第46卷第6期 数 学 进 展 Vol. 46, No. 6
2017年11月 ADVANCES IN MATHEMATICS (CHINA) Nov., 2017

doi: 10.11845/sxjz.2016007b

Fermat 素数与 Jeśmanowicz 猜想

杨 海 [1,*], 付瑞琴 [2,**]

(1. 西安工程大学理学院, 西安, 陕西, 710048; 2. 西安石油大学理学院, 西安, 陕西, 710065)

摘要: 设 r 是正整数. 本文运用初等数论方法证明了方程 $((2^{r+1}+1)n)^x+((2^{2r+1}+2^{r+1})n)^y=((2^{2r+1}+2^{r+1}+1)n)^z$ 适合 $(x,y,z)\neq(2,2,2)$ 以及 $n>1$ 的正整数解 (x,y,z,n) 都满足 $x>z>y$; 特别是当 2^r+1 是素数时, 该方程仅有正整数解 $(x,y,z,n)=(2,2,2,t)$, 其中 t 是任意正整数, 即此时 Jeśmanowicz 猜想成立.

关键词: 本原商高数; Fermat 素数; Jeśmanowicz 猜想; 指数 Diophantine 方程
MR(2010) 主题分类: 11D61 / **中图分类号:** O156.7
文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2017)06-0857-10

1 引言及主要结论

设 $\mathbb{Z},\mathbb{N}$ 分别是全体整数和正整数的集合. 如果正整数 a,b,c 满足

$$a^2+b^2=c^2,\quad \gcd(a,b)=1,\quad 2\,|\,b, \tag{1.1}$$

则称 (a,b,c) 是一组本原商高数. 这样的 a,b,c 可表成 (见 [5, 定理 11.6.1])

$$a=u^2-v^2,\quad b=2uv,\quad c=u^2+v^2,\quad u>v,\ \gcd(u,v)=1,\ 2\,|\,uv,\ u,v\in\mathbb{N}. \tag{1.2}$$

1956 年, Jeśmanowicz[6] 曾经猜测: 方程

$$(an)^x+(bn)^y=(cn)^z,\quad x,y,z,n\in\mathbb{N} \tag{1.3}$$

仅有解 $(x,y,z,n)=(2,2,2,t)$, 其中 t 是任意正整数. 上述猜想称为 Jeśmanowicz 猜想. 在此将方程 (1.3) 适合 $(x,y,z)\neq(2,2,2)$ 的解 (x,y,z,n) 称为该方程的例外解. 显然, 解决 Jeśmanowicz 猜想就是要证明方程 (1.3) 没有例外解. 关于 Jeśmanowicz 猜想的早期结果主要集中在 $n=1$ 时的情况 (见文 [10]), 近十多年来对于 $n>1$ 的情况也有了一些结果 (见文 [2–3, 8–9, 11–15]). 根据现有的研究结果可知: 当 $n>1$ 时, 如果 (1.1) 中的 a 或 b 的不同素因数的个数越多, 则问题越加困难. 例如, 文 [11] 已经证明当 $n>1$ 且 b 是 2 的方幂时方程 (1.3) 没有例外解, 但是对于其他情况则只有零星的结果. 由此可知 Jeśmanowicz 猜想是一个迄今远未解决的数论难题.

本文讨论 (1.2) 中的 u 和 v 适合

$$u=2^r+1,\quad v=2^r,\quad r\in\mathbb{N} \tag{1.4}$$

收稿日期: 2016-01-08. 修改稿收到日期: 2016-05-08.
基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11226038, No. 11371012), 陕西省自然科学基金项目 (No. 2017JM1025), 陕西省教育厅科研计划项目 (No. 17JK0323) 和西安石油大学博士科研项目 (No. 2015BS06).
E-mail: * xpuyhai@163.com; ** xsyfrq@163.com

时的情况. 对此, 文 [3] 证明了: 当 $r \in \{1,2\}$ 时, 方程 (1.3) 没有适合 $n>1$ 的例外解 (x,y,z,n). 本文利用初等数论方法证明了以下结果:

定理 当 u 和 v 适合 (1.4) 时, 方程 (1.3) 适合 $n>1$ 的例外解 (x,y,z,n) 都满足 $x>z>y$. 特别是当 2^r+1 是素数时, 方程 (1.3) 没有适合 $n>1$ 的例外解.

