事件

由此确定该事件的更新概率为:

$$\begin{aligned} & P_4(T_{k-1} < T_f < \min(t_o, T_k)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot P \left(T_{k-1} - T_i < X_1 < \min(t_o, T_k) - T_i, 0 < X_2 < \min(t_o, T_k) - T_i - X_1, \right. \\ & \quad \left. 0 < X_3 < \min(t_o, T_k) - T_i - X_1 - X_2 \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \int_{T_{k-1}-T_i}^{\min(t_o, T_k)-T_i} \int_0^{\min(t_o, T_k)-T_i-x} \int_0^{\min(t_o, T_k)-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx \end{aligned} \quad (13)$$

并得到该更新周期内的期望成本和期望长度, 分别为:

$$EC_4(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k-1) \cdot C_I + C_F + L \cdot C_w^{s_4} + \sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) + C_R \right] \cdot P_4(T_{k-1} < T_f < \min(t_0, T_k)) \quad (14)$$

$$EL_4(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} [T_f + L] \cdot P_4(T_{k-1} < T_f < \min(t_0, T_k)) \quad (15)$$

3.4 系统在时刻 T_f 发生随机故障 s_4 , 备件状态为 $V_{T_f} = 1$

此情况下故障点时刻 T_f 满足 $t_0 < T_f < t_0 + L$ 且由于系统是在检测区间 $[T_{k-1}, T_k]$ 内发生故障, 从而可确定 $\max(t_0, T_{k-1}) < T_f < \min(t_0 + L, T_k)$; 接下来针对此事件的各种可能情况分别进行建模.

1) 当 $t_0 \leq T_{k-1}$ 时, 如图 7 所示轻缺陷点、严重缺陷点和故障点均落在区间 $[T_{k-1}, \min(t_0 + L, T_k)]$ 上, 从而得到系统在 $T_f, T_f \in [T_{k-1}, \min(t_0 + L, T_k)]$ 发生故障的更新概率为:

$$\begin{aligned} & P_{51}(T_{k-1} < T_f < \min(t_0 + L, T_k)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot P \left(\begin{array}{l} T_{k-1} - T_i < X_1 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i, 0 < X_2 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i - X_1, \\ 0 < X_3 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i - X_1 - X_2 \end{array} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \\ & \int_{T_{k-1}-T_i}^{\min(t_0+L, T_k)-T_i} \int_0^{\min(t_0+L, T_k)-T_i-x} \int_0^{\min(t_0+L, T_k)-T_i-x-y} f_{X_1, i+1}(x) f_{X_2, i+1}(y) f_{X_3, i+1}(z) dz dy dx \quad (16) \end{aligned}$$

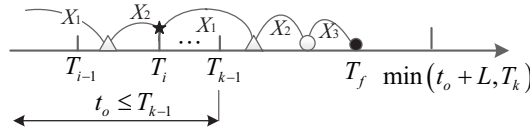


图 7 系统在 $T_f, T_f \in [T_{k-1}, \min(t_0 + L, T_k)]$ 发生故障, 备件状态为 $V_{T_f} = 1$

2) 当 $T_{k-1} < t_0 < T_k$ 时, 需进一步考虑轻缺陷点和严重缺陷点落在区间 $[T_{k-1}, \min(t_0 + L, T_k)]$ 上的三种可能情况, 如图 8 所示.

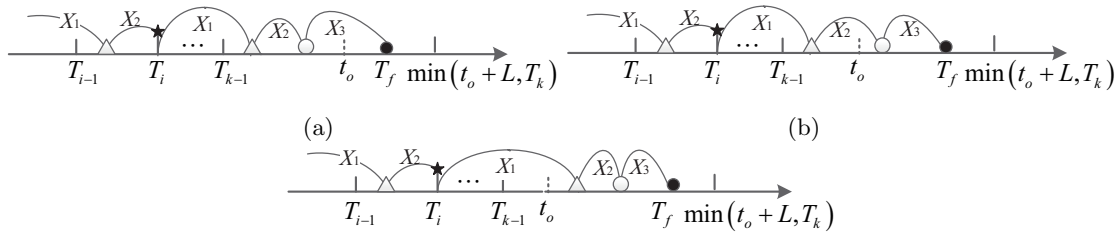


图 8 系统在 $T_f, T_f \in [t_0, \min(t_0 + L, T_k)]$ 发生故障, 备件状态为 $V_{T_f} = 1$

由此, 得到系统在 $T_f, T_f \in [t_0, \min(t_0 + L, T_k)]$ 发生故障且等待备件到货时刻进行更新的概率:

$$\begin{aligned} & P_{52}(t_0 < T_f < \min(t_0 + L, T_k)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \left\{ \begin{array}{l} P \left(\begin{array}{l} T_{k-1} - T_i < X_1 < t_0 - T_i, 0 < X_2 < t_0 - T_i - X_1, \\ t_0 - T_i - X_1 - X_2 < X_3 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i - X_1 - X_2 \end{array} \right) + \\ P \left(\begin{array}{l} T_{k-1} - T_i < X_1 < t_0 - T_i, t_0 - T_i - X_1 < X_2 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i - X_1, \\ 0 < X_3 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i - X_1 - X_2 \end{array} \right) + \\ P \left(\begin{array}{l} t_0 - T_i < X_1 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i, 0 < X_2 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i - X_1, \\ 0 < X_3 < \min(t_0 + L, T_k) - T_i - X_1 - X_2 \end{array} \right) \end{array} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{T_{k-1}-T_i}^{t_o-T_i} \int_0^{t_o-T_i-x} \int_{\min(t_o+L, T_k)-T_i-x-y}^{\min(t_o+L, T_k)-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx + \\ & \int_{T_{k-1}-T_i}^{t_o-T_i} \int_{t_o-T_i-x}^{\min(t_o+L, T_k)-T_i-x} \int_0^{\min(t_o+L, T_k)-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx + \\ & \int_{t_o-T_i}^{\min(t_o+L, T_k)-T_i} \int_0^{\min(t_o+L, T_k)-T_i-x} \int_0^{\min(t_o+L, T_k)-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由式 (16) 和 (17) 可计算得到更新周期内的期望成本 $EC_5(T, t_0)$ 为:

$$EC_5(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k-1) \cdot C_I + C_F + (t_o + L - T_f) \cdot C_w^s + \sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) + C_R \right] \cdot P_5(\max(t_o, T_{k-1}) < T_f < \min(t_o + L, T_k)) \quad (18)$$

其中 $P_5(\max(t_o, T_{k-1}) < T_f < \min(t_o + L, T_k)) = P_{51}(T_{k-1} < T_f < \min(t_o + L, T_k)) + P_{52}(t_o < T_f < \min(t_o + L, T_k))$.

对于此更新事件, 当备件到货时刻 $t_o + L$ 对故障系统进行更换, 所以得到更新周期内的期望长度 $EL_5(T, t_0)$ 为:

$$EL_5(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} [t_o + L] \cdot P_5(\max(t_o, T_{k-1}) < T_f < \min(t_o + L, T_k)) \quad (19)$$

3.5 系统在时刻 T_f 发生随机故障 s_4 , 备件状态为 $V_{T_f} = 2$

由于系统在时刻 T_f 发生故障时备件状态为 $V_{T_f} = 2$, 从而确定 $t_o + L \leq T_f$; 又因为系统在检测区间 $[T_{k-1}, T_k]$ 内发生故障, 得到故障点时刻 T_f 满足 $\max(t_o + L, T_{k-1}) < T_f < T_k$, 此时在故障时刻 T_f 立即更新. 下面通过比较 $t_o + L$ 和 T_{k-1} 计算此事件下的更新概率:

1) 当 $t_o + L \leq T_{k-1}$ 时, 系统轻缺陷点、严重缺陷点和故障点均落在区间 $[T_{k-1}, T_k]$ 内 (如图 9 所示), 由此得到系统发生故障且立即进行更新的概率为:

$$\begin{aligned} & P_{61}(T_{k-1} < T_f < T_k) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \\ & P(T_{k-1} - T_i < X_1 < T_k - T_i, T_{k-1} - T_i < X_1 + X_2 < T_k - T_i, T_{k-1} - T_i < X_1 + X_2 + X_3 < T_k - T_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \int_{T_{k-1}-T_i}^{T_k-T_i} \int_0^{T_k-T_i-x} \int_0^{T_k-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx \end{aligned} \quad (20)$$

