

跳跃自激发与非对称交叉回馈机制下的期权定价研究

朱福敏¹, 郑尊信¹, 吴恒煜^{2,3}

(1. 深圳大学 经济学院, 深圳 518060; 2. 暨南大学 管理学院, 广州 510000; 3. 金融安全协同创新中心, 成都 610000)

摘要 跳跃集聚和波动率非对称回馈是股票价格运动过程中不可忽视的重要特征. 基于动态跳-扩散半鞅随机过程, 本文提出了具有时变跳跃到达率和波动率的双因子交叉回馈机制的期权定价模型, 推导了跳-扩散交叉回馈模型的一般化风险中性变换关系; 同时借助序贯贝叶斯方法对模型和跳跃风险溢价进行校准, 并对道琼斯工业平均指数 (DJX)、标普 500 指数 (SPX)、苹果 (APL)、IBM、JP 摩根 (JPM) 股票进行实证研究. 研究发现, 它们的跳跃到达率和波动率都呈现集聚性和非对称回馈效应, 且跳跃到达率具有更强的持续性和更大的杠杆系数; 跳跃风险溢价在定价中占主要地位. 期权定价的实证研究还表明, 双因子交叉回馈模型具有最小的期权定价误差, 定价能力明显优于单向回馈的跳-扩散模型.

关键词 期权定价模型; 跳跃自激发行为; 非对称交叉回馈机制; 序贯贝叶斯参数学习

Option pricing for the dynamics of jump-diffusion model with jump self-exciting and asymmetric cross-feedback

ZHU Fumin¹, ZHENG Zunxin¹, WU Hengyu^{2,3}

(1. College of Economics, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China; 2. School of Management, Jinan University, Guangzhou 510000, China; 3. Collaborative Innovation Center of Financial Security, Chengdu 610000, China)

Abstract Jump clustering and volatility asymmetric feedback are important features in stock markets. This paper studies the option pricing issues for a dynamics of jump-diffusion process, which considers the mechanism of time-varying jump arrival rates, diffusion volatility clustering and the asymmetric cross-feedback effect. First, this paper presents the no-arbitrage conditions of equivalent martingale measures for the general jump-diffusion process based on local risk neutral valuation relationship; and then estimates the parameters and jump risk premium of the dynamic jump-diffusion model using the sequential Bayesian learning approach; Finally is the empirical research on the standardized European options of S&P500 Index and Dow Jones Industrial Average, APPLE, IBM and JP Morgan. Our study shows the significant evidence of the jump self-exciting, volatility clustering and asymmetric cross-feedback; these jumps also have a higher persistent influence and show a greater leverage effect to the stock markets; the dynamics of the cross-feedback jump-diffusion model have better performance in option pricing compared with these one-way-feedback jump-diffusion models. Jump risk premium is significantly higher than that of diffusion risk, which plays a dominant role in the process of asset pricing.

Keywords option pricing model; jump self-exciting; asymmetric cross-feedback; sequential Bayesian learning approach

收稿日期: 2016-05-23

作者简介: 朱福敏 (1985-), 男, 江西赣州人, 讲师, 博士, 研究方向: 金融工程, 金融计量; 郑尊信 (1979-), 男, 福建福清人, 教授, 博士, 研究方向: 金融工程, 数理金融; 吴恒煜 (1970-), 男, 广东雷州人, 教授, 博士, 研究方向: 金融工程, 金融经济学.

基金项目: 国家自然科学基金 (71601125, 71471119); 教育部人文社会科学研究青年基金 (16YJC790030)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71601125, 71471119); Humanity and Social Science Planning Fund of Ministry of Education of China — Youth Fund (16YJC790030)

中文引用格式: 朱福敏, 郑尊信, 吴恒煜. 跳跃自激发与非对称交叉回馈机制下的期权定价研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(1): 1-15.

英文引用格式: Zhu F M, Zheng Z X, Wu H Y. Option pricing for the dynamics of jump-diffusion model with jump self-exciting and asymmetric cross-feedback[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2018, 38(1): 1-15.

1 引言

随机跳跃和波动率集聚是金融市场的两类重要特征。次贷危机以来,股市的暴跌行为呈现出极强的集聚性和持续性,偶然的一次暴跌往往会对金融市场造成持续性的巨大冲击,使得衍生品市场亦受到牵连和影响^[1-6]。为了研究金融市场存在上述现象时的期权定价方法,本文提出了服从半鞅随机过程的动态无穷跳-扩散双因子交叉回馈模型,用以捕获股市的跳跃自激发和波动率非对称回馈机制,并给出一般化跳-扩散模型的风险中性定价框架;通过对 SPX、DJX 指数,以及 APL、IBM 和 JPM 等代表性个股进行续性矩阵分析、序贯贝叶斯推断,量化了其跳跃自激发和波动率集聚水平。这些研究结论将有助于丰富现代资产定价理论,为跳跃风险的评估和监督管理提供新视角。

2 研究综述

20 世纪 60 年代资产定价理论模型刚刚提出,许多学者就对模型假设进行了大量的实证研究^[7-8]。而后,随机跳跃和动态波动率逐渐成为现代资产定价模型的重要议题。Eraker, Johannes, Polson^[9] 采用收益率及波动率都带有跳跃的连续时间随机波动率模型对标普 500 以及纳斯达克 100 指数进行诊断和估计,并给出了联跳行为存在的证据。传统的跳跃模型认为跳跃强度是一个常数。而金融危机发生之后,该假设明显与实际市场表现不符。实际上,市场中发生跳跃的概率在变化,跳跃强度亦随着时间而改变,以至出现集聚和联跳现象。Eraker^[1] 的实证研究表明,市场中不仅存在联跳行为,而且时变的跳跃强度在期权和收益率的联合估计方面具有更好的表现。Lee, Mykland^[10] 对标普 500 指数及一些个股高频交易数据进行了非参数统计检验,他们也发现随机跳跃的间隔是非常不规则的,于是建议在收益率建模中考虑时变的跳跃强度。Christoffersen 等^[3] 则在 GARCH 模型的基础上建立了时变跳跃强度的离散时间模型,并从期权和收益率数据中得到了跳跃集聚的证据,发现跳跃过程的风险溢价高于波动率的风险溢价。Ait-Sahalia, Cacho-Diaz, Laeven^[11] 针对同一市场的跳跃集聚效应(或跳跃自激发 self-exciting)和不同市场间的跳跃互激发现象(cross-exciting),提出了一类简化形式的跳跃集聚模型来研究跳跃传染机制,并建议将跳跃强度作为市场压力的一项指标。他们发现,包括美国在内的 5 类指数都存在跳跃自激发和互激发现象。Fulop 等^[4] 则提出了随机波动率的跳跃自激发模型,研究了联跳行为、集聚现象和非对称回馈效应。其研究结果也表明,2008 年经历金融危机之后时变跳跃强度变得越来越显著。

当然,常见的泊松跳跃模型无法解释市场存在的大量的高频率小跳跃。Madan 等^[12] 采用了无穷活动率的 VG 这一 Levy 过程来研究股价的非连续性运动,允许任意时间内发生无限次跳跃行为。实证研究显示,VG 跳跃在收益率拟合和期权定价方面具有良好的表现。Lee, Mykland^[10] 针对高频交易数据的非参数推断也证实,不管是个股还是指数,其跳跃行为都属于无穷活动率类型。Li, Wells, Yu^[13], Fulop, Li, Yu^[4] 则直接采用了 VG 这一无穷跳跃研究随机波动率和跳跃行为。吴恒煜等^[6] 构建了一类无穷活动率的条件 Levy-GARCH 模型进行期权定价的实证研究,研究显示无穷跳跃相比有限跳跃具有更好的表现,其中 VG 及调和稳态模型都能捕获尖峰、厚尾特征,表明无穷跳跃行为在期权定价模型中起着重要作用。

另外,金融市场的波动率和跳跃行为不是彼此孤立存在的,跳跃也被证明具有非对称的回馈效应。张维等^[5] 借鉴行为金融理论中关于前景理论的研究成果,构造了一类基于前景理论决策框架的投资者,并通过数值模拟的方法验证了波动不对称性。事实上,资产价格的跳跃行为同样呈现聚集、自激发以及长记忆性的特点,且对波动率的变化亦存在非对称回馈效应。陈浪南,孙坚强^[14] 构建了一类 ARVI-GARCH-J 的混合 GARCH 模型,使依赖条件波动率的自回归条件跳跃强度控制跳跃行为发生的概率,并应用于中国、香港、台湾、道琼斯及纳斯达克指数的实证研究,证明跳跃行为与条件波动率之间相互直接回馈,且条件波动率亦对跳跃预期产生显著的回馈效应。Fulop 等^[4] 的研究也发现,资产收益率负向的跳跃可以同时收益波动率和跳跃强度产生回馈作用,这种回馈效应也是非对称的。吴恒煜等^[6] 进一步表明股市的纯跳跃行为不仅存在持续性,还具有显著的杠杆效应,并影响期权定价的表现。

期权定价中考虑动态的跳跃到达率、波动率,这给模型的参数估计和期权定价带来了极大的困难。Eraker 等^[1], Li, Wells, Yu^[13], Fulop, Li, Yu^[4], 吴鑫育等^[15] 在研究中采用了贝叶斯方法进行模型的估计,并考

虑了状态的不确定性或参数的不确定性, 改进了风险溢价的估计精度, 表明不确定性对资产定价有重要影响. Christoffersen 等^[3]、吴恒煜等^[6], 通过局部风险中性关系推导了满足无套利条件的期权定价模型, 给出了非高斯情形下的定价框架; 吴恒煜等^[6], Fulop 等^[4] 分别针对 Levy-GARCH 和 Levy-SV 模型引入了序贯贝叶斯参数学习方法, 并研究了该方法在风险管理、波动率预测及期权定价上的表现. 参数学习方法在风险溢价、风险测度和期权定价三个层面上都有更稳健的表现. 这种序贯贝叶斯学习方法考虑了参数不确定性, 一方面可以影响收益率分布的尾部行为, 另一方面, 实践中的投资者也能够根据最新形势序贯地更新自己的信念, 并逐步改进自己的认知, 从而得到更加可靠的估计.