因为当 u 和 v 适合 (1.4) 时, 由 (1.2) 可知 $b+1=c$, 所以由文 [4] 可知此时方程 (1.3) 没有适合 $n=1$ 的例外解 (x,y,z,n). 因此根据本文定理直接可得以下推论.

推论 当 u 是 Fermat 素数且 $v=u-1$ 时, Jeśmanowicz 猜想成立.

2 几个引理

引理 2.1[5, 定理 11.6.1] 方程

$$X^2+Y^2=Z^2, \quad \gcd(X,Y)=1,\ 2\,|\,XY,\ X,Y,Z\in\mathbb{N}$$

的任一组解 (X,Y,Z) 都可以表示成

$$X=f^2-g^2, \quad Y=2fg, \quad Z=f^2+g^2, \quad f>g,\ \gcd(f,g)=1,\ 2\,|\,fg,\ f,g\in\mathbb{N}.$$

对于正整数 D, 设 $h(-4D)$ 是判别式等于 $-4D$ 的二元二次原型的类数.

引理 2.2 当 $D>1$ 时, 有

$$h(-4D)<\frac{4}{\pi}\sqrt{D}\log(2\mathrm{e}\sqrt{D}).$$

证明 见 [5, 定理 11.4.3, 12.10.1 和 12.14.3]. □

引理 2.3 设 k 是适合 $k>1$ 以及 $\gcd(k,2D)=1$ 的正整数. 方程

$$X^2+DY^2=k^Z, \quad \gcd(X,Y)=1,\ Z>0,\ X,Y,Z\in\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

的任意一组解 (X,Y,Z) 都可以表示成

$$Z=Z_1t, \quad X+Y\sqrt{-D}=\lambda_1(X_1+\lambda_2Y_1\sqrt{-D})^t, \quad \lambda_1,\lambda_2\in\{\pm1\},\ t\in\mathbb{N}, \tag{2.2}$$

其中 X_1,Y_1,Z_1 是适合

$$X_1^2+DY_1^2=k^{Z_1}, \quad \gcd(X_1,Y_1)=1, \quad Z_1\,|\,h(-4D) \tag{2.3}$$

的正整数.

证明 见 [7, 定理 1 和 3]. □

引理 2.4 在引理 2.3 的题设条件下, 如果 (2.2) 中的 t 是奇数, 则当 $2^\alpha\,|\,Y$, 其中 α 是正整数时, 必有 $2^\alpha\,|\,Y_1$.

证明 因为 t 是奇数, 所以由 (2.2) 可得

$$X=\lambda_1X_1\sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}}\binom{t}{2i}X_1^{t-2i-1}(-DY_1^2)^i, \quad Y=\lambda_1\lambda_2Y_1\sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}}\binom{t}{2i+1}X_1^{t-2i-1}(-DY_1^2)^i. \tag{2.4}$$

由于 Y 是偶数, 又由 (2.1) 可知 $\gcd(X,Y)=1$, 所以 X 是奇数. 因此由 (2.4) 中第一个等式可知 X_1 也是奇数. 又因 k 是奇数, 故由 (2.3) 可知 DY_1^2 是偶数, 所以

$$\sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}}\binom{t}{2i+1}X_1^{t-2i-1}(-DY_1^2)^i$$

必为奇数. 于是, 由 (2.4) 中第二个等式可知: 当 $2^\alpha\,|\,Y$ 时, 必有 $2^\alpha\,|\,Y_1$. 证毕. □

引理 2.5[1] 方程

$$X^4+Y^2=Z^m,\quad \gcd(X,Y)=1,\ m>3,\ X,Y,Z,m\in\mathbb{N} \tag{2.5}$$

无解 (X,Y,Z,m).

引理 2.6[14, 定理 1.1] 方程 (1.3) 适合 $n>1$ 的例外解 (x,y,z,n) 都满足 $x>z>y$ 或 $y>z>x$.