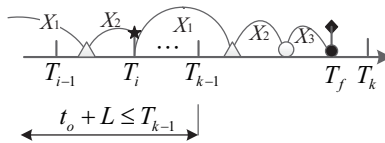


图 9 系统在时刻 T_f , $T_f \in [T_{k-1}, T_k]$ 发生故障, 备件状态为 $V_{T_f} = 2$

2) 当 $T_{k-1} < t_o + L < T_k$ 时, 针对轻缺陷点和严重缺陷点在区间 $[T_{k-1}, T_k]$ 上的三种可能情况 (如图 10 所示) 推导更新概率.

$$P_{62}(t_o + L < T_f < T_k) = \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \left\{ \begin{aligned} & P \left(T_{k-1} - T_i < X_1 < t_o + L - T_i, T_{k-1} - T_i < X_1 + X_2 < t_o + L - T_i, \right) + \\ & P \left(T_{k-1} - T_i < X_1 < t_o + L - T_i, t_o + L - T_i < X_1 + X_2 < T_k - T_i, \right) + \\ & P \left(t_o + L - T_i < X_1 < T_k - T_i, t_o + L - T_i < X_1 + X_2 < T_k - T_i, \right) \end{aligned} \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \left\{ \begin{aligned} & \int_{T_{k-1}-T_i}^{t_o+L-T_i} \int_0^{t_o+L-T_i-x} \int_{t_o+L-T_i-x-y}^{T_k-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx + \\ & \int_{T_{k-1}-T_i}^{t_o+L-T_i} \int_0^{T_k-T_i-x} \int_{T_k-T_i-x-y}^{T_k-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx + \\ & \int_{T_{k-1}-T_i}^{T_k-T_i} \int_0^{T_k-T_i-x} \int_0^{T_k-T_i-x-y} f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(z) dz dy dx \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

图 10 系统在时刻 $T_f, T_f \in [t_o + L, T_k]$ 发生故障, 备件状态为 $V_{T_f} = 2$

相应地, 得到系统发生故障后立即进行更新的期望成本为:

$$EC_6(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k-1) \cdot C_I + C_F + (T_f - t_o - L) \cdot C_H + \sum_{i=1}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot C_{IPM}(\rho) + C_R \right] \cdot P_6(\max(t_o + L, T_{k-1}) < T_f < T_k) \quad (22)$$

其中, $P_6(\max(t_o + L, T_{k-1}) < T_f < T_k) = P_{61}(T_{k-1} < T_f < T_k) + P_{62}(t_o + L < T_f < T_k)$.

由式 (20) 和 (21) 得到系统在时刻 $T_f(\max(t_o + L, T_{k-1}) + z < T_f < \max(t_o + L, T_{k-1}) + z + dz, z \in (0, T_k - \max(t_o + L, T_{k-1})))$ 发生故障的概率密度函数, 即

$$P(\max(t_o + L, T_{k-1}) + z < T_f < \max(t_o + L, T_{k-1}) + z + dz) / dz = \sum_{i=0}^{k-1} P_{IPM}(T_i) \cdot \left\{ \begin{aligned} & \int_{T_{k-1}-T_i+z}^{T_{k-1}-T_i+z-x} \int_0^{T_{k-1}-T_i+z-x} \{f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(T_{k-1} - T_i + z - x - y)\} dy dx + \\ & \int_{t_o+L-T_i}^{t_o+L-T_i} \int_0^{t_o+L-T_i-x} \{f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(t_o + L - T_i + z - x - y)\} dy dx + \\ & \int_{T_{k-1}-T_i}^{t_o+L-T_i} \int_0^{t_o+L-T_i+z-x} \{f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(t_o + L - T_i + z - x - y)\} dy dx + \\ & \int_{T_{k-1}-T_i}^{t_o+L-T_i} \int_{t_o+L-T_i-x}^{t_o+L-T_i+z-x} \{f_{X_{1,i+1}}(x) f_{X_{2,i+1}}(y) f_{X_{3,i+1}}(t_o + L - T_i + z - x - y)\} dy dx \end{aligned} \right\} / dz \quad (23)$$

由此, 得到更新期望长度为

$$EL_6(T, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{T_k - \max(t_o+L, T_{k-1})} [\max(t_o + L, T_{k-1}) + z] \cdot P(\max(t_o + L, T_{k-1}) + z < T_f < \max(t_o + L, T_{k-1}) + z + dz) \quad (24)$$

3.6 目标函数 —— 单位时间内的期望成本

由 Ross 的更新报酬理论建立以最小化单位时间内期望成本为决策目标、以检测周期 T 和备件订购点 t_o 为决策变量的优化模型^[22]:

$$C(T, t_o) = \frac{EC(T, t_o)}{EL(T, t_o)} = \sum_{w=1}^6 EC_w(T, t_o) / \sum_{w=1}^6 EL_w(T, t_o) \quad (25)$$