在上述文献背景下, 本文提出了时变跳跃到达率和波动率的跳 - 扩散双因子交叉回馈模型, 用以研究跳跃自激发行为和波动率回馈机制下的期权定价问题. 同时, 在平稳性分析的基础上, 量化无穷跳跃行为的群聚程度、杠杆效应及非对称性, 并研究跳跃测度等价鞅关系、分析跳跃风险的溢价机制; 进一步针对跳跃和波动率等多维潜在变量, 采用序贯贝叶斯参数学习方法, 考虑状态和参数的双重不确定性, 在此基础上进行期权定价的实证研究, 并以半鞅动态跳 - 扩散模型为基准, 论证双因子交叉回馈模型期权定价的优越性.

本文的主要内容安排如下: 第三部分在半鞅下建立无穷跳 - 扩散的交叉回馈模型, 在平稳性分析的基础上, 给出跳跃自激发记忆矩阵和波动率回馈的矩阵; 第四部分, 介绍局部风险中性估值和历史滤波模拟两种定价方法, 推导了一般化的动态跳 - 扩散双因子期权定价模型的风险中性条件; 第五部分为本文的实证研究, 介绍了序贯贝叶斯估计方法, 并应用于标准普尔 500 指数、道琼斯工业平均指数、苹果、IBM 和 JPM 股票, 进行期权定价实证研究; 第六部分为本文的结论.

3 价格模型

3.1 跳扩散半鞅随机过程

本文采用的价格过程与 Eraker^[1], Lee, Mykland^[10], Ait-Sahalia 等^[11], 和 Fulop, Li, Yu^[4] 的假设类似, 即股票价格对数收益率的随机微分方程可写成如下动态跳 - 扩散的半鞅形式

$$dL_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + x_t dJ_t \quad (1)$$

这里, L_t 表示价格的对数, μ_t 表示漂移率. $\sigma_t dW_t$ 为随机扩散项, $x_t dJ_t$ 为跳跃项, W_t 表示 Winner 过程, σ_t 为扩散瞬时波动率; x_t 表示即时跳跃幅度, 本文采用无穷跳跃的 VG 过程来描述跳跃形态, J_t 为跳跃到达率的计数器, 它由时变的跳跃强度和跳跃活动率控制. 假设跳跃强度及跳跃到达率随时间而变化, 因此 dJ_t 可以作为资产跳跃活动率及跳跃风险的测度. 作为计数器, dJ_t 表示瞬时的跳跃到达率, 是单位时间内随机跳跃已经发生的次数, 与有限跳跃模型通常所用的跳跃强度不同. 由于本文假设随机跳跃是无穷活动率的, 其跳跃强度为无穷大, 因此不能直接采用跳跃强度来表示跳跃风险. 本文避开跳跃强度这一潜在变量, 使用跳跃到达率作为跳跃风险指标, 一方面适用于所有无穷活动率的跳跃模型, 另一方面减少了隐变量, 降低了模型复杂性, 使用跳跃到达率在时变 Levy 过程中也是常见的做法, 参见 Fulop 等^[4], Li 等^[13], 吴恒煜等^[6]. (1) 式也是时变 Levy 过程, 该模型假设收益率受到两种不同类型的冲击: 一种服从正态分布, 其连续扩散的波动率为 σ_t , 另一种是跳跃行为造成的非连续性冲击, dJ_t 为跳跃行为的到达率. Variance Gamma (VG) 过程是无限跳跃 Levy 过程的一种方式, 可以表示为两个 Gamma 过程的差:

$$x_t = \dot{\Gamma}_t(C, M) - \dot{\Gamma}_t(C, G) \quad (2)$$

此时, VG 的均值和方差分别为

$$\begin{cases} \mu_J = \frac{C}{M} - \frac{C}{G}, \\ \sigma_J = \frac{C}{M^2} + \frac{C}{G^2}. \end{cases}$$

其中, VG 过程的跳跃测度和矩母指数分别表示为

$$\begin{cases} v(dx) = \begin{cases} C \frac{\exp(Gx)}{|x|} 1_{(x<0)} dx, \\ C \frac{\exp(-Mx)}{x} 1_{(x>0)} dx, \end{cases} \\ \varphi_x(u) = C \log \frac{GM}{GM + (M - G)u - u^2}. \end{cases}$$

我们采用半鞅跳 - 扩散随机过程, 并假设随机跳跃服从 VG 这一无穷活动率模型, 使得模型既能够捕获类似泊松这样的大跳跃, 也能捕获比扩散还小的无穷小跳跃. 进一步令跳跃的实际到达率与时间相关, 则便于分析跳跃的集聚效应和自激发行为, 而扩散和跳跃的凸度修正部分, 则指定在半鞅模型的不确定性漂移项中.

3.2 跳跃风险溢价

根据离散观测变量的特征, 此节进一步对半鞅模型进行离散化, 并得到相应的风险溢价. 用 z_t 表示扩散因子 dW_t , h_t 代表局部已实现跳跃到达率 dJ_t , 那么对数收益率可以表示为

$$y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \mu_t - \varphi_x(h_t) - \frac{\sigma_t^2}{2} + h_t x_t + \sigma_t z_t \quad (3)$$

这里, z_t 服从标准正态分布, 跳跃随机因子的矩母指数为 $\varphi_x(u) = \log E[e^{ux}]$, 用以对跳跃项进行凸度修正, 使该随机过程成为一个指数鞅. 资产对数收益率的连续漂移率可拆解为

$$\mu_{t+1} = r_{t+1} + \lambda_J h_{t+1} + \lambda_D \sigma_{t+1} \quad (4)$$

上式将收益率分解为三部分: 1) 来源于资产无风险收益的时间价值; 2) 来源于承受跳跃冲击的风险溢价和补偿; 3) 来源于扩散波动率的风险溢价. 这里, λ_J 表示单位跳跃风险的市场价格, λ_D 表示单位扩散风险的市场价格.

3.3 跳跃率自激发、波动率集聚和非对称回馈机制

为研究动态跳跃强度和波动率之间的相互影响和作用机制, 采用下式来全面捕获跳跃自激发、波动率集聚和非对称的交叉回馈效应. 在离散框架下, 令扩散率和跳跃到达率 (包括自身影响和交叉影响) 的演变过程为:

$$\begin{pmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 (x_t - \gamma_J)^2 \\ \sigma_t^2 (z_t - \gamma_D)^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

若用 V_t 代表收益率的总方差, 那么它由扩散导致的方差和跳跃导致的方差组成. 这里, α_{10}, α_{20} 分别为已实现跳跃到达率和条件波动率的截距项, 而 $\beta_{ij}, i, j = 1, 2$ 则反映了 j 的历史状态对 i 状态的滞后影响. 同理, $\alpha_{ij}, i, j = 1, 2$ 反映了 j 的历史冲击对 i 状态的回馈效应, 当 $i = j$ 时, 表示自身回馈, $i \neq j$ 为交叉回馈; γ_J, γ_D 则分别体现跳跃和扩散冲击的杠杆系数, 用以捕获信息对波动率冲击的非对称性. 此模型能够完整地描述波动率集聚、跳跃自激发和非对称的交叉回馈效应, 它既包含自身影响, 又包含交叉影响, 因此我们称之为“跳跃自激发和波动率集聚的双因子跳 - 扩散交叉回馈模型” (cross-feedback jump-diffusion model with self-exciting and clustering, 后文简称为 CFJDEC). 根据 $\alpha_{ij}, \beta_{ij} = 0, i \neq j$ 是否成立的设定, CFJDEC 模型实际上内嵌了多种特殊的跳跃自激发模型, 下文再作详细说明.