3 定理的证明

当 u 和 v 满足 (1.4) 时, 由 (1.2) 可知

$$a=2^{r+1}+1,\quad b=2^{r+1}(2^r+1),\quad c=2^{r+1}(2^r+1)+1. \tag{3.1}$$

因为由文 [5] 的结果可知本定理在 $r=1$ 或 2 时成立, 所以下面不妨假定 $r\geq 3$.

设 (x,y,z,n) 是方程 (1.3) 的一组适合 $n>1$ 以及 $y>z>x$ 的例外解. 由 (1.3) 可知

$$a=a_1a_2,\quad a_1^x=n^{z-x},\ a_1>1,\ \gcd(a_1,a_2)=1,\ a_1,a_2\in\mathbb{N} \tag{3.2}$$

和

$$a_2^x+(2^{r+1}(2^r+1))^yn^{y-z}=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z. \tag{3.3}$$

如果 $a_2=1$, 那么由 (3.3) 可知 $1+(2^{r+1}(2^r+1))^yn^{y-z}=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z$. 于是可得

$$2^{(r+1)(y-1)}(2^r+1)^{y-1}n^{y-z}=\sum_{i=1}^{z}\binom{z}{i}2^{(r+1)(i-1)}(2^r+1)^{i-1}. \tag{3.4}$$

由于 $y\geq 3$, 所以比较 (3.4) 两边 2 的方幂可知

$$2^{(r+1)(y-1)}\,|\,z. \tag{3.5}$$

然而, 因为 $y>z$, 所以 $y-1\geq z$, 故由 (3.5) 可得 $z\geq 2^{(r+1)(y-1)}\geq 2^{(r+1)z}>z$, 矛盾. 由此可知 $a_2>1$.

由 (3.3) 可知

$$a_2^x\equiv 1\pmod{2^{r+1}}. \tag{3.6}$$

如果 $2\nmid x$, 那么由 (3.6) 可知 $a_2\equiv 1\pmod{2^{r+1}}$. 因为已知 $a_2>1$, 所以有 $a_2\geq 2^{r+1}+1$. 然而, 因为由 (3.2) 可知 $a_1>1$ 且 $a_1a_2=2^{r+1}+1$, 所以这是不可能的, 故必有 $2\,|\,x$. 同样, 如果 $2\,\|\,x$, 那么由 (3.6) 可知 $a_2^2\equiv 1\pmod{2^{r+1}}$ 以及 $a_2\equiv\lambda\pmod{2^r}$, 其中 $\lambda\in\{\pm 1\}$. 因为 $r\geq 3$, 所以

由此可得 $a_2 \geq 2^r+\lambda \geq 2^r-1$ 以及 $2^{r+1}+1 = a_1a_2 \geq 3a_2 \geq 3(2^r-1) = 2^{r+1}+(2^r-3) > 2^{r+1}+1$, 矛盾, 故必有

$$4 \mid x. \tag{3.7}$$

如果 $2 \mid z$, 那么由 (3.7) 可知 $a^{\frac{x}{2}} \equiv 1 \pmod 4$, 于是由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} &(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}} + a_2^{\frac{x}{2}} = 2f, \quad (2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}} - a_2^{\frac{x}{2}} = 2^{(r+1)y-1}g, \\ &(2^r+1)^y n^{y-z} = fg, \quad \gcd(f,g)=1,\ f,g \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

由 (3.8) 可得

$$(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}} = f + 2^{(r+1)y-2}g > 2^{(r+1)y-1}g \geq 2^{(r+1)y-1}. \tag{3.9}$$

然而, 由于 $r \geq 3$, $y \geq z+1$, 所以

$$2^{2r+2} > 2^{r+1}(2^r+1)+1. \tag{3.10}$$

于是由 (3.9) 和 (3.10) 可得 $2^{(r+1)z} > (2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}} > 2^{(r+1)y-1} \geq 2^{(r+1)z+r} > 2^{(r+1)z}$, 矛盾. 由此可知

