

基于两个不确定参数乘积的鲁棒设施选址模型

彭 春, 李金林, 冉 伦, 曹雪丽

(北京理工大学 管理与经济学院, 北京 100081)

摘 要 传统设施选址往往被看作为确定问题, 但实际存在需求、成本、风险等不确定因素, 这些不确定因素增加了决策的困难. 本文在考虑设施选址中单一不确定因素基础上, 同时考虑需求和运输成本两个独立参数的不确定性, 且在模型中两者为乘积形式, 引入两个 budget 不确定集合刻画不确定性, 建立一个新颖的鲁棒设施选址模型, 并将非线性问题转化为易求解的鲁棒等价模型, 然后通过 CPLEX 和 MATLAB 编程求解. 最后, 以四川西北部的汶川等 13 个县市的应急物资临时供应点的选址为例, 确定最优的选址分配布局. 结果表明, 较之运输成本的不确定性, 需求的不确定性影响更显著, 且需求扰动对选址总成本和选址分配方案有明显的影响. 决策者可根据其风险偏好程度, 选择恰当的不确定水平参数组合, 以获得最优的总成本和选址分配方案.

关键词 设施选址; 鲁棒优化; 运输成本不确定性; 需求不确定性

Robust facility location model with two multiplicative uncertainties

PENG Chun, LI Jinlin, RAN Lun, CAO Xueli

(School of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract Traditional facility location is usually viewed as a deterministic problem. But there exist many uncertain factors (i.e. demand, cost, risk) in a varying environment, which increase difficulties in facility location. Based on considering single uncertainty respectively, we integrate two independent multiplicative uncertainties (demand and transportation cost) together, introduce two budget uncertainty parameters, formulate a novel and intractable nonlinear robust facility location model, and then converse this nonlinear problem into a robust mixed integer linear counterpart. We also use CPLEX and MATLAB for programming to solve this problem. Finally, we choose 13 cities to decide the location-allocation solutions for temporary emergency supplies in Northwest Sichuan. Numerical results show that, compared with transportation cost uncertainty, demand uncertainty has a strong impact on the total cost. Demand disturbance also affects the total cost and location-allocation solution significantly. According to their risk preferences, decision-makers choose the optimal combination of budget uncertainty and demand disturbance proportion, so as to minimize the total cost and get optimal location-allocation solution.

Keywords facility location; robust optimization; transportation cost uncertainty; demand uncertainty

1 引言

设施选址问题 (facility location problem, 简写 FLP), 即通常所说的配送中心、物流中心和服务设施等

收稿日期: 2016-12-12

作者简介: 彭春 (1988-), 男, 汉, 山东临沂人, 博士研究生, 研究方向: 鲁棒优化, 设施选址, 应急医疗资源优化配置, E-mail: pengchun12.18@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (71432002); 北京理工大学研究生国际学术交流项目 (1320012351601)

Foundation item: The Key Program of National Natural Science Foundation of China (71432002); International Graduate Exchange Program of Beijing Institute of Technology (1320012351601)

中文引用格式: 彭春, 李金林, 冉伦, 等. 基于两个不确定参数乘积的鲁棒设施选址模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(12): 3170-3181.

英文引用格式: Peng C, Li J L, Ran L, et al. Robust facility location model with two multiplicative uncertainties[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(12): 3170-3181.

的选址和相关资源的分派问题, 由于选址决策的长期艰巨性, 成本、时间、需求、风险及其它输入参数可能随着时间变化, 所以设施选址存在诸多的不确定因素, 增加决策的困难. 随着不确定决策理论的迅速发展, 使得运用不确定理论和方法解决设施选址问题成为国内外学者研究的热点. 根据选址参数的概率分布信息, FLP 分为两大类: 随机选址问题 (SFLP) 和鲁棒选址问题 (RFLP)^[1]. 对于随机选址问题, 参数已知或者未知参数的概率分布已知, 目标是求解最小期望成本 (最大期望利润) 或最大化满足某一约束的概率, 例如 P- 中值模型、最大覆盖 (概率) 模型等^[2]; 对于鲁棒选址问题, 在参数不确定情况下, 且概率分布信息未知, 不确定参数大多以离散情景或者特定的不确定集合的形式表示, 其目标函数为最优化系统最坏情况下的绩效 (成本、利润等) 或后悔值.

尽管近年来鲁棒优化理论得到了迅速发展, 但基于随机优化的设施选址研究较多. 随机设施选址可被看作作为一般化的运输问题, 利用随机变量或者借助随机生成的情景刻画不确定性, 但考虑新建设施的成本和库存成本. 国外学者对不确定条件的设施选址问题进行较为全面的研究^[1-3]; Ahmadi-Javid 等对医疗健康领域的应急医疗服务相关的设施选址进行较为详细的综述^[4]; Doyen 等运用两阶段随机规划建立人道主义援助设施选址模型, 将该两阶段随机模型等价于混合整数规划问题, 给出拉格朗日松弛求解算法^[5]; Bieniek 假设顾客的需求为独立同分布的随机变量, 但具体分布未知, 引入 recourse 函数建立两阶段随机设施选址模型^[6]; Mestre 等利用离散独立的需求的可能情景集合刻画不确定性, 建立了两个医院网络的选址 - 分配随机规划模型, 并比较了两个随机模型在处理实际问题的优势^[7]. 许多国内学者也针对随机设施选址进行研究, 研究方法主要为基于离散的情景刻画随机性, 建立对应的混合线性整数规划模型. 徐大川等系统地梳理了设施选址问题的近似算法, 尤其随机设施选址^[8]; 刘亚杰等考虑震后初期动员阶段对救援品需求的不确定性, 基于离散的情景, 建立选址 - 分配随机混合线性整数规划模型^[9]; 周愉峰等基于不同地区建立储备库的不同失灵概率, 建立应急物资储备库的可靠性 P- 中位选址模型^[10]; 朱建明基于时效性、均衡性和鲁棒性为核心的评价体系, 提出了摧毁情景下的多目标优化的设施选址模型^[11]; 王海军等考虑不确定需求和车辆运输时间, 利用机会约束规划方法, 建立最小化时间和成本的双目标随机规划应急物资配送模型^[12]. 更多关于随机设施选址的研究参考文献 [1-3].

