第46卷第5期 数 学 进 展 Vol. 46, No. 5
2017年9月 ADVANCES IN MATHEMATICS (CHINA) Sep., 2017

doi: 10.11845/sxjz.2015206b

一类 Hausdorff 算子在 Lebesgue 空间上的最佳常数

吴小梅

(浙江师范大学行知学院, 金华, 浙江, 321004)

摘要: 作为经典 Hardy 算子及 Cesàro 算子的推广, Hausdorff 算子在调和分析中起着重要作用, 因此讨论此类算子在各种函数空间上的有界性意义重大. 文章研究了一类 Hausdorff 算子在 Lebesgue 空间上的有界性, 并且计算出了该算子在这类空间上有界的最佳常数. 此外, 文章还得到了一类多线性 Hausdorff 算子在 Lebesgue 空间上有界的充要条件及其最佳常数.

关键词: Hausdorff 算子; 多线性算子; Lebesgue 空间; 最佳常数

MR(2010) 主题分类: 42B25; 42B35 / **中图分类号:** O174.2

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2017)05-0793-08

1 引言和主要结果

Hausdorff 算子的研究起源于数列求和法, 见文献 [11]. 给定一个定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 Φ, 一维 Hausdorff 算子定义为

$$H_\Phi(f)(x)=\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t}f\left(\frac{x}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{\Phi(\frac{x}{t})}{t}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Hausdorff 算子包含了 Hardy 算子、Cesàro 算子、Hardy-Littlewood-Polya 算子等著名算子. 如当 $\Phi(t)=\frac{\chi_{(1,\infty)}(t)}{t}$ 时,

$$H_\Phi(f)(x)=H(f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\neq 0.$$

这是著名的 Hardy 算子. 1921 年, Hardy[9] 得到了经典的 Hardy 不等式:

$$\int_0^\infty |Hf(x)|^p\mathrm{d}x\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty |f(x)|^p\mathrm{d}x,\quad 1<p<\infty,$$

并且证明了 $\frac{p}{p-1}$ 是最佳常数. 若取 $\Phi(t)=\chi_{(0,1)}(t)$, 则

$$H_\Phi(f)(x)=H^*(f)(x)=\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t,$$

收稿日期: 2015-12-01. 修改稿收到日期: 2016-06-06.

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11501516, No. 11426204, No. 11471288) 和浙江省自然科学基金 (No. LQ15A010003, No. LY14A010015).

E-mail: wuxm@zjnu.cn

这是 Hardy 算子的共轭算子. 当 $\Phi(t)=\chi_{(0,1)}(t)(1-t)^{\delta}$ 与 $\Phi(t)=\chi_{(0,1)}(t)+\frac{\chi_{(1,+\infty)}(t)}{t}$ 时, H_Φ 分别是著名的 Cesàro 算子 C_δ 和 Hardy-Littlewood-Polya 算子 P. 它们定义如下:

$$C_\delta f(x)=\int_0^1 t^{-1}(1-t)^{\delta-1}f(t^{-1}x)\mathrm{d}t,$$
$$P(f)(x)=Hf(x)+H^*f(x)=\int_0^\infty \frac{f(t)}{\max\{t,x\}}\mathrm{d}t.$$

高维的 Hausdorff 算子有几种推广情形, 可参见文献 [2–4] 等. 假设 $\Phi(t)$ 是 $\mathbb{R}^+$ 上径向函数, 则 n 维的 Hausdorff 算子定义为

$$\mathcal{H}_{\Phi,A}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}f(A(y)x)\mathrm{d}y,$$

其中 $A(y)$ 是 $n\times n$ 矩阵且对几乎处处的 $y\in\operatorname{supp}\Phi$ 有 $\det A(y)\neq 0$. 当 $A(y)=\operatorname{diag}(\frac{1}{|y|},\frac{1}{|y|},\cdots,\frac{1}{|y|})$ 时, 我们记 $\mathcal{H}_{\Phi,A}=\mathcal{H}_\Phi$, 即

$$\mathcal{H}_\Phi f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}f\left(\frac{x}{|y|}\right)\mathrm{d}y.$$