$$2 \nmid z. \tag{3.11}$$

另外, 由 (3.7) 和 (3.11) 可知 $z-x$ 是奇数, 所以由 (3.2) 中第二个等式和 (3.7) 可知 n 是平方数, 于是有

$$n = m^2, \quad m > 1,\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

将 (3.12) 代入 (3.3) 即得

$$a_2^x + (2^{r+1}(2^r+1))^y m^{2(y-z)} = (2^{r+1}(2^r+1)+1)^z. \tag{3.13}$$

由于 $z > x$, 所以由 (3.7) 和 (3.11) 可知 z 是适合 $z \geq 5$ 的奇数. 因此, 根据引理 2.5, 由 (3.7) 和 (3.13) 可知 y 不可能是偶数, 故有

$$2 \nmid y. \tag{3.14}$$

因为当 $t > 0$ 时, 有 $\log(1+t) = \log t + \log(1+\frac{1}{t}) < \log t + \frac{1}{t}$, 于是

$$\log(2^{r+1}(2^r+1)+1) < \log(2^{r+1}(2^r+1)) + \frac{1}{2^r(2^r+1)}, \tag{3.15}$$

所以由 (3.13) 和 (3.15) 可知 $(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z > (2^{r+1}(2^r+1))^y m^{2(y-z)}$ 以及

$$\frac{z}{2^r(2^r+1)} > (y-z)\log(2^{r+1}(2^r+1)m^2). \tag{3.16}$$

又由 (3.11) 和 (3.14) 可知 $y-z$ 是偶数, 于是有 $y-z \geq 2$, 并且由 (3.12) 和 (3.16) 可得

$$z > 2^{r+1}(2^r+1)\log(2^{r+1}(2^r+1)\cdot 9). \tag{3.17}$$

因此, 根据引理 2.2 和 (3.17) 可得

$$z>\max\{h(-4(2^r+1)),\ h(-8(2^r+1))\}. \tag{3.18}$$

当 $2\,|\,r$ 时, 由 (3.7), (3.13) 和 (3.14) 可知方程

$$X^2+2(2^r+1)Y^2=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^Z,\quad \gcd(X,Y)=1,\ Z>0,\ X,Y,Z\in\mathbb{Z} \tag{3.19}$$

有解

$$(X,Y,Z)=\big(a_2^{\frac{x}{2}},\ 2^{\frac{(r+1)y-1}{2}}(2^r+1)^{\frac{y-1}{2}}m^{y-z},\ z\big). \tag{3.20}$$

根据引理 2.3, 由 (3.11), (3.18) 和 (3.20) 可知

$$Z=Z_1t,\quad t>1,\ 2\nmid t,\ t\in\mathbb{N}. \tag{3.21}$$

$$a_2^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{(r+1)y-1}{2}}(2^r+1)^{\frac{y-1}{2}}m^{y-z}\sqrt{-2(2^r+1)}=\lambda_1(X_1+\lambda_2Y_1\sqrt{-2(2^r+1)})^t,\quad \lambda_1,\lambda_2\in\{\pm1\}, \tag{3.22}$$

其中 X_1,Y_1,Z_1 是适合

$$X_1^2+2(2^r+1)Y_1^2=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{Z_1},\quad \gcd(X_1,Y_1)=1,\ Z_1\,|\,h(-8(2^r+1)) \tag{3.23}$$

的正整数. 因为 $2\nmid t$, 所以根据引理 2.4, 由 (3.22) 可知 $2^{\frac{(r+1)y-1}{2}}\,|\,Y_1$. 由此可知 $Y_1\geq 2^{\frac{(r+1)y-1}{2}}$, 并且由 (3.23) 可得

$$(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{Z_1}>2(2^r+1)Y_1^2\geq 2^{(r+1)y}(2^r+1). \tag{3.24}$$

然而, 因为由 (3.21) 知 t 是适合 $t\geq 3$ 的奇数, 所以有 $\frac{z}{3}\geq\frac{z}{t}=Z_1$, 于是由 (3.10) 和 (3.24) 可得

$$2^{(r+1)z}>2^{\frac{2(r+1)z}{3}}\geq 2^{2(r+1)Z_1}>(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{Z_1}>2^{(r+1)y}>2^{(r+1)z}, \tag{3.25}$$

矛盾.