随机规划为不确定设施选址提供了较好的方法, 但同样有一些局限: 确定代表性的情景及其概率非常困难; 通常选取相对较少数量情景, 一定程度上限制决策范围; 目标为最小化期望成本, 未能充分体现决策者的风险偏好, 如最坏情况下的策略等. 鲁棒优化在一定程度上改善上述不足, 目前常用方法有基于不确定集合和离散情景分析, 其目标为最优系统最坏情况下的绩效 (成本、利润) 或后悔值.

近年来, 随着鲁棒优化理论的不不断发展, 与之对应的鲁棒设施选址研究也逐渐丰富^[1,3], 但目前的研究大多往往仅考虑单一的不确定因素, 所用的方法主要分为两类: 基于参数的不确定集合和基于离散概率情景的 min-max 或者 max-min (如 p- 鲁棒). Baron 等建立鲁棒网络设施选址模型, 考虑多周期、多产品的不确定需求, 确定新建设施的位置、数量、容量、产量等参数, 且考虑两类需求不确定集合^[13]; Gabrel 等考虑多阶段的不确定需求下的鲁棒运输网络选址问题, 建立两阶段鲁棒选址模型^[14]; Gülpınar 等研究了提供单一产品、固定容量的不确定顾客需求的设施选址问题^[15]; Atamtürk 和 Zhang 利用两阶段的鲁棒优化方法研究不确定需求下的运输网络设计问题^[16]; An 等考虑设施发生中断风险和需求的波动变化, 建立了一个可靠的两阶段鲁棒 P- 中位设施选址模型, 并提出求解的列 - 约束启发式求解算法^[17]; Hatefi 和 Jolai 同样考虑由于自然灾害造成的中断风险和不确定需求, 利用离散概率情景刻画不确定性, 引入 p- 鲁棒约束, 建立鲁棒正向 - 逆向物流网络设计模型^[18]; Boukani 等基于枢纽选址的不确定性, 考虑容量限制, 利用 min-max 后悔值理论, 建立鲁棒枢纽选址模型, 并与确定模型进行比较^[19]. 国内学者在鲁棒选址问题方面的研究则相对较少, 张玲等建立基于不确定需求的灾后应急救援网络规划模型^[20]; 刘慧和杨超采用 box 不确定集合刻画需求的不确定性, 建立鲁棒服务设施网络设计模型^[21]. 与前面的研究方法不同, 钟慧玲等针对危险品道路运输问题, 提出一个双目标的 - 鲁棒的弧段覆盖选址模型, 各个场景下的加权覆盖率都大于等于最大覆盖率的 $1 - \alpha$ ^[22].

从目前已有的文献来看, 对于不确定条件下的鲁棒设施选址问题, 国外学者研究相对较多, 但大多是基于离散情景分析, 且仅考虑某单一不确定因素, 而同时考虑两个不确定因素且两个独立不确定参数以乘积的

形式出现的研究几乎没有,国内学者鲁棒选址建模研究还处于相对缓慢阶段.本文运用鲁棒离散优化理论,基于传统的设施选址问题,在分别考虑单一不确定因素的基础上,建立了一个新颖的同时含有需求和运输成本乘积不确定性的鲁棒选址模型,引入两个不确定水平参数,调节解的最优性和鲁棒性.最后,以四川西北部的汶川等 13 个县市的应急物资临时供应点的选址为例进行分析,确定最优的选址布局和物资分配方案.

2 不确定需求和运输成本下的鲁棒设施选址模型

2.1 鲁棒优化

鲁棒优化理论经 Ben-Tal、El-Ghaoui、Nemirovski 等发展,逐渐形成了目前的鲁棒优化理论的经典体系,形成了具有不同形式的参数不确定性的线性规划、二次规划和半定规划,提出了鲁棒线性规划、鲁棒二次规划、鲁棒半定规划模型^[23]; Bertsimas 和 Sim 提出了关于鲁棒线性规划的新方法,它保留了之前线性框架的优点,且对模型中每个约束的保护程度提供完全控制^[24].本文在 Bertsimas 和 Sim^[24] 基于 box 不确定集的鲁棒线性优化理论的基础上建立同时考虑不确定的需求和运输成本两个独立因素乘积的鲁棒选址模型.

考虑标准的线性规划问题 (LP): $\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$. 假设数据不确定性仅影响矩阵 \mathbf{A} 的元素,考虑矩阵 \mathbf{A} 的某一行 i , 即 $\mathbf{a}'_i\mathbf{x} \leq b_i$, 并且用 J_i 代表第 i 行中具有不确定性系数的集合. 对于任何元素 a_{ij} 可以被表示成在有界对称区间 $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ 上取值的随机变量 \tilde{a}_{ij} . 定义随机变量 $z_{ij} = (\tilde{a}_{ij} - a_{ij})/\hat{a}_{ij}$, 且在 $[-1, 1]$ 上取值并服从一个未知的对称分布, 其不确定集合为 $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} | \sum_j z_{ij} \leq \Gamma_i, -1 \leq z_{ij} \leq 1\}$. 在此基础上, 引入在区间 $[0, |J_i|]$ 上取值的不确定水平参数 Γ_i , 其作用是调节鲁棒优化模型抵抗解的保守水平的鲁棒性.

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j a_{ij}x_j + \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} \sum_j \hat{a}_{ij}x_j z_{ij} \leq b_i, \quad \forall i \quad (2)$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j, \quad \forall j \in J_i \quad (3)$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} \geq 0 \quad (4)$$

根据 Bertsimas 和 Sim^[24], 对于 (2) 中的内层最大化问题, 引入对偶变量 λ_i 和 p_{ij} , 模型 (1)~(4) 与模型 (5)~(10) 等价:

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j a_{ij}x_j + \Gamma_i \lambda_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i \quad (6)$$

$$\lambda_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij}y_j, \quad \forall j \in J_i \quad (7)$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j, \quad \forall j \in J_i \quad (8)$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad \forall j \in J_i \quad (9)$$

$$y_j, \lambda_i, p_{ij} \geq 0, \quad \forall j \in J_i \quad (10)$$

2.2 问题描述

假设和符号说明: 本文不考虑设施库存持有成本, 服务是同质的, 各选址设施点一次性供应顾客需求. 设 $i \in I, i = 1, 2, \dots, n$ 为需求顾客的集合; $j \in J, j = 1, 2, \dots, m$ 为候选设施集合; d_i 为顾客 i 的需求量, f_j 为开放 j 设施的固定成本, z_j 为设施 j 的容量限制; c_{ij} 为设施 j 供应顾客 i 的单位运输成本; y_{ij} 为设施 j 供应顾客 i 的需求的比例, 若 $y_{ij} = 1$, 则顾客 i 的所有需求全部来自设施 j 供应; $x_j = 1$, 如果决定开放 (新建) 设施 j , 否则, $x_j = 0$. 名义模型 (即确定选址模型, DM) 为:

$$(DM) \quad \min \sum_{j=1}^m f_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} d_i y_{ij} \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^m y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i y_{ij} \leq z_j, \quad \forall j \in J \quad (13)$$

$$y_{ij} \leq x_j, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (14)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, 0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (15)$$