Hausdorff 算子不仅包含了 Hardy 算子、Cesàro 算子、Hardy-Littlewood-Polya 算子等著名算子, 而且它在级数敛散性、 Fourier 分析、几何分析等领域有重要应用 (见文献 [1, 4, 10–11]). 所以, 近年来, Hausdorff 算子的研究受到国内外很多学者的关注, 如文献 [3, 6–8, 12–15] 等等.

假设 Φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数, 对任意的向量 $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 其中 $\alpha_i\in\mathbb{R}$, 定义一类 Hausdorff 算子 $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}$ 为

$$\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}f\left(\frac{x_1}{|y|^{\alpha_1}},\frac{x_2}{|y|^{\alpha_2}},\cdots,\frac{x_n}{|y|^{\alpha_n}}\right)\mathrm{d}y,\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

当取 $A(y)=\operatorname{diag}\big(\frac{1}{|y|^{\alpha_1}},\frac{1}{|y|^{\alpha_2}},\cdots,\frac{1}{|y|^{\alpha_n}}\big)$ 时, $\mathcal{H}_{\Phi,A}=\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}$. 当 $\vec{\alpha}=(1,1,\cdots,1)$ 时, $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}=\mathcal{H}_\Phi$.

由 Minkowski 不等式及变量替换易知, 若

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\Phi(y)||y|^{-n+\frac{n}{p}}\mathrm{d}y<\infty,$$

则对任意的 $1\le p\le\infty$, $\mathcal{H}_\Phi$ 在 L^p 空间上有界. 通过简单计算, 当 Φ 是非负函数时, 上述条件也是 $\mathcal{H}_\Phi$ 在 L^p 空间上有界的必要条件. 一个自然的问题是 $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}$ 在 L^p 空间上有界的充要条件是什么? 本文将回答此问题, 并进一步计算出了该算子有界的范数

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

另一方面, 近年来多线性算子在各类函数空间上有界性的研究已经成为调和分析的重要方向之一. 2012 年, 陈杰诚等 [5] 定义了多线性的 Hausdorff 算子 S_Φ 并且得到了该算子在 L^p 空间上的有界性. 假设 $\Phi(s_1,s_2,\cdots,s_m)$ 是 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\cdots\times\mathbb{R}^+$ 上的局部可积函数, 则 S_Φ 定义为

$$S_\Phi(f_1,f_2,\cdots f_m)(x)=\int_{\mathbb{R}^{nm}}\frac{\Phi\big(\frac{x}{|u_1|},\frac{x}{|u_2|},\cdots,\frac{x}{|u_m|}\big)}{|u_1|^n|u_2|^n\cdots|u_m|^n}\prod_{j=1}^m f_j(u_j)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_m.$$

2014 年, 范大山和赵发友 [7] 进一步研究了两类分数次多线性 Hausdorff 算子在 Lebesgue 空间上的有界性. 假设向量 $\vec{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$, $u_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, 记 $\mathrm{d}\vec{u}=\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_m$, 向量 $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$, $\beta_i\in\mathbb{R}$ 及 $\beta\in\mathbb{R}$, 两类分数次多线性 Hausdorff 算子分别定义如下:

$$R_{\Phi,\vec{\beta}}(f_1,f_2,\cdots,f_m)(x)=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n_m}}\frac{\Phi(\frac{x}{|u_1|},\frac{x}{|u_2|},\cdots,\frac{x}{|u_m|})}{\prod_{i=1}^m|u_i|^{n_i-\beta_i}}\prod_{i=1}^m f_i(u_i)\mathrm{d}\vec{u};$$
$$S_{\Phi,\beta}(f_1,f_2,\cdots,f_m)(x)=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n_m}}\frac{\Phi(\frac{x}{|\vec{u}|})}{|\vec{u}|^{\sum_{i=1}^m n_i-\beta}}\prod_{i=1}^m f_i(u_i)\mathrm{d}\vec{u},$$

其中 $|\vec{u}|=\sqrt{|u_1|^2+|u_2|^2+\cdots+|u_m|^2}$.