其中, $EC(T, t_o)$ 和 $EL(T, t_o)$ 分别表示更新周期内的期望成本和期望长度。

4 算例分析

4.1 参数设置

Weibull 分布常用于描述系统退化过程^[13], 所以本算例也采用 Weibull 分布描述系统退化的三个阶段; Weibull 分布的故障率函数为:

$$h(t; \alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha t)^{\beta-1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, t \geq 0 \quad (26)$$

其中, α 和 β 分别为尺度参数、形状参数. 表 1 给出了三阶段退化过程的初始故障率参数, 各成本参数如表 2 所示, 由于当改进因子 $\rho = 1$ 时意味着完美维修, 而系统进行完美更新的成本为 $C_R = 50$, 从而确定 $C_{IPM}(\rho) = C_R \cdot \rho$ ($0 < \rho < 1$). 本算例中时间单位是天, 成本参数单位为万元, 例如每天存储备件的费用为 0.2 万元, 订货提前期 $L = 7$ 天.

表 1 初始故障率参数

$\lambda_0(x)$		$\phi_0(y)$		$\varphi_0(z)$	
α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3
0.07	1.20	0.15	1.10	0.21	1.70

表 2 成本参数

C_I	$C_{IPM}(\rho)$	C_F	C_R	C_H	C_w^{s3}	C_w^{s4}
0.4	50ρ	200	50	0.2	1.2	2.5

4.2 枚举优化算法

为了求解模型 (25) 的最优检测周期 T^* 和订货点 t_o^* , 根据模型中系统在检测周期 $(T_{k-1}, T_k]$ 内发生各种更新事件的条件, 设计如下的枚举优化算法.

输入: 初始故障率参数、成本参数、 L 、 ρ

For $T = 1, 2, \dots$

For $t_o = 1, 2, \dots$

$EC(T, t_o) = 0; EL(T, t_o) = 0$

For $k = 1, 2, \dots$ %下面针对任一检测周期 $(T_{k-1}, T_k]$ 进行建模;

%当检测 T_k 识别系统的严重缺陷状态时

If $t_o > T_k$ %备件状态 $V_{T_k} = 0$, 立即订购并在时刻 $T_k + L$ 进行更新

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (6) + (8); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (7) + (9)$

Elseif $t_o \leq T_k \cap t_o + L > T_k$ %备件状态 $V_{T_k} = 1$, 等待备件到货时刻 $t_o + L$ 进行更新

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (6) + (8); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (7) + (9)$

Elseif $t_o + L \leq T_k$ %备件状态 $V_{T_k} = 2$, 立即在时刻 T_k 进行更新

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (11); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (12)$

End;

%系统在时刻 $T_f, T_f \in (T_{k-1}, T_k)$ 内发生随机故障

If $t_o \geq T_k$ %备件状态 $V_{T_f} = 0$, 立即订购并在时刻 $T_f + L$ 进行更新

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (14); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (15)$

Elseif $T_{k-1} < t_o < T_k$ %备件状态 $V_{T_f} = 0$ 或 1

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (14); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (15)$ % $V_{T_f} = 0$, 立即订购并等待备件到货

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (18); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (19)$ % $V_{T_f} = 1$, 等待备件到货

Elseif $t_o \leq T_{k-1} \cap t_o + L > T_{k-1}$ % $V_{T_f} = 1$, 等待备件到货时刻 $t_o + L$ 更新

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (18); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (19)$

Elseif $t_o + L \leq T_{k-1}$ %备件状态 $V_{T_f} = 2$, 立即以备件更换故障系统

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (22); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (24)$

Elseif $T_{k-1} < t_o + L < T_k$ %备件状态 $V_{T_f} = 2$, 立即以备件更换故障系统

$EC(T, t_o) = EC(T, t_o) + (22); EL(T, t_o) = EL(T, t_o) + (24)$

End;

End;

$C(T, t_o) = EC(T, t_o)/EL(T, t_o)$ % 计算目标函数: 单位时间内的期望成本

If $C(T, t_o) > C(T, t'_o)$, then 记录 $t_o^* = t'_o$ 和 $C(T, t_o^*)$; 结束 for 循环 End; % t'_o 为上一次循环中 t_o

End; %寻找当检测周期 T 固定时, 使目标函数 $C(T, t_o)$ 最小的订货点 t_o^*

End; %寻找使目标函数 $C(T, t_o)$ 最小时的最优解 (T^*, t_o^*)

输出: 最优解 (T^*, t_o^*) 以及单位时间内的最小期望成本值 $C(T^*, t_o^*)$.