该名义模型为一个典型的有容量限制的固定建设成本的设施选址问题, 式 (11) 为最小化总成本, 包括建立设施的固定成本和运输成本; 约束式 (12) 表示每个顾客的需求都要满足; 约束式 (13) 确保设施的库存限制能力; 约束式 (14) 为一个连接约束, 说明中只有已开放的设施才能够提供需求; 约束式 (15) 为 0-1 整数变量和非负变量.

2.3 鲁棒选址模型

目前物流运输网络中存在诸多的不确定因素, 如需求、成本、风险、运输时间等, 导致无法获取不确定参数的准确信息或者精确的概率分布. 本文在传统选址模型基础上, 建立鲁棒选址模型. 由于在实际中准确获得 d_i 和 c_{ij} 的准确数据完全不可能, 本文考虑顾客需求 d_i 和运输成本 c_{ij} 存在不确定性, 假设顾客需求和运输成本并没有直接的影响, 即两者相互独立.

在鲁棒选址问题中, 顾客需求为 \tilde{d}_i , 且 $\tilde{d}_i \subseteq [d_i - a_i u_i, d_i + a_i u_i]$, d_i 为名义模型中的顾客需求, a_i 为需求的扰动量, 其不确定集为 $U = \{\mathbf{u} : \sum_{i=1}^n u_i \leq \Gamma_u, \forall i = 1, 2, \dots, n, 0 \leq u_i \leq 1\}$; 单位运输成本为 \tilde{c}_{ij} , 且 $\tilde{c}_{ij} \subseteq [c_{ij} - b_{ij} v_{ij}, c_{ij} + b_{ij} v_{ij}]$, c_{ij} 为名义模型中的单位运输成本, b_{ij} 为运输成本的扰动量, 其不确定集合为 $V = \{\mathbf{v} : \sum_{i=1}^n v_{ij} \leq \Gamma_{v_j}, \forall j = 1, 2, \dots, m, 0 \leq v_{ij} \leq 1\}$, 其中 Γ_u, Γ_{v_j} 分别表示顾客需求和单位运输成本的不确定集合的不确定预算水平, 用来客观的衡量约束条件的保守程度, 体现决策者的风险偏好程度: Γ_u, Γ_{v_j} 的数值越大, 决策者的风险厌恶程度越高. 接下来先讨论单一不确定因素的设施选址问题.

i) 若仅考虑单位运输成本为 \tilde{c}_{ij} 存在不确定性, 由于约束条件中不含 \tilde{c}_{ij} , 则鲁棒模型仅目标函数发生变化, 鲁棒选址模型记为 RM_{tc} :

$$(RM_{tc}) \quad \min \sum_{j=1}^m f_j x_j + \max_{\mathbf{v} \in V} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_{ij} + b_{ij} v_{ij}) d_i y_{ij} \quad (16)$$

s.t. (12), (13), (14), (15)

命题 1 鲁棒选址问题 (16) 与混合线性整数问题 (17)~(20) 等价.

$$\min \sum_{j=1}^m f_j x_j + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij} d_i y_{ij} + t \quad (17)$$

s.t. (12), (13), (14), (15)

$$t \geq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \theta_{ij} + \sum_{j=1}^m \beta_j \Gamma_{v_j} \quad (18)$$

$$\theta_{ij} + \beta_j \geq b_{ij} d_i y_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (19)$$

$$t, \theta_{ij}, \beta_j \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (20)$$

证明 由于式 (16) 中含有最大化问题 $\max_{\mathbf{v} \in V} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} v_{ij} d_i y_{ij}$, 又由于不确定集合 V , 则可将内层最大化问题重新表述为式 (21):

$$\left\{ \max_{\mathbf{v}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \theta_{ij} + \sum_{j=1}^m \beta_j \Gamma_{v_j} : \sum_{i=1}^n v_{ij} \leq \Gamma_{v_j}, 0 \leq v_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in I, j \in J \right\} \quad (21)$$

根据强对偶性, 分别引入对偶变量 β_j 和 θ_{ij} , 得到对偶问题 (22).

$$\left\{ \min_{\theta, \beta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} v_{ij} d_i y_{ij} : \theta_{ij} + \beta_j \geq b_{ij} d_i y_{ij}, \quad \theta_{ij}, \beta_j \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J \right\} \quad (22)$$

因此, 将内层最大化问题转化为最小化问题, 引入辅助变量 t , 可得到问题 (17)~(20), 即命题 1.

ii) 若仅考虑顾客需求为 \tilde{d}_i 存在不确定性, 由于约束条件中仅约束式 (13) 含有 \tilde{d}_i , 则鲁棒模型目标函数和约束均发生变化, 约束式 (13) 为不确定需求限制, 此模型记为 RM_d :

$$(RM_d) \min \left\{ \sum_{j=1}^m f_j x_j + \max_{u \in U} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} (d_i + a_i u_i) y_{ij} \right\} \quad (23)$$

$$\text{s.t. } \max_{u \in U} \sum_{i=1}^n (d_i + a_i u_i) y_{ij} \leq z_j, \quad \forall j \in J \quad (24)$$

$$(12), (14), (15)$$

命题 2 约束式 (24) 与问题 (26) 等价.