Eraker^[1], Ait-Sahalia 等^[11] 和 Fulop, Li, Yu^[4] 认为, 跳跃的出现不仅自身激发出后续的跳跃行为, 还会导致波动率发生联跳, 并引起各自的非对称回馈效应, 因此跳跃行为对波动率的回馈是一项不可忽视的重要特征. 而 (5) 式所表示的模型含有上述模型的特征之外, 还额外考虑了跳跃和扩散对彼此的持续性影响和交叉的非对称回馈, 具有更好的兼容性. 为了量化跳跃和扩散冲击的持续性水平和波动率回馈程度, 这里采用记忆矩阵和回馈矩阵来分解上述动态过程.

令向量 $V_t = (h_t^2, \sigma_t^2)'$, 并用 X_t 表示跳 - 扩散的联合冲击, 即 $X_t = (x_t, z_t)'$, 那么 (5) 式可以简写为如下向量形式:

$$V_{t+1} = C + \beta V_t + \alpha V_t (X_t, \Upsilon) \quad (6)$$

向量 C 为常数, 矩阵 α 反映了各项元素的回馈效应. β 反映了各项元素的回归关系, Υ 捕获了回馈效应的非对称性. 现将回馈矩阵和持续性矩阵 A, B 分别表示为如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

这里 $B = \beta + A$, 对应地, A_{11}, A_{22} 为自身回馈, A_{12}, A_{21} 为互回馈. B_{11}, B_{22} 为自我持续, B_{12}, B_{21} 为交叉持续性. 根据方差和跳跃到达率的有界性, 应满足如下条件 (参见附录 A):

$$\begin{aligned} 0 < 1 - B_{11} \leq 1, 1 < 1 - B_{22} \leq 1, \\ 0 < (1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21} < 1. \end{aligned}$$

如果实证结果显示 B_{11}, A_{11} 显著大于 B_{22}, A_{22} , 那么我们可以得到跳跃行为具有更强的持续性和回馈效应的结论.

4 风险中性定价

本节以兼容性最强的交叉回馈模型 CFJDEC 为例, 阐述其风险中性定价变换关系, 其他内嵌模型是 CFJDEC 的特殊情形, 只需代入相应为零的系数即可. 由于模型内在的潜在状态是随时间而变化的, 我们借助 Christoffersen 等 [3]、吴恒煜等 [6] 的局部风险中性估值关系 (RNVR) 来推导无套利定价框架. RNVR 是基于局部的风险中性等价鞅变换, 可根据条件变量变化而变化, 因此对动态模型非常适用. 在进行期权定价研究之前, 我们给出风险中性测度下的价格随机模型, 并对随机因子进行局部等价鞅测度变换. 根据假设, 在任意 $0 < t < T$ 时刻股票价格的随机模型为

$$S_t = S_{t-1} \exp \left\{ r_t + \lambda_J h_t + \lambda_D \sigma_t - \varphi_x(h_t) - \frac{\sigma_t^2}{2} + h_t x_t + \sigma_t z_t \right\} \quad (7)$$

根据等价测度关系, 定义一个如下的 Radon-Nikodym 导数, 即 P_t 测度下的双因子随机模型在条件等价鞅测度 (EMMs) Q_t 下应满足 (定价核)

$$\xi_{x_t, z_t}(\vartheta_1, \vartheta_2) | \mathcal{F}_{t-1} = \frac{dQ_t}{dP_t} | \mathcal{F}_{t-1} = \frac{e^{-\vartheta_1 x_t - \vartheta_2 z_t}}{E[e^{-\vartheta_1 x_t - \vartheta_2 z_t} | \mathcal{F}_{t-1}]} = e^{-\vartheta_1 x_t - \vartheta_2 z_t - \varphi_x(-\vartheta_1) - \frac{\vartheta_2^2}{2}} \quad (8)$$

风险中性 Q_t 测度下, ϑ_1, ϑ_2 应满足

$$E^{Q_t}[e^{y_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = E[e^{y_t} \cdot \xi_{x_t, z_t}(\vartheta_1, \vartheta_2) | \mathcal{F}_{t-1}] = e^{r_t}.$$

ϑ_1, ϑ_2 是测度转换因子, 也称 Esscher 系数, 表示两个测度的差距. 联合上述两式, 有

$$\lambda_J h_t + \lambda_D \sigma_t = \varphi_x(h_t) + \varphi_x(-\vartheta_1) - \varphi_{x_t}(h_t - \vartheta_1) + \vartheta_2 \sigma_t \quad (9)$$

同理, 双因子模型中的随机冲击 x, z 在 Q_t 测度下的矩母指数表达为

$$\begin{aligned} \varphi_x^{Q_t}(u) &= \log E^{Q_t}[e^{ux}] = \log E[e^{ux} \cdot \xi_{x, z}(\vartheta_1, \vartheta_2)] = \varphi_x(u - \vartheta_1) - \varphi_x(-\vartheta_1), \\ \varphi_z^{Q_t}(u) &= \log E^{Q_t}[e^{uz}] = \log E[e^{uz} \cdot \xi_{x, z}(\vartheta_1, \vartheta_2)] = -\vartheta_2 u + \frac{u^2}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

可见, 连续扩散的风险中性等价鞅仅仅发生了位移而不改变其方差, 而非连续性跳跃的形变则较为复杂, 不仅分布发生了位移, 而且形状也或将有所改变. 通过泰勒展开式, 我们可以解释为什么市场上的隐含波动率往往高于历史波动率. 进一步, 根据 (9)、(10) 式, 跳跃和扩散风险溢价应满足

$$\lambda_D = \vartheta_2, \lambda_J = \frac{\varphi_x(h_t) - \varphi_x^{Q_t}(h_t)}{h_t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\vartheta_1)^n \frac{\varphi_x^{(n)}(0) - \varphi_x^{(n)}(h_t)}{h_t \cdot n!} \quad (11)$$

这里

$$\varphi_x^{(n)}(u) = \frac{d^{(n)} \varphi_x(u)}{du^{(n)}}.$$

很显然, 在存在跳跃的情形下, ϑ_1 成为风险中性期权定价的唯一的自由度, 从而给出了非唯一的等价鞅变换. 于是, 满足风险中性鞅测度时股票价格服从

$$S_t^* = S_{t-1}^* \exp \left\{ r_t - \varphi_{x^*}(h_t) - \frac{\sigma_t^{*2}}{2} + h_t x_t^* + \sigma_t z_t^* \right\} \quad (12)$$

作为等价鞅的映射关系. 将上述结果代入 (5) 式, 有

$$\begin{pmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \varphi_x''(-\vartheta_1) & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \varphi_x''(-\vartheta_1) & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \left(x_t^* - \frac{\gamma_J - \varphi_x'(-\vartheta_1)}{\sqrt{\varphi_x''(-\vartheta_1)}} \right)^2 \\ \sigma_t^2 (z_t^* - (\gamma_D + \vartheta_2))^2 \end{pmatrix}.$$

上述分析表明, 在期权定价中, 只要校准得到 ϑ_1 的值, 即可一一对应地确定风险中性条件下随机变量的分布, 并进行定价, 从而实现期权的无套利定价研究, 在非完全市场上, 无套利模型获得一个新的自由度, 这为带跳跃行为的无套利定价研究提供了理论基础. 其中, VG 过程的跳跃行为等价鞅一阶及二阶关系 $\varphi_x'(-\vartheta_1)$, $\varphi_x''(-\vartheta_1)$ 为 (参见附录 B):

$$\varphi_x'(-\vartheta_1) = \frac{C}{M + \vartheta_1} - \frac{C}{G - \vartheta_1}, \varphi_x''(-\vartheta_1) = \frac{C}{(M + \vartheta_1)^2} + \frac{C}{(G - \vartheta_1)^2}.$$

在非高斯模型的期权定价中, 还有另外一种较为方便的风险中性模型变换方法, 称为“历史滤波模拟方法”, 参见吴恒煜等^[16]、Barone 等^[17]. 这种方法的核心思想即: 在历史测度下基于非参数方法得到历史滤波, 假设其在未来的随机冲击中保持不变, 并对其进行风险修正, 从而模拟风险中性条件下的新息因子. 风险中性条件下的新息因子其数值恰好等于历史测度下的新息减去相应的风险溢价. 因此, 通过剔除历史滤波的风险溢价成分, 原测度下的随机冲击被修正为风险中性新息. 这种方法更加容易理解和应用, 事实上, 由于非高斯模型具有非唯一的等价鞅测度, 我们可以将历史滤波模拟方法视为本文所推导的风险中性定价模型的特例, 即 $\sqrt{\varphi'_x(-\vartheta_1)} = 1$, 此时波动率保持不变, 有

$$\begin{pmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 (x_t^* - (\gamma_J - \varphi'_x(-\vartheta_1)))^2 \\ \sigma_t^2 (z_t^* - (\gamma_D + \vartheta_2))^2 \end{pmatrix}.$$

我们发现, 模型上的参数和变量结构依然保持一致. 这种历史滤波模拟方法最直接的经济假设就是“历史会重演”. 下一节我们将通过实证研究来比较两种不同风险中性定价方法上 CFJDEC 模型定价效果的稳健性.