受文献 [7] 的启发, 本文将考虑另一类型的多线性 Hausdorff 算子. 假设 Φ 是 $\mathbb{R}^{nm}$ 上的局部可积函数, 对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$, 其中 $\beta_i\in\mathbb{R}$, 定义多线性 Hausdorff 算子为

$$\mathcal{S}_{\Phi,m,\vec{\beta}}(f_1,f_2,\cdots,f_m)(x)=\int_{\mathbb{R}^{nm}}\frac{\Phi(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\prod_{i=1}^m|y_i|^n}\prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{x}{|y_i|^{\beta_i}}\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m,\quad y_i\in\mathbb{R}^n.$$

当 $\vec{\beta}=(1,1,\cdots,1)$ 时, 记 $\mathcal{S}_{\Phi,m,\vec{\beta}}=\mathcal{S}_{\Phi,m}$, 即

$$\mathcal{S}_{\Phi,m}(f_1,f_2,\cdots,f_m)(x)=\int_{\mathbb{R}^{nm}}\frac{\Phi(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\prod_{i=1}^m|y_i|^n}\prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{x}{|y_i|}\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m.$$

本文将探讨算子 $\mathcal{S}_{\Phi,m,\vec{\beta}}$ 在 Lebesgue 空间上有界的充要条件及其最佳常数. 值得一提的是, 与文献 [5] 及 [14] 不同, 本文中的结论对算子 $\mathcal{S}_{\Phi,m,\vec{\beta}}$ 中的函数 Φ 不需要限制为径向函数. 下面给出本文的主要定理:

定理 1.1 令 $1\le p\le\infty$, 若 $\Phi(y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数, 记

$$\mathcal{A}:=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)|y|^{-n+\sum\limits_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{p}}\mathrm{d}y.$$

则 $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间上的有界算子当且仅当

$$\mathcal{A}<\infty.$$

进一步, 我们有

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}=\mathcal{A}.$$

定理 1.2 令 $1\le p,p_1,p_2,\cdots,p_m\le\infty$, $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\cdots+\frac{1}{p_m}$, 假设 $\Phi(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 是 $\mathbb{R}^{nm}$ 上的非负函数, 记

$$\mathcal{B}:=\int_{\mathbb{R}^{nm}}\Phi(y_1,y_2,\cdots,y_m)\prod_{i=1}^m|y_i|^{-n+\frac{n\beta_i}{p_i}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m.$$

则 $\mathcal{S}_{\Phi,m,\vec{\beta}}$ 是 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间上的有界算子当且仅当

$$\mathcal{B}<\infty.$$

进一步, 我们有

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,m,\vec{\beta}}\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{B}.$$

2 定理的证明

定理 1.1 的证明 先证充分性. 由 Minkowski 不等式及变量替换, 我们有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Phi(y)}{|y|^n}f\left(\frac{x_1}{|y|^{\alpha_1}},\frac{x_2}{|y|^{\alpha_2}},\cdots,\frac{x_n}{|y|^{\alpha_n}}\right)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\\ &= \mathcal{A}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

所以, 当 $\mathcal{A}<\infty$ 时, $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间上有界, 且有

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \mathcal{A}. \tag{2.1}$$

再证必要性. 取 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{-\frac{1+\frac{1}{k}}{p}}\chi_{\{x_1>1\}}(x_1)\cdots x_n^{-\frac{1+\frac{1}{k}}{p}}\chi_{\{x_n>1\}}(x_n)$, 其中 $k>1$. 通过标准计算, 有

$$\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = k^{\frac{n}{p}}, \tag{2.2}$$

且

$$\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}f_k(x) = \left(x_1^{-(1+\frac{1}{k})}\cdots x_n^{-(1+\frac{1}{k})}\right)^{\frac{1}{p}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\prod_{i=1}^n\chi_{\left\{\frac{x_i}{|y|^{\alpha_i}}>1\right\}}\left(\frac{x_i}{|y|^{\alpha_i}}\right)\mathrm{d}y.$$

若 $\alpha_i=0$, 对所有的 $i=1,2,\cdots,n$, 则定理显然成立. 所以, 我们分三种情形证明.