证明 对于给定某 y , 由于顾客需求为 \tilde{d}_i 不确定, 易知, 约束式 (24) 等价于问题 (25).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i y_{ij} &= \sum_{i=1}^n d_i y_{ij} + \max_{u \in U} \sum_{i=1}^n a_i u_i y_{ij} \leq z_j, \quad \forall j \in J \\ \sum_{i=1}^n u_i &\leq \Gamma_u, 0 \leq u_i \leq 1, \quad \forall i \in I \end{aligned} \quad (25)$$

由于 $\sum d_i y_{ij}$ 不受不确定性的影响, 由于约束 (24) 中含有最大化, 分别引入对偶变量 θ_u^1 和 ρ_i^1 , 根据强对偶原理, 将内层最大化问题转化为最小化问题, 因此问题 (24) 和 (26) 等价. 故证之.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i y_{ij} + \sum_{i=1}^n \rho_i^1 + \Gamma_u \theta_u^1 &\leq z_j, \quad \forall j \in J \\ \rho_i^1 + \theta_u^1 &\geq a_i y_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J \\ \rho_i^1, \theta_u^1 &\geq 0, \quad \forall i \in I \end{aligned} \quad (26)$$

命题 3 鲁棒选址问题 (23) 与混合线性整数问题 (27)~(30) 等价.

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^m f_j x_j + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij} d_i y_{ij} + t \\ \text{s.t. } (12), (14), (15), (26) \end{aligned} \quad (27)$$

$$t \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i + \Gamma_u \gamma \quad (28)$$

$$\alpha_i + \gamma \geq a_i c_{ij} y_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (29)$$

$$t, \alpha_i, \gamma \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (30)$$

证明 此时目标函数和约束中均存在不确定需求参数. 对于目标函数中含有不确定需求的最大化问题, 可按照命题 1 的处理方式, 进行等价转换. 对于约束式中的不确定需求参数, 参考命题 2. 结合两部分, 易得到鲁棒选址问题 (23) 与混合线性整数问题 (27)~(30) 等价.

综合命题 2 和命题 3, 除了目标函数中存在不确定性外, 约束式 (13) 或 (24) 中也含有不确定需求, 命题 2 给出了含有不确定需求的约束 (24) 的等价形式, 相比之前的确定约束 (13), 约束式 (26) 明显被加强, 这使得鲁棒选址问题 RM_d 更为保守, 这在一定程度上也体现出需求的不确定性对模型有更大的影响, 与鲁棒选址模型 RM_{tc} 相比, 这在算例分析中也可以看出, 具体见图 1、表 4 和表 5.

iii) 在 i) 和 ii) 分别考虑单一不确定因素的基础上, 接下来同时考虑顾客需求为 \tilde{d}_i 和运输成本为 \tilde{c}_{ij} 同时存在不确定性, 则鲁棒设施选址决策模型记作 RM_{both} :

$$\begin{aligned} (RM_{both}) \min \left\{ \sum_{j=1}^m f_j x_j + \max_{u \in U, v \in V} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{c}_{ij} \tilde{d}_i y_{ij} \right\} \\ \text{s.t. } (12), (14), (15), (24) \end{aligned} \quad (31)$$

由于顾客需求和运输成本同时不确定, 且问题 (31) 中的需求与运输成本以乘积的形式存在, 这在一定程度上增加了模型的难度. 易知, 问题 (31) 为非凸的双层非线性规划模型, 但由于不确定集合均为 Box 不确定集,

此问题可转化为单层混合线性整数线性规划问题. 顾客需求为 \tilde{d}_i 和单位运输成本为 \tilde{c}_{ij} 分别包含于一个对称的有界闭区间, 则引入辅助变量 t :

$$t \geq \max_{\mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{c}_{ij} \tilde{d}_i y_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} d_i y_{ij} + \max_{\mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_{ij} a_i u_i + b_{ij} v_{ij} d_i + a_i b_{ij} u_i v_{ij}) y_{ij} \quad (32)$$

对于任意固定的 \mathbf{y} 值, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} d_i y_{ij}$ 为名义问题的总运输成本, 故 (32) 等价于固定总运输成本加上后半部分的最大化问题, 其关键是后半部分的最大化问题, 所以, 引入辅助决策变量 w_{ij} , 将非线性表达式线性化, 不妨令 $w_{ij} = u_i v_{ij}$, 由于 $0 \leq u_i \leq 1$, 则 (32) 可重新表达为问题 (33)~(40):

$$\max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_{ij} a_i u_i + b_{ij} v_{ij} d_i + a_i b_{ij} w_{ij}) y_{ij} \quad (33)$$

$$\text{s.t. } u_i \leq 1, \quad \forall i \in I \quad (34)$$

$$v_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (35)$$

$$-u_i + w_{ij} \leq 0, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (36)$$

$$-v_{ij} + w_{ij} \leq 0, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (37)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \leq \Gamma_u \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^n v_{ij} \leq \Gamma_{vj}, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (39)$$

$$u_i, v_{ij}, w_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (40)$$

命题 4 对于固定的分配 $y_{ij} \in [0, 1]$, 则任意给定的整数 Γ_u 和 Γ_{vj} , 问题 (33)~(40) 的最优解 $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*)$ 也为整数.

证明 要想证明命题 4 成立, 只需证明约束条件的矩阵具有完全幺模性 (total unimodularity, TU). 约束式 (34)~(39) 的矩阵表达形式如下:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{nm} & 0 \\ \mathcal{A}_{nm} & 0 & \mathcal{I}_{nm} \\ 0 & -\mathcal{I}_{nm} & \mathcal{I}_{nm} \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{nm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_{nm} \\ \mathbf{0}_{nm} \\ \mathbf{0}_{nm} \\ \Gamma_u \\ \Gamma_v \end{bmatrix} \quad (41)$$

其中, $nm = n \times m$, \mathcal{I}_n 表示 $n \times n$ 的单位矩阵, $\mathbf{1}_n$ 表示元素都为 1 的 $n \times 1$ 的向量, $\mathbf{0}_{nm}$ 表示元素都为 0 的 $nm \times 1$ 的向量, 矩阵 \mathcal{A}_{nm} 为主对角元素为 $n \times n$ 的方阵 (元素均为 -1), $\mathbf{E}_{nm} = [1_n \ 1_n \ \cdots \ 1_n]$.

根据文献 [25], 任取约束矩阵的一组行向量, 将行向量分成两个部分, 如果第一部分行向量的和减去第二部分行向量的和后对应的列向量的元素只有 0, -1 , 1, 则约束矩阵是完全幺模的. 即对于任意的一组行向量, 如果每个行向量乘以 1 或者 -1 后相加对应的列元素只有 0, -1 , 1, 则约束矩阵是完全幺模的. 考虑式 (41) 所示的约束矩阵, 将分块矩阵中的第三行乘以 -1 加上第四行, 则对应的列向量的元素只有 0, -1 , 1, 同理, 可进一步将行向量乘以 1 或者 -1 相加后使得对应的列向量的元素只有 0, -1 , 1, 则约束矩阵是完全幺模的, 即对于任意给定的整数 Γ_u 和 Γ_{vj} , 问题 (33)~(40) 的解也为整数. 由于 $0 \leq u, v, w \leq 1$, 所以实际上最优解在 0 或 1 处取得. 故证之.