5 实证研究

5.1 数据选取

本节选择美国市场上极具代表性的道琼斯工业平均指数 (DJX)、标准普尔 500 指数 (SPX) 为研究对象, 包括 1996 年 1 月 1 日至 2015 年 8 月 31 日共计 4949 个交易日的收益率与标准化的欧式期权. 我们不仅对两类指数进行贝叶斯分析, 还会考察 CFJDEC 模型的期权定价表现. 其中, 期权数据的统计性质参见表 1. 所谓标准化期权, 是指执行价格严格等于远期价格的平价欧式期权. 平价期权是市场上交易最为活跃的对象, 所包含的信息最为丰富. 当然, 市场上是没有如此精确的标准化期权的, 交易所为了方便估计市场期权信息及隐含波动率指数, 对平价期权进行了加权, 从而构造了恰好 $F = K$ 的虚拟标准化期权. 本文研究的 SPX 和 DJX 指数的期权都包括 10 个不同的到期期限, 我们选取了 30 日到期、60 日到期以及 91 日到期的最活

表 1 SPX 及 DJX 标准期权合约的统计性质

统计量	到期时间					
	一个月到期 (短期)		两个月到期 (中期)		三个月到期 (长期)	
	Price	IV	Price	IV	Price	IV
SPX 看涨数量	4890	4890	4890	4890	4890	4890
均值	25.8526	0.1890	37.2549	0.1921	46.3953	0.1940
方差	75.4851	0.0058	131.7807	0.0050	187.0278	0.0044
偏度	0.7374	1.9533	0.3462	1.7325	0.1201	1.5722
峰度	4.4488	9.7270	3.4094	8.2322	2.9584	7.2006
SPX 看跌数量	4890	4890	4890	4890	4890	4890
均值	25.9274	0.1898	37.3752	0.1930	46.5752	0.1950
方差	76.5354	0.0060	135.1403	0.0052	192.7024	0.0047
偏度	0.7628	1.9882	0.3987	1.7881	0.1911	1.6530
峰度	4.4814	9.9130	3.4806	8.5367	3.0616	7.6539
DJX 看涨数量	4488	4488	4488	4488	4488	4488
均值	2.2843	0.1842	3.3070	0.1883	4.1221	0.1905
方差	0.4859	0.0059	0.7824	0.0050	1.0548	0.0045
偏度	1.3142	1.7426	0.9525	1.5387	0.7175	1.3975
峰度	7.0676	8.3139	5.6251	7.0883	4.7679	6.2668
DJX 看跌数量	4488	4488	4488	4488	4488	4488
均值	2.3037	0.1860	3.3273	0.1897	4.1504	0.1921
方差	0.4940	0.0061	0.8059	0.0052	1.0932	0.0047
偏度	1.2713	1.7204	0.9495	1.5301	0.7538	1.3991
峰度	6.7533	8.0932	5.4473	6.9538	4.7120	6.2124

注: 1996 年 1 月 1 日至 2015 年 8 月 31 日的标准化欧式期权合约的价格和隐含波动率信息.

跃的三类期权进行期权的实证研究, 分别代表短、中、长期期权. 本文主要是考察市场上整体的跳跃行为特征, 因此以指数分析为主. 此外, 我们还额外选择了三种不同类型的股票 (分别为 IBM, 苹果和 JP Morgan) 作为补充, 分别代表制造、IT 以及金融行业个股, 用以验证指数分析所得到的结论是否适用于这些股票. 这些个股、指数和标准化欧式期权的时间跨度都是自 1996 年 1 月 1 日起至 2015 年 8 月 31 日止.

5.2 参数估计

由于非线性模型包含多维状态变量, 本节采用贝叶斯学习方法对动态模型进行估计. 该方法结合了 MCMC 和粒子滤波技术, 考虑了模型参数和状态变量的不确定性, 可以实现参数和变量的联合估计, 从而根据观测变量的出现序贯地更新升级, 得到的结果更加稳健^[4,6].

参数学习的基本原理如下: 用 y_t, x_t 分别表示 t 时刻的观测变量和状态变量, 令 Θ 为状态空间模型参数, 再将观测变量的序列记为 $y_{1:T} = \{y_1, \dots, y_T\}$, 状态变量序列 $x_{0:T} = \{x_0, \dots, x_T\}$. 根据贝叶斯法则, t 时刻状态的后验密度有如下正比例关系,

$$p(\Theta, x_{0:t} | y_{1:t}) \propto p_\theta(x_{0:t} | y_{1:t}, \Theta) p(\Theta | y_{1:t}) \quad (13)$$

其中, 粒子滤波计算状态的后验密度 $p_\theta(x_{0:t} | y_{1:t}, \Theta)$. $p(\Theta | y_{1:t})$ 则正比于参数的先验密度 $p(\Theta)$ 和似然函数 $p(y_{1:t} | \Theta)$ 的乘积. 如果出现粒子衰退, 则引入 MCMC 方法, 令 $\Theta^* \sim N(\hat{\Theta}, \hat{\Sigma})$, 其接受率为

$$\alpha(\Theta^*) = 1 \wedge \frac{p(\Theta^*) p(y_{1:t} | \Theta^*) N(\Theta; \Theta^*, \hat{\Sigma})}{p(\Theta) p(y_{1:t} | \Theta) N(\Theta^*; \Theta, \hat{\Sigma})} \quad (14)$$

参数的均值和方差阵分别为:

$$\hat{\Theta} = \sum_{m=1}^M \Theta^{(m)} \bar{\omega}(\Theta^{(m)}), \hat{\Sigma} = \sum_{m=1}^M (\Theta^{(m)} - \hat{\Theta}) \bar{\omega}(\Theta^{(m)}) (\Theta^{(m)} - \hat{\Theta})' \quad (15)$$

相比现有研究, 本文提出的 CFJDEC 框架考虑了跳 - 扩散双因子之间的交叉影响. 以往的跳 - 扩散模型一般只研究跳跃行为自身的持续性, 或仅分析跳跃对波动率的回馈. CFJDEC 则嵌套了一些特殊情形的跳跃自激发模型, 其中有:

- HFJDEC (half-feedback JDEC): $\beta_{12}, \beta_{21}, \alpha_{12} = 0$, 这与 Fulop 等人^[4]提出的 SE-M 类似, 该模型包含了跳跃对波动率的回馈、跳跃自激发行为、波动率集聚效应, 但没有纳入波动率对跳跃的回馈和交叉影响, 因此简称“半回馈机制”.
- IFJDEC (interact-feedback JDEC): $\beta_{12}, \beta_{21} = 0$, 虽然属于跳 - 扩散相互回馈模型, 但没有纳入历史跳跃率和历史波动率之间的交叉影响, 因此, 简称其为“互回馈机制”模型.
- CFJDEC (cross-feedback JDEC): $\beta_{ij}, \alpha_{ij} \neq 0$, 该模型全面考虑了历史跳跃率和历史波动率之间的交叉影响和互回馈效应, 因此简称为“交叉回馈机制”模型.

互回馈模型及交叉回馈模型的区别在于, 交叉回馈模型中包含双因子的交叉回归这一项, 意味着历史波动率和跳跃到达率也会相互产生影响, 呈现相互记忆的特征.

CFJDEC, IFJDEC 和 HFJDEC 三个模型、DJX 和 SPX 指数的参数估计结果、持续性和回馈效应的量化指标参见表 2、表 3, 而指数的风险中性变换则列在表 3 中 (APL, IBM 和 JPM 股票相应贝叶斯分析的结果列于附录 C 中. 除了跳跃幅度期望正负不同, 其他结论和指数分析结果基本保持一致).

5.3 实证分析

本节分别估计了 CFJDEC (交叉回馈), HFJDEC (半回馈), IFJDEC (互回馈) 三类模型. HFJDEC 模型与 Fulop 等^[4]类似, 属于半回馈. 相比 HFJDEC, IFJDEC 进一步考虑了波动对跳跃的互回馈, CFJDEC 则是另外两个模型的更一般化. 贝叶斯方面, 我们首先通过粒子滤波方法得到模型的初始条件, 并作为先验信息进行抽样. 其中, 参数抽样 800 组, 状态抽样 400 组, 这样得到 320000 组粒子. 我们计算了第 i 个模型 M_i 的贝叶斯因子 (取对数),

$$LBF_i = \log p(y_{1:T} | M_i), i = 1, 2, 3.$$

三类模型的贝叶斯量化指标及参数估计结果参见表 2 和表 3. 其中, h, σ 为平均跳跃到达率及扩散波动率, μ_J, σ_J 为每次跳跃幅度的均值及标准差, B 为持续性指标, A 为回馈效应量化指标. LBF 表示贝叶斯因

子, $V_J, V_D, V_J\%$ 分别为跳跃二次变差、扩散二次变差、跳跃变差占比, $R_J, R_D, R_J\%$ 分别为跳风险溢价、扩散风险溢价以及跳跃风险溢价占比. 上述表格清晰地显示出两个市场指数都具有跳跃自激行为、波动率集聚和非对称回馈效应, 且跳跃行为对波动率也是有显著的非对称回馈的. 这些研究结果表明, 负向跳跃在跳跃行为中占据主导地位, 并将导致更大的波动率变化. 从表 2 来看, 跳跃行为的持续性、回馈效应、杠杆系数以及风险的市场价格都高于连续扩散对应的值 (分别是 $B_{11} > B_{22}, A_{11} > A_{22}, \gamma_J > \gamma_D, \lambda_J > \lambda_D$). 表格结果还显示, 波动率的非对称回馈来自跳跃和扩散两方面, 且跳跃方面的非对称性回馈强于扩散方面的波动率回馈. 同时跳跃风险的市场价格, 即市场对跳跃风险的补偿也是远远高于扩散风险的. 跳跃风险溢价占总的溢价百分比超过一半 ($R_J\%$), 这说明定价过程中的跳跃行为不容忽视.