4.3 离散仿真算法

图 11 中是模型离散仿真算法的流程图, 由此可以看出: 首先设置参数变量, 然后按照系统概率密度函数随机生成三阶段的持续长度, 并判断按照条件 $y > t$ 判定是否有检测识别轻缺陷状态, 若有则进行不完美维修; 否则继续判断条件 $z > t$, 如果成立则意味着检测 t 识别严重缺陷并根据备件的可能状态分别进行决策, 若不成立则表明系统在某检测周期内发生故障, 同样依照备件状态分别进行决策. 最后, 输出单位时间内的

期望成本 $C(T, t_0)$. 接下来将分别利用枚举优化算法和离散仿真算法删除验证解的有效性.

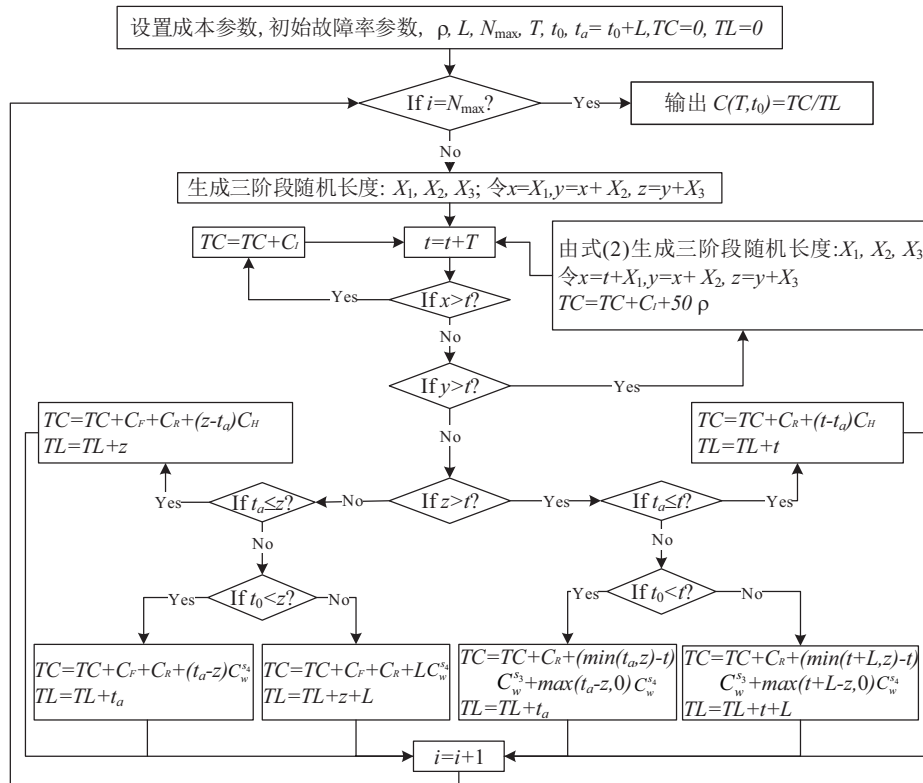


图 11 离散仿真算法

4.4 结果分析

根据所建立的目标函数模型, 即式 (25), 以及所提出的枚举优化算法, 利用 Matlab 软件编程对模型进行求解. 图 12 给出了当改进因子 $\rho = 0.6$ 时, 单位时间内期望成本随检测周期 T 和订货点 t_0 变化时的 3-D 趋势图. 由图 12 中结果得到最优检测周期 $T^* = 19$ 、订货时间 $t_0^* = 19$ 以及最优策略下单位时间内的最小期望成本 $C(T^*, t_0^*) = 5.6569$. 考虑到不易在图 12 中找出最优策略组合点, 进一步根据图 12 中结果给出了当检测周期 T 分别为 18、19、20, 订货时间在 15 到 25 之间变化时单位时间内的期望成本, 如图 13 所示. 通过对图 13 结果的观察很容易得到: 最优的联合策略是 $(T^*, t_0^*) = (19, 19)$. 由图 12 和图 13 所示, 当检测周期固定时, 单位时间内的期望成本随订货时间增加呈现出先降低后增加的趋势, 与实际情况相符合. 这是因为当订货时间较小时备件到货较早, 增加持有成本; 而当订货时间较大时, 易出现当系统故障或由于检测识别严重缺陷而对进行更换时, 仍未订购备件或备件未到货的情况, 从而增加了缺货引起的惩罚成本. 这也解释了在企业中管理者为了避免缺货造成的设备停工时间太久, 通常尽可能早的进行订货; 但由图 13 中单位时间内期望成本的趋势图不难看出订货时间也不宜过早, 需要根据系统退化参数和成本参数具体确定, 这也是进行预防性维修与备件订购联合策略优化的目的.