命题 4 从理论分析问题 (33)~(40) 的最优解仅在由约束式 (34)~(39) 组成的多面体顶点取得.

由于问题 (33)~(40) 的最优目标为总成本最小化, 根据强对偶性, 以 u_i, v_{ij}, w_{ij} 为决策变量, 对于约束式 (34)~(39), 分别引入对偶变量 $\alpha_i, \theta_{ij}, h_{ij}, \pi_{ij}, \gamma, \beta_j$ 则模型 (33)~(40) 的对偶问题为 (42)~(46):

$$\min \Gamma_u \gamma + \sum_{j=1}^m \Gamma_{vj} \beta_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \quad (42)$$

$$\text{s.t. } -\sum_{j=1}^m h_{ij} + \gamma + \alpha_i \geq \sum_{j=1}^m c_{ij} a_i y_{ij}, \quad \forall i \in I \quad (43)$$

$$-\pi_{ij} + \beta_j + \theta_{ij} \geq b_{ij} d_i y_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (44)$$

$$h_{ij} + \pi_{ij} \geq b_{ij} a_i y_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (45)$$

$$h_{ij}, \pi_{ij}, \gamma, \beta_j, \alpha_i, \theta_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (46)$$

命题 5 鲁棒选址问题 (31) 与混合线性整数问题 (47) 等价.

证明 结合命题 1 和 2 的证明过程, 加上问题 (33)~(40) 的等价转化, 易得出命题 5 的结论, 在这里不再重复陈述.

因此, 将非凸的双层线性规划模型 (31), 转化为易求解的单层混合整数线性规划问题 (47), 且在多项式时间内易求解, 则可以调用目前现有的数学求解器 (如 CPLEX, GUROBI) 求解.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^m f_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} d_i y_{ij} + \Gamma_u \gamma + \sum_{j=1}^m \Gamma_{vj} \beta_j + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & (12), (14), (15), (26), (43) \sim (46) \end{aligned} \quad (47)$$

命题 6 当 $\Gamma_u = \Gamma_{vj} = 0$ 时, RM_{both} 等价于确定模型 (DM); 当 $\Gamma_u = 0$ 时, RM_{both} 等价于 RM_{tc} ; 当 $\Gamma_{vj} = 0$ 时, RM_{both} 等价于确定模型 RM_d .

证明 在考虑单一和两种不确定因素模型基础上, 根据不确定集合 U 和 V 的定义, 易解释命题 6. 当不确定预算水平 $\Gamma_u = \Gamma_{vj} = 0$ 时, 此时 $u_i = v_{ij} = 0$, 需求和运输成本均为确定的, 故等价于确定模型 (DM). 类似地, 当 $\Gamma_u = 0$ 或 $\Gamma_{vj} = 0$ 时, 则 $u_i = 0$ 或 $v_{ij} = 0$, 此时仅有运输成本不确定或者需求不确定, 所以 RM_{both} 等价于 RM_{tc} 或 RM_d .

命题 6 给出了各个模型之间的等价关系, 有助于分析各个不确定因素对模型的影响.

3 算例分析

四川西北部是地震、泥石流、滑坡等自然灾害发生比较密集的区域, 选取龙门山断裂带及其邻区作为地震等自然灾害发生的潜在区域. 在该实例中, 潜在的受灾点同时也是应急资源临时供应的候选地点, 选取可能的受灾点有理县、汶川、茂县、都江堰、郫县、彭州、什邡、绵竹、安县、北川、广汉、中江、三台共 13 个县市, 分别标号为 1, 2, \dots , 13. 根据 2014 年四川省统计年鉴、物价水平以及各地区的人均 GDP, 考虑饮用水、食品、药品和帐篷等应急资源, 各潜在的受灾点的建设成本和临时供应点的仓库容量 (见表 1) 及应急资源的名义需求和扰动量 (见表 2), 其中各受灾点的名义需求是根据各地区人口密度估计, 扰动量的比例分别为 2%、5%、10%, 表 2 为需求 5% 的扰动; 表 3 为根据 google 地图的路线距离得出的需求点到受灾点的名义运输成本; 在该问题中同样考虑考虑运输成本的扰动比例为 5%. 在考虑不确定水平 Γ_{vj} 时, 假设相对应各约束的变化幅度相等, 即 $\Gamma_{vj} = \Gamma$, 且不妨设 Γ_u, Γ_v 均为整数.

表 1 各候选设施的固定成本 (万元) 及容量限制 (单位)

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_j	3.06	3.83	4.20	2.75	3.75	3.13	3.97	3.23	1.94	1.36	3.70	1.78	1.36
z_j	1135	1207	1163	1101	1250	1392	1377	1097	1312	1139	1347	1105	1352

表 2 各需求点的名义需求量 d_i (单位) 及其扰动量 (5%)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
d_i	179	267	290	421	569	467	421	348	417	336	435	561	545
a_i	8.95	13.35	14.5	21.05	28.45	23.35	21.05	17.4	20.85	16.8	21.75	28.05	27.25

表 3 各需求点到各候选设施的名义运输成本 c_{ij} (元/单位)

(i, j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	57	97	132	161	183	212	230	274	286	209	273	313
2	57	0	40	76	105	127	156	174	219	230	153	213	258
3	97	40	0	116	146	167	196	153	127	117	193	258	216
4	132	76	116	0	34	36	84	103	147	159	81	142	187
5	161	105	146	34	0	24	60	78	123	134	57	117	158
6	183	127	167	36	24	0	32	54	98	109	38	98	156
7	212	156	196	84	60	32	0	27	76	88	25	64	134
8	230	174	153	103	78	54	27	0	48	56	56	78	118
9	274	219	127	147	123	98	76	48	0	13	83	73	82
10	286	230	117	159	134	109	88	56	13	0	94	83	143
11	209	153	193	81	57	38	25	56	83	94	0	65	122
12	273	213	258	142	117	98	64	78	73	83	65	0	49
13	313	258	216	187	158	156	134	118	82	143	122	49	0