从 SPX 及 DJX 指数估计结果来看, 跳跃对波动率存在显著的集聚性和非对称回馈效应, 且跳跃的风险溢价高于扩散的风险溢价, 市场剧烈波动期间都存在明显的巨幅负跳行为, 跳跃和波动率集聚类似, 具有显著的自激行为, 大跳之后在一段时期跳跃行为特别频繁. 从 APL, IBM 及 JPM 三个股票来看, 代表性的行业个股同样存在跳跃的集聚性、负的杠杆效应以及非对称回馈机制, 跳跃风险溢价占比也超过了一半, 这些与指数的研究结果相吻合. 与指数表现不同的是, 我们的估计结果显示, 个股的跳跃幅度可正可负, 特别是苹果公司股票价格跳跃幅度略微为正, 这与苹果公司业绩与极高的现金流有关.

我们再将上述模型应用于标普 500 指数的样本外期权定价. 定价结果参见表 4 和表 5. 对于 RNVR 方法而言, 跳跃风险溢价结果, 作为 ϑ_1, ϑ_2 的替代变量进行风险中性转换. 此时, VG 参数、杠杆系数变换为

$$\begin{cases} C^* = C, M^* = M + \vartheta_1, G^* = G - \vartheta_1 \\ \gamma_J^* = \frac{\gamma_J - \varphi'_x(-\vartheta_1)}{\sqrt{\varphi''_x(-\vartheta_1)}}, \gamma_D^* = \gamma_D + \vartheta_2 \end{cases} \quad (16)$$

表 2 跳 - 扩散行为的持续性及回馈效应

	标普 500 指数			道琼斯工业指数		
	CFJDEC	HFJDEC	IFJDEC	CFJDEC	HFJDEC	IFJDEC
h	0.0059	0.0037	0.0047	0.0040	0.0017	0.0038
σ	0.0072	0.0039	0.0051	0.0045	0.0042	0.0055
B_{11}	0.7040	0.9650	0.9376	0.6652	0.9468	0.8406
B_{12}	0.2375	0	0.1748	0.2388	0	0.1275
B_{21}	0.4259	0.0346	0.0689	0.4000	0.3159	0.3182
B_{22}	0.6091	0.7363	0.6542	0.6481	0.6900	0.6625
B_{all}	0.9855	0.9908	0.9905	0.9777	0.9835	0.9867
A_{11}	0.3289	0.5204	0.5275	0.2945	0.5196	0.4598
A_{12}	0.0567	0	0.1748	0.0713	0	0.1275
A_{21}	0.2514	0.0346	0.0689	0.2316	0.3159	0.3182
A_{22}	0.2444	0.3895	0.3124	0.2780	0.2869	0.2543
μ_J	-0.0698	-0.1401	-0.1378	-0.0425	-0.1437	-0.1480
σ_J	0.7057	0.2161	0.2528	0.8008	1.0157	0.8813
LBF	5.1812E+03	5.1881E+03	5.1932E+03	3.4955E+03	3.4817E+03	3.4914E+03
λ_J	0.0548	0.1242	0.1199	0.0555	0.0961	0.1012
λ_D	0.0456	0.0862	0.0887	0.0339	0.0645	0.0684
V_J	0.0108	0.0199	0.0189	0.0068	0.0072	0.0094
V_D	0.0115	0.0075	0.0087	0.0076	0.0076	0.0095
$V_J\%$	0.4845	0.7254	0.6854	0.4742	0.4857	0.4976
R_J	5.9258E-04	0.0025	0.0023	3.7915E-04	6.9125E-04	9.5334E-04
R_D	5.2419E-04	6.4870E-04	7.7081E-04	2.5675E-04	4.9109E-04	6.5053E-04
$R_J\%$	0.5306	0.7919	0.7464	0.5962	0.5846	0.5944

表 3 跳 - 扩散交叉回馈模型的贝叶斯参数估计

模型	道琼斯工业指数															
	标普 500 指数				CFJDEC				HFJDEC							
	历史测度	风险中性	IFJDEC	历史测度	风险中性	CFJDEC	历史测度	风险中性	HFJDEC	历史测度	风险中性	HFJDEC				
λ_J	0.0548	0	0.1199	0	0	0.1242	0	0	0.1242	0	0.0555	0	0.1012	0	0.0961	0
λ_D	0.0456	0	0.0887	0	0	0.0862	0	0	0.0862	0	0.0339	0	0.0684	0	0.0645	0
α_{10}	3.1854E-06	3.1854E-06	9.1524E-06	9.1524E-06	1.3833E-05	1.3833E-05	1.3833E-05	1.3833E-05	1.3833E-05	1.3833E-05	1.9219E-06	1.9219E-06	2.6245E-06	2.6245E-06	2.7542E-06	2.7542E-06
β_{11}	0.3751	0.3751	0.4101	0.4101	0.4445	0.4445	0.4445	0.4445	0.4445	0.4445	0.3707	0.3707	0.3808	0.3808	0.4272	0.4272
β_{12}	0.1808	0.1808	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1675	0.1675	0	0	0	0
α_{11}	0.0929	0.0662	0.1253	0.0336	0.1669	0.1669	0.0385	0.0385	0.1669	0.0385	0.1074	0.0865	0.1113	0.1018	0.1134	0.1197
α_{12}	0.0205	0.0205	0.0451	0.0451	0	0	0	0	0	0	0.0266	0.0266	0.0535	0.0535	0	0
γ_J	1.6140	1.9571	1.8510	3.6336	1.5637	1.5637	3.3110	3.3110	1.5637	3.3110	1.3513	1.5551	1.6543	1.8250	1.7453	1.7950
α_{20}	1.9142E-06	1.9142E-06	1.4090E-06	1.4090E-06	1.2753E-06	1.2753E-06	1.2753E-06	1.2753E-06	1.2753E-06	1.2753E-06	1.5239E-06	1.5239E-06	2.2867E-06	2.2867E-06	1.6416E-06	1.6416E-06
β_{21}	0.1745	0.1745	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1683	0.1683	0	0	0	0
β_{22}	0.3647	0.3647	0.3419	0.3419	0.3469	0.3469	0.3469	0.3469	0.3469	0.3469	0.3702	0.3702	0.4082	0.4082	0.4031	0.4031
α_{21}	0.0710	0.0506	0.0164	0.0044	0.0111	0.0111	0.0026	0.0026	0.0111	0.0026	0.0844	0.0680	0.0771	0.0704	0.0689	0.0728
α_{22}	0.0886	0.0886	0.0807	0.0807	0.1090	0.1090	0.1090	0.1090	0.1090	0.1090	0.1035	0.1035	0.1067	0.1067	0.1144	0.1144
γ_D	1.3267	1.3723	1.6950	1.7837	1.6037	1.6037	1.6899	1.6899	1.6037	1.6899	1.2984	1.3323	1.1705	1.2449	1.2282	1.2927
C_{VG}	1.3753	1.9283	0.8964	3.3408	0.8218	0.8218	3.5573	3.5573	0.8218	3.5573	1.7870	2.2182	1.5814	1.7298	1.4137	1.3386
G_{VG}	1.8823	1.8275	2.2499	2.1301	2.2848	2.2848	2.1606	2.1606	2.2848	2.1606	2.0615	2.0060	1.7465	1.6453	1.5432	1.4471
M_{VG}	2.0812	2.1360	3.4397	3.5595	3.7422	3.7422	3.8664	3.8664	3.7422	3.8664	2.1677	2.2232	2.0877	2.1889	1.8303	1.9263

注: 本表为 DJX 和 SPX 指数模型的贝叶斯参数估计结果, 样本区间为 1996.1.1 至 2015.8.31; 其中 2011.8.31-2015.8.31 五年间的观测数据用以序贯贝叶斯学习及期权定价。

表 4 跳 - 扩散交叉回馈模型的期权定价误差 (RNVR)