表 3 根据图 12 中结果给出了不同检测周期下, 使单位时间内期望成本最小的最优订货时间和对应的目标函数值. 为了对上述解进行验证, 采用图 11 中的离散仿真算法得到不同检测周期下的最优订货点和目标函数值, 如表 4 所示. 由表 4 中结果可以看出, 最优决策与枚举优化算法的结论一致, 由于不涉及到积分的计算, 若在实践中应用此联合策略可采用离散仿真计算进行决策以降低计算复杂度; 当检测周期特别小时 (5), 由于检测频繁可能导致较多的不完美维修且存储备件, 从而增加成本, 而检测周期特别大时 (50), 系统极大可能发生故障并导致成本增加. 从表 3 中结果可以看出在固定检测周期下, 最优订货点在第一个检测时刻 T 附近, 产生这种结果的原因包括两方面因素: 一是备件的持有成本小于由于缺货导致的惩罚成本 ($C_H < C_w^s, C_w^s$), 尤其远远小于随机故障引起的成本 ($C_H < C_F$); 二是与本算例中系统的退化参数有关, 即系统在检测时刻被识别处于严重缺陷状态才进行预防性更换, 所以通常在靠近检测时刻订购备件; 但由于在识别系统轻缺陷时进行不完美维修, 所以尽管在 $T = 5$ 时订货较早, 但由于识别严重缺陷而进行更换的时刻较晚, 所以最优策

略下的成本相对较高. 综上, 可看出本模型中最优解与成本参数有关, 后续将重点分析成本参数对最优解性质的影响.

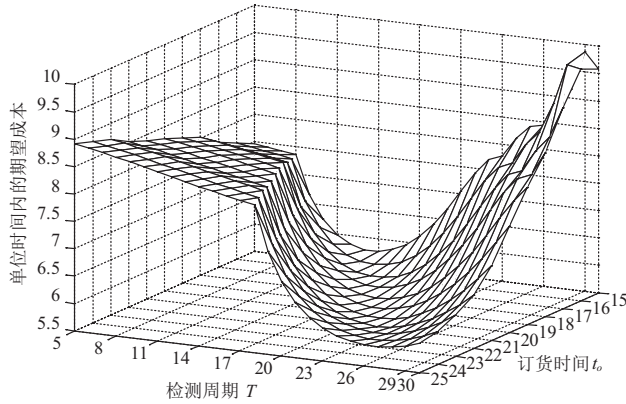


图 12 $\rho = 0.6$ 时, 单位时间内期望成本变化趋势图

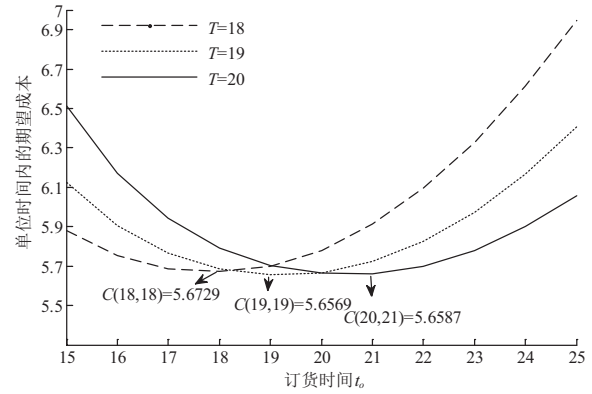


图 13 不同检测周期下, 单位时间内期望成本随订货时间变化的趋势值

表 3 不同检测周期下, 最优的订货时间和单位时间内的最小期望成本

T	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
t_o^*	13	15	16	18	19	21	22	23	24	25	27
$C(T, t_o^*)$	5.7731	5.7060	5.6788	5.6729	5.6569	5.6587	5.6661	5.6904	5.7574	5.8127	5.8756