通过 MATLAB 编写程序, 并调用 CPLEX 12.6 为求解器, 在 Intel i5 2.5GHz 4G RAM 的环境下进行求解. 记 Z^D 为名义模型的最优总成本, Z^R 为鲁棒模型的最优总成本, $\alpha = (Z^R - Z^D)/Z^D \times 100\%$ 为在不同不确定水平和扰动比例下的相对鲁棒指标, 在一定程度上可衡量最优解的鲁棒性. 根据命题 6, 当不确定水平 $\Gamma_u = \Gamma_v = 0$ 时, 此时鲁棒选址问题 RM_{both} 等价于名义选址模型 DM , $Z^D = 232160$; 当 $\Gamma_u = 0$ 时, 等价于仅考虑运输成本不确定问题 RM_{tc} ; 当 $\Gamma_v = 0$ 时, 等价于仅考虑需求不确定问题 RM_d . 图 1(左) 为仅考虑需求或运输成本不确定时, 总成本随不确定水平参数 Γ_u 或 Γ_v 的变化趋势. 结果表明, 当不确定水平参数 $\Gamma_v \leq 2$ 时, 随着 Γ_v 逐渐增加, 最优总成本增加, 当 $\Gamma_v \geq 2$ 时, 最优总成本趋于不变; 然而, 对于需求不确定水平参数 Γ_u 的增加, 最优总成本持续增加, 且总成本明显高于仅考虑不确定运输成本下的最优总成本. 因此, 这在一定程度上说明, 需求的不确定性比运输成本的不确定性对最优的总成本影响大.

表 4 不同不确定水平组合 (Γ_u, Γ_v) 下的最优总成本 (十万元)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	2.322	2.343	2.360	2.361	2.361	2.361	2.361	2.361	2.361	2.361	2.361	2.361	2.361	2.361
1	2.338	2.360	2.377	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378
2	2.354	2.376	2.393	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395
3	2.374	2.396	2.412	2.416	2.416	2.416	2.416	2.416	2.416	2.416	2.416	2.416	2.416	2.416
4	2.391	2.413	2.429	2.434	2.434	2.434	2.434	2.434	2.434	2.434	2.434	2.434	2.434	2.434
5	2.408	2.429	2.445	2.451	2.451	2.451	2.451	2.451	2.451	2.451	2.451	2.451	2.451	2.451
6	2.424	2.447	2.462	2.468	2.468	2.468	2.468	2.468	2.468	2.468	2.468	2.468	2.468	2.468
7	2.438	2.463	2.477	2.483	2.483	2.483	2.483	2.483	2.483	2.483	2.483	2.483	2.483	2.483
8	2.450	2.476	2.490	2.491	2.491	2.491	2.491	2.491	2.491	2.491	2.491	2.491	2.491	2.491
9	2.461	2.483	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494	2.494
10	2.464	2.485	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496
11	2.465	2.486	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498	2.498
12	2.467	2.488	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500
13	2.468	2.489	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501	2.501

当 $\Gamma_u = \Gamma_v = 13$ 时, 此时问题为绝对鲁棒选址问题, 此时最坏情况下的最优成本为 $Z^R(13, 13) = 250092$. 表 4 为在不同不确定水平组合 (Γ_u, Γ_v) 下, 需求和运输成本的扰动比例均 5% 时的最优选址总成本, 不确定参数组合 (Γ_u, Γ_v) 和总成本变化趋势如图 1(右) 所示. 根据表 4 可知, 当需求量的扰动比例为 5% 时, 随着不确定水平组合 Γ_u 和 Γ_v 的增加, 最小成本非递减, 但是增长的幅度不同, 当 Γ_u 和 Γ_v 较小时, 最优成本增加平缓或保持不变, 当 Γ_u 和 Γ_v 较大时, 最优总成本增加效果明显, 尤其 $Z^R(13, 13) = 250092$, 此时 $\alpha = 0.0772$, 较之名义模型, 最优成本增加 7.72%. 同样地发现, 当 Γ_v 较小且固定时, 随着 Γ_u 的增加, 最优总成本增加显著, 这说明需求的不确定性对最优总成本的影响较大. 同理当 Γ_u 较小且固定时, 随着 Γ_v 的增加,

最优总成本先逐渐缓慢增加后几乎保持不变, 这说明运输成本的不确定性对最优解的影响较小, 在这里得出与前面同样的结论. 所以综合图 1(右) 和表 4, 较之运输成本的不确定性, 需求的不确定性对总成本的影响占主导地位, 这也比较容易解释, 在鲁棒设施选址模型中, 运输成本仅出现在目标中, 然而需求不仅出现在目标中, 某一选址点容量的约束中也存在不确定需求 (约束式 24), 正如命题 2 所表述, 这在一定程度上加剧需求的不确定性对总成本的影响. 换句话说, 需求的波动与候选点库存容量的约束有关, 这会直接影响到候选点的选择. 由于临近点之间的名义运输成本相差不是很大, 运输成本对总成本的影响较小.

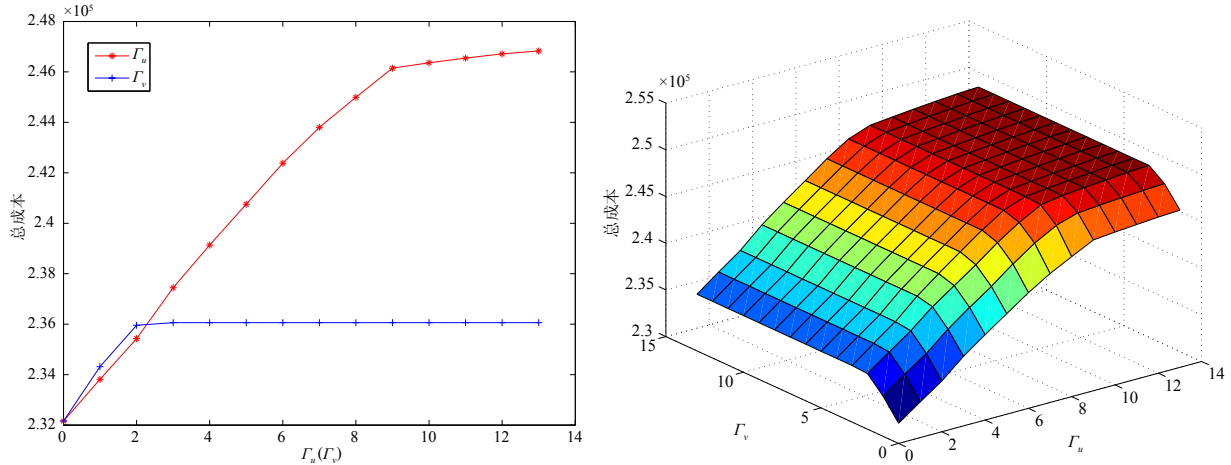


图 1 单一不确定因素下最优总成本随 Γ_u 或 Γ_v 变化 (左) 和最优总成本随 (Γ_u, Γ_v) 组合的变化 (右)