情形 1: 若 $\alpha_i>0$, 不妨假设 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$, 则对任意的 i, 有 $|y|<x_i^{\frac{1}{\alpha_i}}$. 所以当取 $x_i>k$ $(k>1)$ 时, 我们得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\ge \Bigg(\int_{x_1\ge k}\cdots\int_{x_n\ge k}\left|\int_{|y|<\min\{x_1^{\frac{1}{\alpha_1}},\cdots,x_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\}}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\right|^p\\ &\qquad\cdot x_1^{-(1+\frac{1}{k})}\cdots x_n^{-(1+\frac{1}{k})}\mathrm{d}x\Bigg)^{\frac{1}{p}}\\ &\ge \left(\int_{x_1\ge k}\cdots\int_{x_n\ge k}\left|\int_{|y|<k^{\frac{1}{\alpha_n}}}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\right|^p x_1^{-(1+\frac{1}{k})}\cdots x_n^{-(1+\frac{1}{k})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

因此, 结合 (2.2) 式, 有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\ge \left(\int_{x_1\ge k}\cdots\int_{x_n\ge k}x_1^{-(1+\frac{1}{k})}\cdots x_n^{-(1+\frac{1}{k})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\int_{|y|<k^{\frac{1}{\alpha_n}}}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\\ &= k^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{p}}k^{\frac{n}{p}}\int_{|y|<k^{\frac{1}{\alpha_n}}}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\\ &= k^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{p}}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\int_{|y|<k^{\frac{1}{\alpha_n}}}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \geq k^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{p}} \int_{|y|<k^{\frac{1}{\alpha_n}}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y.$$

令 $k\to+\infty$ (利用 $k^{\frac{1}{k}}\to 1$ 及 $k^{\frac{1}{\alpha_n}}\to+\infty$), 我们有

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)|y|^{-n+\sum\limits_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p}}\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

情形 2: 若 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<0$, 则有 $|y|>x_i^{\frac{1}{}}\alpha_i$. 所以当取 $x_i>k$ $(k>1)$ 时, 得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\geq \left(\int_{x_1\geq k}\cdots\int_{x_n\geq k} x_1^{-(1+\frac{1}{k})}\cdots x_n^{-(1+\frac{1}{k})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad\cdot\int_{|y|>\max\{x_1^{\frac{1}{\alpha_1}},\cdots,x_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\\ &\geq k^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{p}}k^{\frac{n}{p}}\int_{|y|>k^{\frac{1}{\alpha_1}}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\\ &= k^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{p}}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\int_{|y|>k^{\frac{1}{\alpha_1}}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

令 $k\to+\infty$ (利用 $k^{\frac{1}{k}}\to 1$ 及 $k^{\frac{1}{\alpha_n}}\to 0$), 我们有

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)|y|^{-n+\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p}}\mathrm{d}y. \tag{2.4}$$

情形 3: 若 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_i<0<\alpha_{i+1}<\cdots<\alpha_n$, 则结合上述两种情形, 有

$$\max\left\{x_{i+1}^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}},\cdots,x_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right\}<|y|<\min\left\{x_1^{\frac{1}{\alpha_1}},\cdots,x_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right\}.$$