期权	标准普尔 500 指数期权定价误差						道琼斯工业指数期权定价误差																		
	CFJDEC		IFJDEC		HFJDEC		CFJDEC		IFJDEC		HFJDEC														
	PRICES	IV	PRICES	IV	PRICES	IV	PRICES	IV	PRICES	IV	PRICES	IV													
总体误差																									
AAE	7.9837	2.4941	15.5854	5.2454	18.4916	6.3189	0.1883	0.7324	0.2068	0.7090	0.2630	1.0016	ARPE	0.2040	0.1956	0.4229	0.4122	0.5077	0.4964	0.0528	0.0546	0.0576	0.0680	0.0715	
RMSE	9.0831	2.6995	16.1476	5.3379	18.9153	6.4079	0.2413	0.9486	0.2562	0.8761	0.3655	1.3398	RRMSE	0.2216	0.2129	0.4350	0.4245	0.5210	0.5100	0.0658	0.0684	0.0699	0.0669	0.0862	0.0896
短期误差																									
AAE	3.9043	1.7880	11.7527	5.4816	14.9761	7.0100	0.2322	1.2021	0.1828	0.9348	0.2563	1.3132	ARPE	0.1555	0.1496	0.4617	0.4525	0.5868	0.5767	0.0869	0.0910	0.0703	0.0927	0.0956	
RMSE	4.3688	2.0087	12.0629	5.6271	15.2177	7.1217	0.2702	1.3961	0.2172	1.1146	0.3159	1.6245	RRMSE	0.1779	0.1719	0.4808	0.4717	0.6043	0.5943	0.0982	0.1025	0.0823	0.0842	0.1084	0.1118
中期误差																									
AAE	7.6567	2.5052	15.8600	5.2585	18.8907	6.2764	0.2367	0.8737	0.1699	0.6183	0.3494	1.2728	ARPE	0.2041	0.1983	0.4193	0.4121	0.4989	0.4913	0.0595	0.0626	0.0422	0.0434	0.0855	0.0888
RMSE	8.1087	2.6604	16.0938	5.3344	19.0857	6.3389	0.2742	1.0127	0.2165	0.7984	0.4295	1.5634	RRMSE	0.2185	0.2130	0.4291	0.4220	0.5081	0.5005	0.0665	0.0699	0.0511	0.0529	0.0997	0.1028
长期误差																									
AAE	12.4418	3.3122	19.2868	5.1767	21.7276	5.8421	0.2531	0.7684	0.2511	0.7093	0.4186	1.2440	ARPE	0.2588	0.2513	0.4000	0.3913	0.4504	0.4413	0.0487	0.0516	0.0512	0.0501	0.0800	0.0831
RMSE	12.7330	3.3912	19.4844	5.2279	21.9045	5.8875	0.3307	1.0029	0.3071	0.8907	0.5449	1.6204	RRMSE	0.2669	0.2596	0.4066	0.3980	0.4568	0.4478	0.0601	0.0633	0.0611	0.0604	0.0986	0.1018

注: 本表为 DJX 和 SPX 指数标准化欧式期权定价误差。RNVR 为局部风险中性估值方法。短期表示 30 天到期期权, 中期 60 天, 长期 91 天。

表 5 跳 - 扩散交叉回馈模型的期权定价误差 (FHS)

期权	标准普尔 500 指数期权定价误差				道琼斯工业指数期权定价误差							
	CFJDEC		HFJDEC		CFJDEC		HFJDEC					
	PRICES	IV	PRICES	IV	PRICES	IV	PRICES	IV				
总体误差												
AAE	5.3286	1.6772	11.2155	3.8183	15.8005	5.4058	0.2845	1.1063	0.4796	1.8321	0.8665	3.2397
ARPE	0.1396	0.1322	0.3098	0.2999	0.4292	0.4185	0.0642	0.0688	0.1019	0.1077	0.1867	0.1927
RMSE	6.0832	1.8416	11.5943	3.9610	16.1493	5.5123	0.3900	1.4451	0.6425	2.3737	1.0455	3.8629
RRMSE	0.1541	0.1465	0.3260	0.3165	0.4430	0.4325	0.0801	0.0840	0.1195	0.1248	0.2014	0.2072
短期误差												
AAE	3.0529	1.4015	9.6693	4.4920	13.3830	6.2516	0.2348	1.1782	0.2818	1.4857	0.4455	2.3885
ARPE	0.1211	0.1164	0.3775	0.3688	0.5124	0.5028	0.0855	0.0830	0.0882	0.0887	0.1262	0.1297
RMSE	3.4831	1.6059	10.0216	4.6594	13.6224	6.3626	0.2922	1.4980	0.3759	2.0364	0.6292	3.4349
RRMSE	0.1415	0.1364	0.3979	0.3894	0.5276	0.5181	0.1080	0.1047	0.1054	0.1056	0.1529	0.1566
中期误差												
AAE	5.2406	1.7084	11.4416	3.7737	15.7075	5.2054	0.2803	1.0561	0.4953	1.8638	0.9143	3.3802
ARPE	0.1405	0.1360	0.3015	0.2951	0.4092	0.4021	0.0594	0.0607	0.1021	0.1044	0.1974	0.1995
RMSE	5.7427	1.8730	11.7450	3.8751	15.9235	5.2757	0.3789	1.4519	0.6634	2.5263	1.0765	4.0551
RRMSE	0.1558	0.1510	0.3129	0.3067	0.4184	0.4114	0.0747	0.0765	0.1249	0.1271	0.2116	0.2135
长期误差												
AAE	7.6545	2.0085	12.5604	3.3432	18.1613	4.8684	0.4095	1.2576	0.6643	2.0161	1.1763	3.5111
ARPE	0.1601	0.1535	0.2600	0.2525	0.3713	0.3628	0.0709	0.0728	0.1150	0.1167	0.2110	0.2119
RMSE	8.1010	2.1348	12.8495	3.4219	18.3538	4.9186	0.5383	1.6743	0.8425	2.5998	1.3377	4.0724
RRMSE	0.1711	0.1647	0.2684	0.2610	0.3775	0.3691	0.0864	0.0883	0.1334	0.1351	0.2224	0.2233

注: 本表为 DJX 和 SPX 指数标准化欧式期权定价误差. FHS 为历史滤波模拟方法. 短期表示 30 天到期期权. 中期 60 天. 长期 91 天.