同样, 当 $2\nmid r$ 时, 由 (3.7), (3.13) 和 (3.14) 可知方程

$$X^2+(2^r+1)Y^2=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^Z,\quad \gcd(X,Y)=1,\ Z>0,\ X,Y,Z\in\mathbb{Z} \tag{3.26}$$

有解

$$(X,Y,Z)=\big(a_2^{\frac{x}{2}},\ 2^{\frac{(r+1)y}{2}}(2^r+1)^{\frac{y-1}{2}}m^{y-z},z\big). \tag{3.27}$$

因此, 根据引理 2.3 和 2.4, 运用相同的方法由 (3.18) 和 (3.27) 可得类似 (3.25) 的矛盾.

综上所述可知, 当 u 和 v 满足 (1.4) 时, 方程 (1.3) 没有适合 $n>1$ 且 $y>z>x$ 的例外解 (x,y,z,n). 因此由引理 2.6 可知此时例外解必定满足 $x>z>y$.

当 2^r+1 是素数时, 由 [5, 定理 1.10.2] 可知 r 必为 2 的方幂. 此时根据文 [3] 的结果, 以下仅需讨论

$$r=2^l,\quad l\geq 2,\ l\in\mathbb{N} \tag{3.28}$$

时的情况. 设 (x,y,z,n) 是方程 (1.3) 的一组适合 $n>1$ 的例外解. 由前面的分析可知该解必满足 $x>z>y$. 因此, 由 (1.3) 和 (3.1) 可知

$$b=b_1b_2=2^{r+1}(2^r+1),\quad b_1>1,\ \gcd(b_1,b_2)=1,\ b_1,b_2\in\mathbb{N}, \tag{3.29}$$

$$b_1^y=n^{z-y}, \tag{3.30}$$

$$(2^{r+1}+1)^x n^{x-z}+b_2^y=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z. \tag{3.31}$$

由于 2^r+1 是奇素数, 所以由 (3.29) 可知 b_1 仅可能等于 $2^r+1, 2^{r+1}$ 或 $2^{r+1}(2^r+1)$. 以下就按照这三种情况来排除该解的存在性.

情况 I $b_1=2^r+1$, $b_2=2^{r+1}$.

此时由 (3.30) 可知 $(2^r+1)^y=n^{z-y}$. 因为 2^r+1 是奇素数, 所以有

$$n=(2^r+1)^s,\quad s\in\mathbb{N}, \tag{3.32}$$

其中 s 适合

$$y=s(z-y). \tag{3.33}$$

将 (3.32) 代入 (3.31) 即得

$$(2^{r+1}+1)^x(2^r+1)^{s(x-z)}+2^{(r+1)y}=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z. \tag{3.34}$$

因为 $2^{r+1}\equiv -2 \pmod{2^r+1}$, 所以由 (3.34) 可知

$$2^y\equiv(-1)^y \pmod{2^r+1}, \tag{3.35}$$

于是有 $2^{2y}\equiv 1 \pmod{2^r+1}$. 由于 $k=2r$ 是使 $2^k\equiv 1 \pmod{2^r+1}$ 成立的最小正整数, 所以 $2r\,|\,2y$, 即 $r\,|\,y$. 因此, 由 (3.28) 可知 y 必为偶数, 并且由 (3.35) 可得

$$2r\,|\,y. \tag{3.36}$$

因为 $2^{r+1}\equiv -1 \pmod{2^{r+1}+1}$ 以及

$$2(2^{r+1}(2^r+1)+1)\equiv -2^{r+1}\equiv 1 \pmod{2^{r+1}+1}, \tag{3.37}$$

所以由 (3.34) 和 (3.36) 可知

$$2^z\equiv 1 \pmod{2^{r+1}+1}. \tag{3.38}$$

又因为 $r+1$ 是奇数, $k'=2(r+1)$ 是使 $2^{k'}\equiv 1 \pmod{2^{r+1}+1}$ 成立的最小正整数, 所以由 (3.38) 可得

$$2(r+1)\,|\,z. \tag{3.39}$$

如果 $2\,|\,x$, 那么根据引理 2.1, 由 (3.34), (3.36) 和 (3.39) 可得

$$\begin{aligned}&(2^{r+1}+1)^{\frac{x}{2}}(2^r+1)^{\frac{s(x-z)}{2}}=f^2-g^2,\quad 2^{\frac{(r+1)y}{2}}=2fg,\quad (2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}=f^2+g^2,\\&f>g,\ \gcd(f,g)=1,\ 2\,|\,fg,\ f,g\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