表 4 基于离散仿真算法的最优解

T	5	10	15	18	19	20	25	30	35	40	45	50
t_o^*	8	11	14	17	18	21	26	30	33	38	42	46
$C(T, t_o^*)$	7.4666	6.5490	6.0121	5.7643	5.6212	5.6734	5.9062	6.5121	6.8526	7.2639	7.5268	7.9379

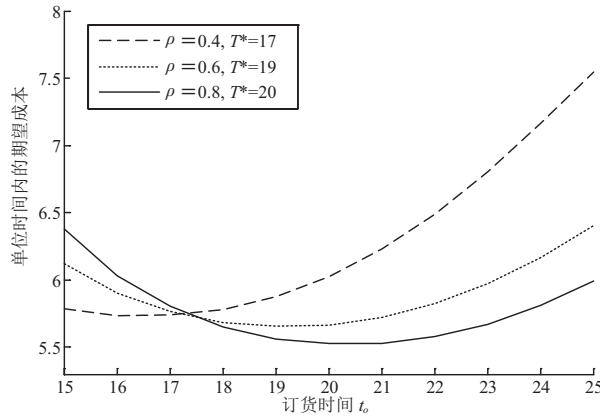


图 14 基于不同改进因子, 最优检测策略下单位时间内期望成本的趋势图

图 14 给出了当改进因子取不同值时, 最优检测策略下单位时间内期望成本随订货时间变化的趋势图. 下面从改进因子对最优检测周期和单位时间内最小期望成本两方面的影响进行分析:

1) 由计算结果得到: 改进因子 $\rho = 0.6$ 时最优的检测策略是 $T^* = 19$, 当改进因子 ρ 为 0.4、0.8 时, 最优的检测策略为 17、20. 可以推出随着改进因子 ρ 的增加, 最优的检测周期呈现逐渐增加的趋势, 这主要是因为改进因子 ρ 越大不完美维修后系统的初始役龄就越小, 使系统返回到更年轻的状态, 所以可延长检测周期对系统进行检测; 否则的话, 役龄越大的系统越容易发生故障, 需缩短检测周期以频繁检查系统, 防止发生故障.

2) 由图 14 中结果可以得出: 随着改进因子的增加, 单位时间内的最小期望成本降低; 然而, 由不完美维修成本与改进因子的关系 $C_{IPM}(\rho) = 50\rho$ 可知改进因子增加会导致成本的增加. 从而由目标函数表达式 $C(T, t_o)$ 可以得出结论: $\frac{EC(17,16)}{EL(17,16)} > \frac{\Delta EC(19,19)}{\Delta EL(19,19)}$ 且 $\frac{EC(19,19)}{EL(19,19)} > \frac{\Delta EC(20,20)}{\Delta EL(20,20)}$, 其中 $\Delta EC(19,19) = EC(19,19) - EC(17,16)$ 、 $\Delta EL(19,19) = EL(19,19) - EL(17,16)$ 、 $\Delta EC(20,20) = EC(20,20) - EC(19,19)$ 、 $\Delta EL(20,20) =$

$EL(20, 20) - EL(19, 19)$. 虽然本算例中结果表明: 随着不完美维修越来越接近于完美维修, 单位时间内的最小期望成本越来越小, 但对于其它退化参数和成本参数的模型该结论并不一定适用, 需另行计算并讨论.

5 结论

1) 基于检测的预防性维修在工业企业中应用仍较普遍, 而延迟时间理论能够建立检测周期与系统状态之间的关系. 基于钢厂中采用红黄绿描述烟道系统退化的不同程度, 采用了三阶段故障过程理论表示其退化过程, 从而将系统状态空间划分为正常、轻缺陷、严重缺陷和故障. 针对检测时刻系统所处的不同状态, 采取不同维修活动.

2) 引入比例役龄回退模型表示当检测识别系统处于轻缺陷状态时进行不完美维修对系统有效役龄的影响. 在考虑不完美维修的情况下, 建立了定期检测的预防性维修与备件订购联合策略模型, 通过最小化单位时间内的期望成本对检测周期和订货点进行优化. 通过算例分析的结果可以看出: 在给定的参数下, 最优订货点在前期的检测周期内, 这符合实际情况. 因为在实践中, 备件持有成本要远远小于由于缺货或系统故障导致的成本, 所以期望尽早订货. 但是, 当备件在存货状态有退化特征或提前期是随机变量的问题中则另行讨论, 这也是以后的研究之一.