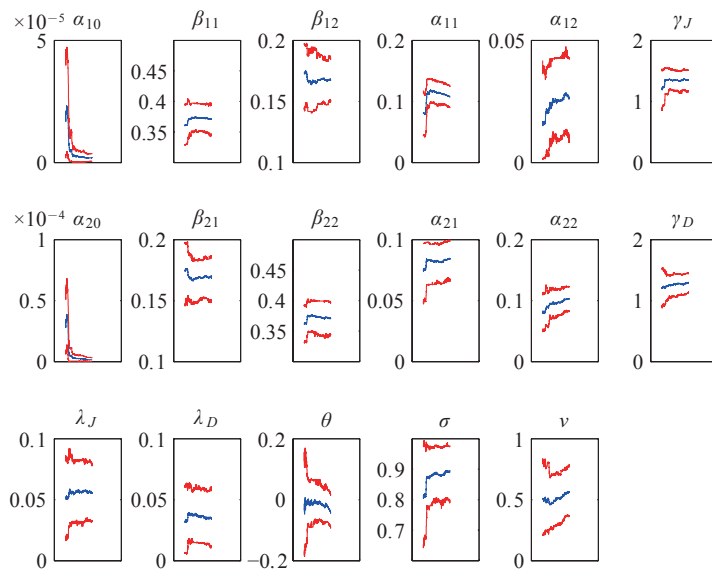


图 1 DJX 序贯贝叶斯参数估计结果

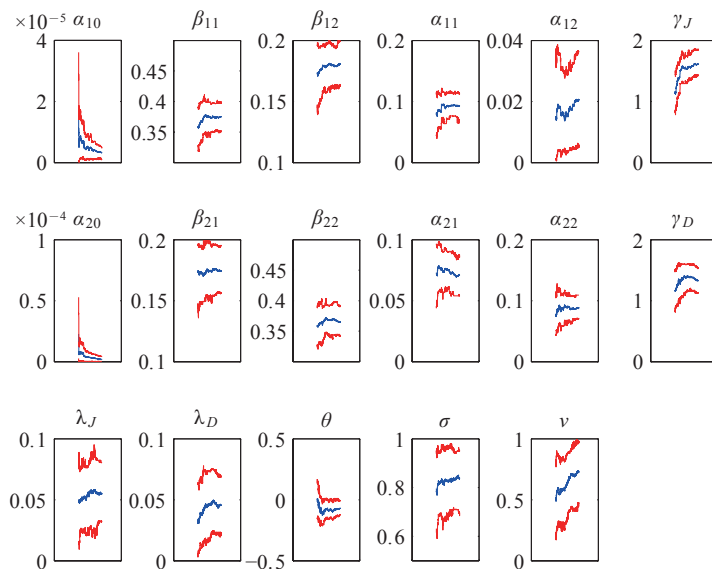


图 2 SPX 序贯贝叶斯参数估计结果

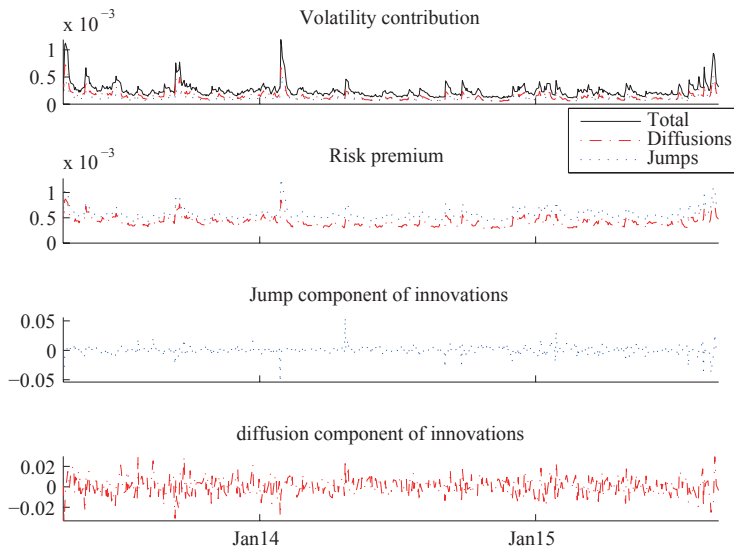


图 3 APL 股票跳 - 扩散成分分解

RNVR 方法则在上述基础上, 采用蒙特卡罗模拟方法, 对风险中性价格进行模拟, 得到表 4 的期权定价误差. 对于历史滤波模拟 (FHS) 方法而言, 满足上式公式的一种情形, 即

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \varphi'_x(-\vartheta_1) = 0, \varphi''_x(-\vartheta_1) = 1.$$

表中列出了期权的市场价格和模型的理论价格之间的定价损失函数. 其中, AAE 为绝对平均误差, ARPE 为平均相对误差百分比, RMSE 为均值平方根误差, RRMSE 相对均值平方根误差百分比. 根据期权定价方面的比较结果, 不管是价格方面的误差还是隐含波动率方面的误差, 不管是采用 RNVR 还是 FHS 方法, 全面的交叉回馈模型 (CFJDEC) 和互回馈模型 (IFJDEC) 的定价误差都显著小于半回馈跳 - 扩散 (HFJDEC) 模型. 同时, 交叉回馈模型 (CFJDEC) 总体上定价精度显著优于半回馈 (HFJDEC) 和互回馈模型 (IFJDEC). CFJDEC 模型取得良好的定价效果.

6 结论

股市的暴跌往往呈现持续性特征, 并引发市场剧烈震荡, 衍生品市场也难以幸免. 为此, 本文发展了半鞅无穷跳 - 扩散随机过程, 提出了动态跳 - 扩散双因子交叉回馈模型, 使得跳跃行为具有自激发和波动率回馈特征, 并基于 DJX 和 SPX 指数期权研究了这种机制下的期权定价方法, 结合三种不同类型的股票分析, 主要有以下结论:

1) 标准普尔 500 指数及道琼斯工业平均指数的跳跃达到率及扩散波动率都具有明显的动态时变特征. 其价格和波动率呈现了高度相关的联跳行为. 跳跃还具有更高的持续性和更强的非对称回馈效应, 负向冲击会导致更大的波动率和更高的跳跃到达率. 以苹果、IBM 和 JP Morgan 公司为代表的股票也具有上述特征.

2) 以指数为例, 每单位跳跃风险的补偿都远远高于扩散风险的补偿, 美国市场跳跃风险带来的溢价占比超过一半, 跳跃补偿占据绝对主导地位, 市场中的跳跃行为对波动率的影响更加持久和深远, 跳跃行为是收益率变化不可忽视的重要组成成分.

3) 动态跳 - 扩散模型的等价鞅测度变换呈现非线性特征和非唯一性, 本文给出了更一般性的风险中性定价框架. 实证结果表明, 跳跃自激发的交叉回馈机制模型和互回馈模型显著优于半回馈的动态跳 - 扩散模型, 交叉回馈模型具有更好的定价能力.

由此可见, 投资者和管理者在定价、对冲和监管中需要对股市中的跳跃行为引起足够重视. 跳跃行为和传统的扩散波动具有不同的运动形态和回馈机制, 跳跃行为在资产定价中扮演重要角色, 忽视跳跃风险将影响资产定价的准确性. 关于跳跃自激发行为下的风险对冲和组合套利, 我们下一步将对此展开更多研究.

参考文献

- [1] Eraker B. Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices[J]. The Journal of Finance, 2004, 59(3): 1367-1404.
- [2] Maheu J M, McCurdy T H. News arrival, jump dynamics, and volatility components for individual stock returns[J]. The Journal of Finance, 2004, 59(2): 755-793.
- [3] Christoffersen P, Jacobs K, Ornathanalai C. Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S&P500 returns and options[J]. Journal of Financial Economics, 2012, 106(3): 447-472.
- [4] Fulop A, Li J, Yu J. Self-exciting jumps, learning, and asset pricing implications[J]. Review of Financial Studies, 2015, 28(3): 876-912.
- [5] 张维, 张海峰, 张永杰, 等. 基于前景理论的波动不对称性 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(3): 458-465.
Zhang W, Zhang H F, Zhang Y J, et al. Volatility asymmetry based on prospect theory[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(3): 458-465.
- [6] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明, 等. 基于序贯贝叶斯参数学习的 Lévy 动态波动率模型研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(3): 556-569.
Wu H Y, Zhu F M, Wen J M, et al. Sequential Bayesian parameter learning for Levy-driven volatility models[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(3): 556-569.
- [7] Fama E F. The behavior of stock-market prices[J]. Journal of Business, 1965, 2: 34-105.
- [8] Press S J. A compound events model for security prices[J]. Journal of Business, 1967, 40: 317-335.
- [9] Eraker B, Johannes M, Polson N. The impact of jumps in equity index volatility and returns[J]. Journal of Finance, 2003, 58: 1269-1300.

- [10] Lee S S, Mykland P A. Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics[J]. Review of Financial Studies, 2008, 21(6): 2535–2563.
- [11] Aït-Sahalia Y, Cacho-Diaz J, Laeven R J A. Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes[J]. Journal of Financial Economics, 2015, 117(3): 585–606.
- [12] Madan D B, Carr P P, Chang E C. The variance gamma process and option pricing[J]. European Finance Review, 1998, 2(1): 79–105.
- [13] Li H, Wells M, Yu L. A Bayesian analysis of return dynamics with Levy jumps[J]. Review of Financial Studies, 2008, 21: 2345–2378.
- [14] 陈浪南, 孙坚强. 股票市场资产收益的跳跃行为研究 [J]. 经济研究, 2010(4): 54–66.
Chen L N, Sun J Q. Jump dynamics in stock returns[J]. Economic Research, 2010(4): 54–66.
- [15] 吴鑫育, 周海林, 汪寿阳, 等. 双杠杆门限随机波动率模型及其实证研究 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(7): 63–81.
Wu X Y, Zhou H L, Wang S Y, et al. A threshold stochastic volatility model with double leverage and empirical test[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(7): 63–81.
- [16] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明. 带杠杆效应的无穷纯跳跃 Levy 过程的期权定价 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(2): 74–94.
Wu H Y, Zhu F M, Wen J M. Option pricing based on conditional infinite pure jump Levy processes with leverage effect[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(2): 74–94.
- [17] Barone G, Adesi R F, Engle M L. A GARCH option pricing model with filtered historical simulation[J]. Review of Financial Studies, 2008, 21(3): 1223–1258.