由 (3.40) 中第二个等式可知 $f=2^{\frac{(r+1)y}{2}-1}$ 以及 $g=1$. 将此代入 (3.40) 中第三个等式可得

$$(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}=2^{(r+1)y-2}+1. \tag{3.41}$$

然而, 由 (3.41) 可得 $2^{(r+1)y-2}\equiv 0 \pmod{2^r+1}$, 矛盾, 故必有

$$2\nmid x. \tag{3.42}$$

由 (3.36) 和 (3.39) 可知 y 和 z 都是偶数, 并且有

$$\gcd\left((2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}+2^{\frac{(r+1)y}{2}},(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}-2^{\frac{(r+1)y}{2}}\right)=1,$$

以及 2^r+1 是奇素数, 于是由 (3.34) 可得

$$\begin{aligned}&(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}+2^{\frac{(r+1)y}{2}}\lambda=f^x,\quad (2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}-2^{\frac{(r+1)y}{2}}\lambda=(2^r+1)^{s(x-z)}g^x,\\&2^{r+1}+1=fg,\quad \lambda\in\{\pm1\},\ f,g\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

由 (3.43) 中第一个等式可知

$$f^x\equiv 1 \pmod{2^{r+1}}. \tag{3.44}$$

因为由 (3.42) 可知 x 是奇数, 所以由 (3.44) 可得 $f\equiv 1 \pmod{2^{r+1}}$. 又因为由 (3.43) 中第三个等式可知 $1\le f\le 2^{r+1}+1$, 所以 f 仅可能等于 1 或 $2^{r+1}+1$.

当 $f=1$ 时, 由 (3.43) 中第一个等式可得 $2^{\frac{(r+1)y}{2}}\equiv 0 \pmod{2^r+1}$, 矛盾. 当 $f=2^{r+1}+1$ 时, 由 (3.43) 可知 $g=1$ 以及

$$2(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}=(2^{r+1}+1)^x+(2^r+1)^{s(x-z)}. \tag{3.45}$$

由 (3.45) 可得 $0\equiv(2^r+1)^{s(x-z)}\equiv 2(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}-(2^{r+1}+1)^x\equiv 2-(-1)^x\equiv 2+1\equiv 3 \pmod{2^r+1}$. 然而, 因为由 (3.28) 可知 $r\ge 4$, 故不可能.

情况 II $b_1=2^{r+1}$, $b_2=2^r+1$.

此时, 由 (3.30) 可知 $2^{(r+1)y}=n^{z-y}$, 故有

$$n=2^t,\quad t\in\mathbb{N}, \tag{3.46}$$

其中 t 适合

$$(r+1)y=t(z-y). \tag{3.47}$$

将 (3.46) 代入 (3.31) 即得

$$2^{t(x-z)}(2^{r+1}+1)^x+(2^r+1)^y=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z. \tag{3.48}$$

因为 r 是偶数, 所以 $2^{r+1}+1\equiv 0 \pmod 3$, $2^r+1\equiv -1 \pmod 3$, $2^{r+1}(2^r+1)+1\equiv -1 \pmod 3$, 所以由 (3.48) 可知 $(-1)^{z-y}\equiv 1 \pmod 3$. 由此可得

$$z\equiv y \pmod 2. \tag{3.49}$$

又因为 $r+1$ 是奇数, 由 (3.49) 可知 $z-y$ 是偶数, 所以由 (3.47) 可知 y 是偶数, 故由 (3.49) 即得

$$2\,|\,y,\quad 2\,|\,z. \tag{3.50}$$

如果 $2\,|\,x$, 那么根据引理 2.1, 由 (3.48) 和 (3.50) 可知

$$\begin{aligned}&(2^r+1)^{\frac{y}{2}}=f^2-g^2,\quad 2^{\frac{t(x-z)}{2}}(2^{r+1}+1)^{\frac{x}{2}}=2fg,\quad (2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}=f^2+g^2,\\&f>g,\ \gcd(f,g)=1,\ 2\,|\,fg,\ f,g\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