表 5 不同不确定水平及需求量扰动比例组合的计算结果比较 (十万元)

Γ_u	扰动比例	$\Gamma_v = 0$		$\Gamma_v = 2$		$\Gamma_v = 4$		$\Gamma_v = 6$		$\Gamma_v = 8$	
		Z_R	α	Z_R	α	Z_R	α	Z_R	α	Z_R	α
0	2%	2.322	0	2.360	1.64	2.361	1.68	2.361	1.68	2.361	1.68
	5%	2.322	0	2.360	1.64	2.361	1.68	2.361	1.68	2.361	1.68
	10%	2.322	0	2.360	1.64	2.361	1.68	2.361	1.68	2.361	1.68
2	2%	2.334	0.55	2.373	2.20	2.374	2.26	2.374	2.26	2.374	2.26
	5%	2.354	1.41	2.393	3.07	2.395	3.16	2.395	3.16	2.395	3.16
	10%	2.401	3.40	2.438	5.00	2.444	5.25	2.444	5.25	2.444	5.25
4	2%	2.345	1.02	2.384	2.68	2.385	2.75	2.385	2.75	2.385	2.75
	5%	2.391	3.01	2.429	4.61	2.434	4.84	2.434	4.84	2.434	4.84
	10%	2.478	6.76	2.512	8.18	2.512	8.18	2.512	8.18	2.512	8.18
6	2%	2.355	1.45	2.394	3.11	2.396	3.21	2.396	3.21	2.396	3.21
	5%	2.424	4.40	2.462	6.06	2.468	6.30	2.468	6.30	2.468	6.30
	10%	2.510	8.13	2.545	9.63	2.545	9.63	2.545	9.63	2.545	9.63
8	2%	2.365	1.85	2.403	3.49	2.406	3.62	2.406	3.62	2.406	3.62
	5%	2.450	5.53	2.490	7.25	2.491	7.31	2.491	7.31	2.491	7.31
	10%	2.534	9.13	2.569	10.67	2.569	10.7	2.569	10.7	2.569	10.7
10	2%	2.371	2.14	2.409	3.75	2.413	3.92	2.413	3.92	2.413	3.92
	5%	2.464	6.12	2.496	7.51	2.496	7.51	2.496	7.51	2.496	7.51
	10%	2.570	10.67	2.606	12.24	2.607	12.3	2.607	12.3	2.607	12.3
12	2%	2.377	2.37	2.414	3.97	2.418	4.17	2.418	4.17	2.418	4.17
	5%	2.467	6.27	2.500	7.67	2.500	7.67	2.500	7.67	2.500	7.67
	10%	2.626	13.12	2.664	14.74	2.664	14.7	2.664	14.7	2.664	14.7

对于不同的不确定水平 Γ_u 和 Γ_v 及需求量的扰动比例 (2%, 5%, 10%) 的各种组合进行计算结果见表 5, 其中运输成本的扰动比例为 5%. 由表 5 知, 随着 Γ_u 和 Γ_v 的增加, 模型解的保守性增强, 最优总成本增加. 当需求的扰动比例相同时, 最优总成本随着不确定水平的增加而增加, 决策者可根据自己对不确定性的风险偏好程度选择最佳的不确定水平组合 (Γ_u, Γ_v) ; 当不确定水平组合 (Γ_u, Γ_v) 相同时, 随着需求的扰动比例增



图 5 需求扰动比例 10% 的最优选址布局和分配

接下来分析不确定水平组合 (Γ_u, Γ_v) 下, 需求的不确定性对应急物资临时供应点的选址布局和物资分配网络的影响. 以需求的扰动比例为 5%, $\Gamma_u = 4$ 和 $\Gamma_v = 5$ 为例, 从 13 个候选点中共选取汶川、彭州、什邡、北川、中江和三台 6 个临时供应点, 具体如图 3 所示, 椭圆圈表示最优选址点, 箭头表示选定的临时供应点与其服务的需求点的分配. 例如汶川作为一个应急物资的临时供应点, 除提供自身的需求外, 还为理县、都江堰和茂县提供需求. 图 4 和图 5 分别为需求扰动比例为 2% 和 10% 时应急物资临时供应点的选址布局和分配网络. 比较图 3, 4 和 5 发现, 随着需求扰动比例的增加, 选取的临时供应点发生变化, 且数量增多, 由 6 个增加到 7 个, 物资的分配情况也会发生变化. 即使当需求扰动比例为 2% 和 5% 时, 同样选取相同的 6 个供应点, 但物资的分配发生变化 (见图 3 和 4).

此外, 当扰动比例不变 (如 10%) 时, 随着不确定水平 Γ_u 和 Γ_v 逐渐增加, 选取的供应点的数量逐渐增多, 这说明随着需求和运输成本的不确定性增加, 使得需要建立更多的物资供应点满足需求, 降低不确定带来的影响.

4 结论

本文基于传统的名义设施选址模型, 在分别考虑设施选址中单一不确定因素 (需求和运输成本) 的基础上, 同时考虑顾客需求和运输成本两个乘积参数的不确定性, 引入两个不确定水平参数 Γ_u 和 Γ_v 度量不确定性, 建立了一个新颖的鲁棒设施选址模型. 由于两个不确定参数为乘积形式, 使得所建鲁棒模型为非线性模型, 这增加了求解模型的难度. 本文利用鲁棒优化理论, 将非线性表达式线性化处理, 最终得出易求解的混合线性整数规划鲁棒等价问题, 并通过 CPLEX 和 MATLAB 混合编程实现求解. 最后, 以四川西北地区的 13 个县市的应急物资临时供应点的选址和分配为例, 确定最优的选址布局和物资分配方案, 从不确定性对选址总成本和最优的选址分配方案两个角度进行分析. 算例结果表明, 较之运输成本的不确定性, 需求的不确定性对选址总成本产生较大的影响, 且需求扰动比例对选址总成本和选址分配方案有明显的影响. 鲁棒选址模型有效, 同时模型最优解也具有较好的鲁棒性. 由于鲁棒优化刻画了决策对不确定性波动的控制程度和模型解的保守性, 而这些最直接地体现在不确定预算水平参数 Γ_u 和 Γ_v 上. 如果决策者为风险规避偏好, 则选取较大的 Γ_u 和 Γ_v 值和扰动比例, 为选址分配方案的有效可行提供较大的概率保证; 相反, 如果决策者为风险追求偏好, 则选取较小的 Γ_u 和 Γ_v 值和扰动比例, 但此时就要承担不确定性可能带来的损失; 如果风险中性, 则选择一个折中的确定性组合方案. 所以, 决策者可根据自己对不确定性的风险偏好程度选择最佳的不确定水平组合和需求扰动比例, 以获得最优总成本和选址分配方案, 同时为相关部门提供建议和决策支持.