所以,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\geq \left(\int_{x_1\geq k}\cdots\int_{x_n\geq k} x_1^{-(1+\frac{1}{k})}\cdots x_n^{-(1+\frac{1}{k})}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad\cdot\int_{k^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}<|y|<k^{\frac{1}{\alpha_i}}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\\ &= k^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{p}}k^{\frac{n}{p}}\int_{k^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}<|y|<k^{\frac{1}{\alpha_i}}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y\\ &= k^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{p}}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\int_{k^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}<|y|<k^{\frac{1}{\alpha_i}}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n}|y|^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1+\frac{1}{k})}{p}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

令 $k\to+\infty$, 注意到 $k^{\frac{1}{k}}\to 1$, $k^{\frac{1}{\alpha_i}}\to+\infty$ 及 $k^{\frac{1}{\alpha_{i+1}}}\to 0$, 我们有

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)|y|^{-n+\sum\limits_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p}}\mathrm{d}y. \tag{2.5}$$

结合 (2.3), (2.4) 及 (2.5) 式, 对任意的 n 维向量 $\vec{\alpha}$, 我们有

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \mathcal{A}. \tag{2.6}$$

因为 $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间上有界, 所以有 $\mathcal{A}<\infty$. 结合 (2.1) 及 (2.6) 式, 进一步得

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{\alpha}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}=\mathcal{A}.$$

定理 1.1 证毕. □

定理 1.2 的证明 先证充分性. 不失一般性, 我们不妨假设 $m=2$. 通过 Minkowski 不等式, Hölder 不等式及变量替换, 我们得

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}f_1\left(\frac{x}{|y_1|^{\beta_1}}\right)f_2\left(\frac{x}{|y_2|^{\beta_2}}\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\le\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|\Phi(y_1,y_2)|}{|y_1|^n|y_2|^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f_1\left(\frac{x}{|y_1|^{\beta_1}}\right)f_2\left(\frac{x}{|y_2|^{\beta_2}}\right)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\\
&\quad\le\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|\Phi(y_1,y_2)|}{|y_1|^n|y_2|^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f_1\left(\frac{x}{|y_1|^{\beta_1}}\right)\right|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f_2\left(\frac{x}{|y_2|^{\beta_2}}\right)\right|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^{2n}}|\Phi(y_1,y_2)||y_1|^{-n+\frac{n\beta_1}{p_1}}|y_2|^{-n+\frac{n\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

注意到 Φ 是非负的且 $\mathcal{B}<\infty$, 因此 $\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}$ 是 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界, 且满足

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^p}\le\mathcal{B}. \tag{2.7}$$

接下来证明必要性. 取 $f_1(x)=|x|^{-\frac{n+\frac{1}{k}}{p_1}}\chi_{\{|x|>1\}}(x)$, $f_2(x)=|x|^{-\frac{n+\frac{1}{k}}{p_2}}\chi_{\{|x|>1\}}(x)$. 由极坐标变换计算得

$$\|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}=\omega_n^{\frac{1}{p_1}}k^{\frac{1}{p_1}},\quad \|f_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}=\omega_n^{\frac{1}{p_2}}k^{\frac{1}{p_2}},$$

其中 ω_n 表示单位球面的面积. 又因为 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$, 所以有

$$\|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}=\omega_n^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{p}}, \tag{2.8}$$

且

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)(x)\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}\left|\frac{x}{|y_1|^{\beta_1}}\right|^{-\frac{n+\frac{1}{k}}{p_1}}\left|\frac{x}{|y_2|^{\beta_2}}\right|^{-\frac{n+\frac{1}{k}}{p_2}}\chi_{\{|x|>|y_1|^{\beta_1}\}}(x)\chi_{\{|x|>|y_2|^{\beta_2}\}}(x)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\\
&\quad=|x|^{-\frac{n+\frac{1}{k}}{p}}\int_{|y_2|^{\beta_2}<|x|}\int_{|y_1|^{\beta_1}<|x|}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}|y_1|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_1}{p_1}}|y_2|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.
\end{aligned}$$

若对所有的 $\beta_1=\beta_2=0$, 则定理显然成立. 因此, 我们分三种情形证明定理.