附录

附录 A 回馈矩阵和记忆矩阵的表达式

根据 (5) 式半鞅跳 - 扩散模型假设, 跳跃达到率和扩散波动率满足:

$$\begin{pmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_t^2 (x_t - \gamma_J)^2 \\ \sigma_t^2 (z_t - \gamma_D)^2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

根据此假设, 上式展开为

$$\begin{aligned} h_{t+1}^2 &= \alpha_{10} + \beta_{11}h_t^2 + \beta_{12}\sigma_t^2 + \alpha_{11}h_t^2(x_t - \gamma_J)^2 + \alpha_{12}\sigma_t^2(z_t - \gamma_D)^2 \\ \sigma_{t+1}^2 &= \alpha_{20} + \beta_{21}h_t^2 + \beta_{22}\sigma_t^2 + \alpha_{21}h_t^2(x_t - \gamma_J)^2 + \alpha_{22}\sigma_t^2(z_t - \gamma_D)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

对跳跃到达率 h_{t+1}^2 求条件期望, 有:

$$\begin{aligned} E[h_{t+1}^2|h_t^2] &= \alpha_{10} + \beta_{11}h_t^2 + \beta_{12}\sigma_t^2 + \alpha_{11}h_t^2E[(x_t - \gamma_J)^2] + \alpha_{12}\sigma_t^2E[(z_t - \gamma_D)^2] \\ &= \alpha_{10} + \beta_{11}h_t^2 + \beta_{12}\sigma_t^2 + \alpha_{11}h_t^2E[x_t^2 - 2x_t\gamma_J + \gamma_J^2] + \alpha_{12}\sigma_t^2E[z_t^2 - 2z_t\gamma_D + \gamma_D^2] \\ &= \alpha_{10} + (\beta_{11} + \alpha_{11}E[x_t^2 - 2x_t\gamma_J + \gamma_J^2])h_t^2 + (\beta_{12} + \alpha_{12}E[z_t^2 - 2z_t\gamma_D + \gamma_D^2])\sigma_t^2 \\ &= \alpha_{10} + (\beta_{11} + \alpha_{11}(E[x_t^2] - 2\gamma_J E[x_t] + \gamma_J^2))h_t^2 + (\beta_{12} + \alpha_{12}(E[z_t^2] - 2\gamma_D E[z_t] + \gamma_D^2))\sigma_t^2 \\ &= \alpha_{10} + [\beta_{11} + \alpha_{11}(E[x_t^2] + \text{var}[x_t] - 2\gamma_J E[x_t] + \gamma_J^2)]h_t^2 + [\beta_{12} + \alpha_{12}(\text{var}[z_t] + \gamma_D^2)]\sigma_t^2 \\ &= \alpha_{10} + [\beta_{11} + \alpha_{11}(\mu_J^2 - 2\gamma_J\mu_J + \gamma_J^2 + \sigma_J^2)]h_t^2 + [\beta_{12} + \alpha_{12}(\sigma_D^2 + \gamma_D^2)]\sigma_t^2 \\ &= \alpha_{10} + \{\beta_{11} + \alpha_{11}[(\mu_J - \gamma_J)^2 + \sigma_J^2]\}h_t^2 + [\beta_{12} + \alpha_{12}(\sigma_D^2 + \gamma_D^2)]\sigma_t^2 \\ &= \alpha_{10} + B_{11}h_t^2 + B_{12}\sigma_t^2 \end{aligned} \quad (19)$$

这里,

$$\begin{cases} B_{11} = \beta_{11} + A_{11}, A_{11} = \alpha_{11}[(\mu_J - \gamma_J)^2 + \sigma_J^2] \\ B_{12} = \beta_{12} + A_{12}, A_{12} = \alpha_{12}(\sigma_D^2 + \gamma_D^2) \end{cases} \quad (20)$$

其中, μ_J 和 σ_J^2 表示随机跳跃 x_t 的均值和方差 σ_D^2 表示随机扩散 z_t 的方差. 同理, 对扩散波动率 σ_{t+1}^2 求条件期望之后, 有

$$\begin{aligned} E[\sigma_{t+1}^2|\sigma_t^2] &= A_{20} + B_{21}h_t^2 + B_{22}\sigma_t^2 \\ B_{21} &= \beta_{21} + A_{21}, A_{21} = \alpha_{21}[(\mu_J - \gamma_J)^2 + \sigma_J^2] \\ B_{22} &= \beta_{22} + A_{22}, A_{22} = \alpha_{22}(\sigma_D^2 + \gamma_D^2) \end{aligned} \quad (21)$$

为进一步求解无条件期望, 并得到参数的边界和模型的约束条件, 首先联立跳跃到达率和扩散波动率的条件期望表达式, 有:

$$E_\infty[h_{t+1}^2|h_t^2] = \alpha_{10} + B_{11}h_t^2 + B_{12}\sigma_t^2 = h_t^2, \quad E_\infty[\sigma_{t+1}^2|\sigma_t^2] = \alpha_{20} + B_{21}h_t^2 + B_{22}\sigma_t^2 = \sigma_t^2 \quad (22)$$

联立跳 - 扩散双因子的无条件期望, 有:

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{A_{10}(1 - B_{22}) + A_{20}B_{12}}{(1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21}} \\ \sigma^2 &= \frac{A_{20}(1 - B_{11}) + A_{10}B_{21}}{(1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21}} \end{aligned} \quad (23)$$

A 是回馈矩阵, B 为持续性矩阵, A_{11}, A_{22} 分别为跳跃和扩散的“自回馈”, A_{12}, A_{21} 分别为跳跃和扩散的“互回馈”. 整个状态向量所受冲击的持续性 B_{all} 可以表示为:

$$B_{\text{all}} = 1 - [(1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21}] = B_{11} + B_{22} - B_{11}B_{22} + B_{12}B_{21} \quad (24)$$

为满足方差和跳跃到达率的不为负及有界性, 结合 (22)、(23)、(24) 等式, 上述指标应该满足如下条件:

$$\begin{aligned} 0 < 1 - B_{11} \leq 1, 1 < 1 - B_{22} \leq 1, \\ 0 < (1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21} \leq 1 \end{aligned} \quad (25)$$

附录 B VG 跳跃的风险中性关系

根据 (11) 式, Lévy 随机新息 ΔX_t 在 Q_t 测度下的矩母指数表达为

$$\varphi_{\Delta X_t}^{Q_t}(u) = \log E^{Q_t}[e^{u\Delta X_t}] = \log E[e^{u\Delta X_t} \cdot \xi_{\Delta X_t}(\theta_t)] = \varphi_{\Delta X_t}(u - \theta_t) - \varphi_{\Delta X_t}(-\theta_t) \quad (26)$$

ΔX_t 在 Q_t 测度下的条件期望和条件方差分别为

$$\begin{aligned} E^{Q_t}[\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \left. \frac{d\varphi_{\Delta X_t}^{Q_t}(u)}{du} \right|_{u=0} = \varphi'_{\Delta X_t}(-\theta_t), \\ \text{var}^{Q_t}[\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \left. \frac{d^2\varphi_{\Delta X_t}^{Q_t}(u)}{du^2} \right|_{u=0} = \varphi''_{\Delta X_t}(-\theta_t) \end{aligned} \quad (27)$$

根据上述分析, 测度变换后的条件状态变量 x_t^* 可以表达为下式, 且有

$$x_t^* = \sqrt{\text{var}^{Q_t}[x_t \Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}]} = x_t \sqrt{\varphi''_{\Delta X_t}(-\theta_t)} \quad (28)$$

以 VG 为例, 根据 ΔX_t 的矩母指数表达为

$$\varphi_x(u) = C[\log GM - \log(G + u) - \log(M - u)],$$

那么

$$\begin{aligned} \varphi_{\Delta X_t}^{Q_t}(u) &= E^{Q_t}[e^{u\Delta X_t} | C, G, M] = \varphi_{\Delta X_t}(u - \theta) - \varphi_{\Delta X_t}(-\theta) \\ &= C[\log GM - \log(G + u - \theta) - \log(M - u + \theta)] \\ &\quad - C[\log GM - \log(G - \theta) - \log(M + \theta)] \\ &= C[\log(G - \theta)(M + \theta) - \log(G - \theta + u) - \log(M + \theta - u)] \\ &= C[\log G^* M^* - \log(G^* + u) - \log(M^* - u)]. \end{aligned}$$

其中, $M^* = M + \theta, G^* = G - \theta$. 同时 $\varphi'_{\Delta X_t}(u) = \frac{C}{M-u} - \frac{C}{G+u}, \varphi''_{\Delta X_t}(u) = \frac{C}{(M-u)^2} + \frac{C}{(G+u)^2}$.

附录 C 个股的跳扩散成分分析表

表 6 代表性个股分析结果

	B_{11}	B_{12}	B_{21}	B_{22}	B_{all}	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}
APL	0.5954	0.2146	0.3622	0.5058	0.8777	0.2293	0.0353	0.1867	0.1481
IBM	0.5909	0.2063	0.3709	0.5107	0.8763	0.2424	0.0265	0.1901	0.1480
JPM	0.6561	0.2142	0.4281	0.5540	0.9383	0.2850	0.0349	0.2491	0.1885
	h	σ	μ_J	σ_J	γ_J	γ_D	λ_J	λ_D	
APL	0.0071	0.0077	5.2800E-04	0.8518	1.2774	1.0325	0.0512	0.0364	
IBM	0.0059	0.0063	-0.1195	0.7678	1.2532	1.1014	0.0423	0.0253	
JPM	0.0116	0.0145	-5.2235E-04	0.7922	1.4825	1.1389	0.0442	0.0272	
	V_J	V_D	$V_J\%$	R_J	R_D	$R_J\%$	LBF		
APL	0.0112	0.0109	0.5048	5.7110E-04	3.9792E-04	0.5894	1.6944E+03		
IBM	0.0093	0.0090	0.5069	3.9246E-04	2.2817E-04	0.6324	1.8442E+03		
JPM	0.0198	0.0216	0.4772	8.7204E-04	5.8806E-04	0.5972	643.1715		