本文所提出的鲁棒设施选址模型为单阶段的静态模型, 而在一些实际问题 (如应急物资的配置等), 可能随着时间的推移配置不同数量的物资. 因此, 将本文的模型扩展为动态多阶段的设施选址和资源分配问题, 并考虑设施中断风险, 这是接下来进一步研究的方向.

参考文献

- [1] Snyder L V. Facility location under uncertainty: A review[J]. IIE Transactions, 2006, 38(7): 547–564.
- [2] Daskin M S. Network and discrete location: Models, algorithms, and applications[M]. John Wiley & Sons, 2011.
- [3] Snyder L V, Atan Z, Peng P, et al. OR/MS models for supply chain disruptions: A review[J]. IIE Transactions, 2016, 48(2): 89–109.
- [4] Ahmadi-Javid A, Seyedi P, Syam S S. A survey of healthcare facility location[J]. Computers & Operations Research, 2017, 79: 223–263.
- [5] Doyen A, Aras N, Barbarosoğlu G. A two-echelon stochastic facility location model for humanitarian relief logistics[J]. Optimization Letters, 2012, 6(6): 1123–1145.
- [6] Bieniek M. A note on the facility location problem with stochastic demands[J]. Omega, 2015, 55: 53–60.
- [7] Mestre A M, Oliveira M D, Barbosa-Póvoa A P. Location-allocation approaches for hospital network planning under uncertainty[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 240(3): 791–806.
- [8] 徐大川, 杜东雷, 吴晨晨. 设施选址问题的近似算法综述 [J]. 数学进展, 2014, 43(6): 801–816.
Xu D C, Du D L, Wu C C. A survey on approximation algorithms for facility location problems[J]. Advances in Mathematics, 2014, 43(6): 801–816.
- [9] 刘亚杰, 王文峰, 雷洪涛, 等. 不确定需求条件下大规模抗震救灾应急动员优化方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2910–2919.
Liu Y J, Wang W F, Lei H T, et al. Mobilization optimization method for large-scale emergency earthquake disaster relief with uncertain demands[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(11): 2910–2919.
- [10] 周愉峰, 马祖军, 王恪铭. 应急物资储备库的可靠性 P-中位选址模型 [J]. 管理评论, 2015, 27(5): 198–208.
Zhou Y F, Ma Z J, Wang K M. A reliability P-median location model for relief supplies reserve bases[J]. Business Review, 2015, 27(5): 198–208.
- [11] 朱建明. 损毁情景下应急设施选址的多目标决策方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(3): 720–727.
Zhu J M. Methods of multi-objective decision-making emergency facility location problem under failure scenario[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2015, 35(3): 720–727.
- [12] 王海军, 杜丽敬, 胡蝶, 等. 不确定条件下的应急物资配送选址 - 路径问题 [J]. 系统管理学报, 2015, 24(6): 828–834.
Wang H J, Du L J, Hu D, et al. Location-routing problem for relief distribution in emergency logistics under uncertainties[J]. Journal of Systems & Management, 2015, 24(6): 828–834.
- [13] Baron O, Milner J, Naseraldin H. Facility location: A robust optimization approach[J]. Production and Operations Management, 2011, 20(5): 772–785.
- [14] Gabrel V, Lacroix M, Murat C, et al. Robust location transportation problems under uncertain demands[J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 164: 100–111.
- [15] Gülpinar N, Pachamanova D, Çanakoğlu E. Robust strategies for facility location under uncertainty[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 225(1): 21–35.
- [16] Atamtürk A, Zhang M. Two-stage robust network flow and design under demand uncertainty[J]. Operations Research, 2007, 55(4): 662–673.
- [17] An Y, Zeng B, Zhang Y, et al. Reliable p-median facility location problem: Two-stage robust models and algorithms[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2014, 64: 54–72.
- [18] Hatefi S M, Jolai F. Robust and reliable forward-reverse logistics network design under demand uncertainty and facility disruptions[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(9): 2630–2647.
- [19] Boukani F H, Moghaddam B F, Pishvaei M S. Robust optimization approach to capacitated single and multiple allocation hub location problems[J]. Computational and Applied Mathematics, 2016, 35(1): 45–60.
- [20] 张玲, 王晶, 张敏. 基于不确定需求的灾后应急救援网络规划模型与算法 [J]. 运筹与管理, 2014, 23(3): 49–55.
Zhang L, Wang J, Zhang M. Emergency network planning model and algorithm based on uncertain demand[J]. Operations Research and Management Science, 2014, 23(3): 49–55.
- [21] 刘慧, 杨超. 需求不确定的服务设施网络设计模型鲁棒性研究 [J]. 运筹与管理, 2016, 25(1): 117–125.
Liu H, Yang C. Robust research on service facility network design problem with demand uncertainty[J]. Operations Research and Management Science, 2016, 25(1): 117–125.
- [22] 钟慧玲, 庄楠, 张冠湘, 等. α -鲁棒的危险品道路运输应急设施选址问题 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(5): 1262–1268.
Zhong H L, Zhuang N, Zhang G X, et al. α -Robust emergency facilities location problems for hazardous materials transportation[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(5): 1262–1268.
- [23] Ben-Tal A, El Ghaoui L, Nemirovski A. Robust optimization[M]. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- [24] Bertsimas D, Sim M. The price of robustness[J]. Operations Research, 2004, 52(1): 35–53.
- [25] Hoffman A J. Total unimodularity and combinatorial theorems[J]. Linear Algebra and its Applications, 1976, 13(1–2): 103–108.