情形 1: 若 $\beta_1,\beta_2>0$, 则有 $|y_1|<|x|^{\frac{1}{\beta_1}}$ 及 $|y_2|<|x|^{\frac{1}{\beta_2}}$. 所以当 $|x|>k$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)\|_{L^p}^p\\
&\quad\ge\int_{|x|>k}|x|^{-(n+\frac{1}{k})}\left|\int_{|y_2|<k^{\frac{1}{\beta_2}}}\int_{|y_1|<k^{\frac{1}{\beta_1}}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}|y_1|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_1}{p_1}}|y_2|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|^p\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= k^{1-\frac{1}{k}}\omega_n\left|\int_{|y_2|<k^{\frac{1}{\beta_2}}}\int_{|y_1|<k^{\frac{1}{\beta_1}}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}|y_1|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_1}{p_1}}|y_2|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|^p.$$

于是, 结合 (2.8) 式, 有

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)\|_{L^p}\\&\quad\geq (k^{-\frac{1}{k}})^{\frac{1}{p}}\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}\int_{|y_2|<k^{\frac{1}{\beta_2}}}\int_{|y_1|<k^{\frac{1}{\beta_1}}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}|y_1|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_1}{p_1}}|y_2|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.\end{aligned}$$

令 $k\to+\infty$ (易知 $k^{\frac{1}{k}}\to1$ 及 $k^{\frac{1}{\beta_1}},k^{\frac{1}{\beta_2}}\to+\infty$), 我们有

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)\|_{L^p}\geq\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y_1,y_2)|y_1|^{-n+\frac{n\beta_1}{p_1}}|y_2|^{-n+\frac{n\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

所以,

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^p}\geq\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y_1,y_2)|y_1|^{-n+\frac{n\beta_1}{p_1}}|y_2|^{-n+\frac{n\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

情形 2: 若 $\beta_1,\beta_2<0$, 则有 $|y_1|>|x|^{\frac{1}{\beta_1}}$ 及 $|y_2|>|x|^{\frac{1}{\beta_2}}$. 所以当 $|x|>k$ 时, 我们得

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)\|_{L^p}^p\\&\quad\geq\int_{|x|>k}|x|^{-(n+\frac{1}{k})}\left|\int_{|y_2|>k^{\frac{1}{\beta_2}}}\int_{|y_1|>k^{\frac{1}{\beta_1}}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}|y_1|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_1}{p_1}}|y_2|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|^p\mathrm{d}x\\&\quad= k^{-1-\frac{1}{k}}\omega_n\left|\int_{|y_2|>k^{\frac{1}{\beta_2}}}\int_{|y_1|>k^{\frac{1}{\beta_1}}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}|y_1|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_1}{p_1}}|y_2|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|^p.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)\|_{L^p}\\&\quad\geq (k^{-\frac{1}{k}})^{\frac{1}{p}}\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}\int_{|y_2|>k^{\frac{1}{\beta_2}}}\int_{|y_1|>k^{\frac{1}{\beta_1}}}\frac{\Phi(y_1,y_2)}{|y_1|^n|y_2|^n}|y_1|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_1}{p_1}}|y_2|^{(n+\frac{1}{k})\frac{\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.\end{aligned}$$

令 $k\to+\infty$ (易知 $k^{\frac{1}{k}}\to1$ 及 $k^{\frac{1}{\alpha_1}},k^{\frac{1}{\alpha_2}}\to0$), 有

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}(f_1,f_2)\|_{L^p}\geq\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y_1,y_2)|y_1|^{-n+\frac{n\beta_1}{p_1}}|y_2|^{-n+\frac{n\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

所以,

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^p}\geq\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y_1,y_2)|y_1|^{-n+\frac{n\beta_1}{p_1}}|y_2|^{-n+\frac{n\beta_2}{p_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

情形 3: 若存在某些 $\beta_i>0$, 某些 $\beta_i<0$, 不失一般性, 我们假设 $\beta_1>0$, $\beta_2<0$. 则结合上述两种情形, 与定理 1.1 中情形 3 的证明方法相似, 这里我们不再赘述.