3) 基于比例役龄回退模型, 不同的改进因子对系统初始役龄的影响不同, 从而影响系统轻缺陷、严重缺陷和故障的瞬时发生率. 在此基础上, 在算例中针对不同改进因子下的最优策略进行了分析并得出结论: 随着改进因子的增加, 最优的检测周期增加且单位时间内的最小期望成本降低. 然而, 对于其它退化参数系统或不同的成本模型, 最优策略需重新计算. 本文中所提出基于定期检测的预防性维修与备件订购联合策略模型将帮助管理者同时对检修计划和备件订购计划进行科学决策, 从企业整体角度降低成本.

参考文献

- [1] Wang W, Syntetos A A. Spare parts demand: Linking forecasting to equipment maintenance[J]. *Transportation Research Part E: Logistics & Transportation Review*, 2011, 47(6): 1194–1209.
- [2] Ahmad R, Kamaruddin S. An overview of time-based and condition-based maintenance in industrial application[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 63(1): 135–149.
- [3] Shibuya T, Dohi T, Osaki S. Optimal continuous review policies for spare part provisioning with random lead times[J]. *International Journal of Production Economics*, 1998, 55(3): 257–271.
- [4] Kawai H. An optimal ordering and replacement policy of a Markovian degradation system under incomplete observation: part II[J]. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 1983, 26 (6705): 279–292.
- [5] Horenbeek A V, Buré J, Cattrysse D, et al. Joint maintenance and inventory optimization systems: A review[J]. *International Journal of Production Economics*, 2013, 143(2): 499–508.
- [6] Jaarsveld W V, Dekker R. Spare parts stock control for redundant systems using reliability centered maintenance data[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(11): 1576–1586.
- [7] Nosoochi I, Hejazi S R. A multi-objective approach to simultaneous determination of spare part numbers and preventive replacement times[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(35): 1157–1166.
- [8] Wang L, Chu J, Mao W. A condition-based order-replacement policy for a single-unit system[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2008, 32(11): 2274–2289.
- [9] Wang L, Chu J, Mao W. A condition-based replacement and spare provisioning policy for deteriorating systems with uncertain deterioration to failure[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 194(1): 184–205.
- [10] Wang Z Q, Wang W, Hu C H, et al. A prognostic-information-based order-replacement policy for a non-repairable critical system in service[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, 64(2): 1–16.
- [11] Vaughan T S. Failure replacement and preventive maintenance spare parts ordering policy[J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 161(1): 183–190.
- [12] Panagiotidou S. Joint optimization of spare parts ordering and maintenance policies for multiple identical items subject to silent failures[J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, 235(235): 300–314.
- [13] Wang L, Hu H, Wang Y, et al. The availability model and parameters estimation method for the delay time model with imperfect maintenance at inspection[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(6): 2855–2863.
- [14] Zhang M, Gaudoin O, Xie M. Degradation-based maintenance decision using stochastic filtering for systems under imperfect maintenance[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 245(2): 531–541.
- [15] Yu M, Tang Y, Fu Y, et al. A deteriorating repairable system with stochastic lead time and replaceable repair facility[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 62(2): 609–615.

-
- [16] Wang W. An overview of the recent advances in delay-time-based maintenance modelling[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2012, 106(5): 165–178.
- [17] Wang W. A joint spare part and maintenance inspection optimisation model using the delay-time concept[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(11): 1535–1541.
- [18] Wang W. A stochastic model for joint spare parts inventory and planned maintenance optimisation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 216(1): 127–139.
- [19] Wang W. An inspection model based on a three-stage failure process[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(7): 838–848.
- [20] 王文彬, 赵斐, 彭锐. 基于三阶段故障过程的多重点检策略优化模型 [J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(1): 223–232.
Wang W B, Zhao F, Peng R. Modeling of the optimal multiple inspection policy based on a three-stage failure process[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(1): 223–232.
- [21] 王慧颖, 王文彬. 改进的基于三阶段故障过程状态检测模型 [J]. *系统工程与电子技术*, 2015, 37(7): 1709–1716.
Wang H Y, Wang W B. Improved inspection model based on a three-stage failure process[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2015, 37(7): 1709–1716.
- [22] Ross S M. *Stochastic processes*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1983.