综合上述三种情形, 我们有

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^p}\geq\mathcal{B}.\tag{2.9}$$

进一步结合 (2.7) 式, 得

$$\|\mathcal{S}_{\Phi,2,\vec{\beta}}\|_{L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^p}=\mathcal{B}.$$

定理 1.2 得证. □

参考文献

[1] Bennett, G., An inequality for Hausdorff means, *Houston J. Math.*, 1999, 25(4): 709-744.

[2] Brown, G. and Móricz, F., Multivariate Hausdorff operators on the spaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, 271(2): 443-454.

[3] Chen, J.C., Fan, D.S. and Li, J., Hausdorff operators on function spaces, *Chin. Ann. Math. Ser. B.*, 2012, 33(4): 537-556.

[4] Chen, J.C., Fan, D.S. and Wang, S.L., Hausdorff operators on Euclidean spaces, *Appl. Math. J. Chin. Univ.*, 2013, 28(4): 548-564.

[5] Chen, J.C., Fan, D.S. and Zhang, C.J., Boundedness of Hausdorff operators on some product Hardy type spaces, *Appl. Math. J. Chin. Univ.*, 2012, 27(1): 114-126.

[6] Chen, J.C., Fan, D.S. and Zhang, C.J., Multilinear Hausdorff operators and their best constants, *Acta Math. Sin., Engl. Ser.*, 2012, 28(8): 1521-1530.

[7] Fan, D.S. and Zhao, F.Y., Multilinear fractional Hausdorff operators, *Acta Math. Sin., Engl. Ser.*, 2014, 30(8): 1407-1421.

[8] Georgakis, C., The Hausdorff mean of a Fourier-Stieltjes transform, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1992, 116(2): 465-471.

[9] Hardy, G.H., Note on a theorem of Hilbert, *Math. Z.*, 1920, 6(3/4): 314-317.

[10] Hardy, G.H., An inequality for Hausdorff means, *J. London Math. Soc. Ser. (1)*, 1943, 18: 46-50.

[11] Hausdorff, F., Summationsmethoden und Momentfolgen, I, *Math. Z.*, 1921, 9(1/2): 74-109 (in German).

[12] Liflyand, E., Open problems on Hausdorff operators, In: Complex Analysis and Potential Theory: Proceedings of the Conference, Istanbul, Turkey (Azero, T.A. and Tamrazov, P.M. eds.), New Jersey: World Scientific, 2006, 280-285.

[13] Liflyand, E. and Miyachi, A., Boundedness of the Hausdorff operators in H^p spaces, $0 < p < 1$, *Studia Math.*, 2009, 194(3): 279-292.

[14] Ruan, J.M. and Fan, D.S., Hausdorff operators on the power weighted Hardy spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, 433(1): 31-48.

[15] Wu, X.M. and Chen, J.C., Best constants for Hausdorff operators on n-dimensional product spaces, *Sci. China Math.*, 2014, 57(3): 569-578.

[16] Zhu, X.R. and Chen, J.C., Integrability of the general product Hardy operators on the product Hardy spaces, *Appl. Math. J. Chin. Univ.*, 2012, 27(2): 225-233.

Best Constants for a Class of Hausdorff Operators on Lebesgue Spaces

WU Xiaomei

(*Xingzhi College, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang, 321004, P. R. China*)

Abstract: As an extension of classical Hardy operators and Cesàro operators, Hausdorff operators play an important role in harmonic analysis. We study the boundedness of a class of Hausdorff operators on Lebesgue spaces and get the sharp bounds. We also obtain the necessary and sufficient conditions for the boundedness of a class of multilinear Hausdorff operators on Lebesgue spaces. Moreover, we get the best constants for the operators on Lebesgue spaces.

Keywords: Hausdorff operators; multilinear operators; Lebesgue spaces; best constants