因为 2^r+1 是奇素数, 所以由 (3.51) 中第一个等式可知

$$f=g+1,\quad (2^r+1)^{\frac{y}{2}}=2g+1. \tag{3.52}$$

将 (3.52) 代入 (3.51) 中第三个等式可得

$$2(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}=2(f^2+g^2)=(2g+1)^2+1=(2^r+1)^y+1. \tag{3.53}$$

然而, 由 (3.53) 可得 $0\equiv(2^r+1)^y\equiv 2(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}-1\equiv 2-1\equiv 1 \pmod{2^r+1}$, 矛盾, 故必有

$$2\nmid x. \tag{3.54}$$

因为 $2^{r+1}+1\equiv -1 \pmod{2^r+1}$, 所以由 (3.48) 和 (3.54) 可得

$$2^{t(x-z)}+1\equiv 0 \pmod{2^r+1}. \tag{3.55}$$

由 (3.55) 可知 $r\,|\,t(x-z)$. 又因为 r 是 2 的方幂, 并且由 (3.50) 和 (3.54) 可知 $x-z$ 是奇数, 所以有 $r\,|\,t$. 再因为 $r+1$ 是奇数且 $z-y$ 是偶数, 故由 (3.47) 可得

$$2r\,|\,y. \tag{3.56}$$

因为由 (3.56) 可知 $4\,|\,y$, 所以 $(2^r+1)^{\frac{y}{2}}\equiv(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}\equiv 1 \pmod{2^{r+1}}$. 因此, 由 (3.48) 可得

$$\begin{aligned}&(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}+(2^r+1)^{\frac{y}{2}}=2f^x,\quad (2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}-(2^r+1)^{\frac{y}{2}}=2^{t(x-z)-1}g^x,\\&2^{r+1}+1=fg,\quad f,g\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

由 (3.57) 中第一个等式可知

$$f^x\equiv 1 \pmod{2^r}. \tag{3.58}$$

又因为由 (3.54) 可知 x 是奇数, 故由 (3.58) 可得 $f\equiv 1 \pmod{2^r}$. 因为由 (3.57) 可知 f 是 $2^{r+1}+1$ 的大于 1 的约数, 故有 $f=2^{r+1}+1$. 将此代入 (3.57) 即得

$$(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}+(2^r+1)^{\frac{y}{2}}=2(2^{r+1}+1)^x. \tag{3.59}$$

由 (3.54) 和 (3.59) 可得 $1\equiv(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}+(2^r+1)^{\frac{y}{2}}\equiv 2(2^{r+1}+1)^x\equiv 2(-1)^x\equiv -2 \pmod{2^r+1}$. 然而, 因为 $r\geq 4$, 这不可能.

情况 III $b_1=2^{r+1}(2^r+1)$, $b_2=1$.

此时, 由 (3.30) 可知

$$(2^{r+1}(2^r+1))^y=n^{z-y}. \tag{3.60}$$

设 $d=\gcd(y,z)$, y 和 z 可表成

$$y=dy_1,\quad z=dz_1,\quad \gcd(y_1,z_1)=1,\ y_1,z_1\in\mathbb{N}. \tag{3.61}$$

将 (3.61) 代入 (3.60) 中可得

$$(2^{r+1}(2^r+1))^{y_1}=n^{z_1-y_1}. \tag{3.62}$$

因为 $\gcd(y_1,z_1-y_1)=1$, 所以由 (3.62) 可知

$$2^{r+1}(2^r+1)=m^{z_1-y_1},\quad n=m^{y_1},\ m\in\mathbb{N}. \tag{3.63}$$

又因为 2^r+1 是奇素数, 故由 (3.63) 可得 $z_1-y_1=1$, $m=2^{r+1}(2^r+1)$ 以及 $n=(2^{r+1}(2^r+1))^{y_1}$. 将此代入 (3.31) 即得

$$(2^{r+1}(2^r+1))^{y_1(x-z)}(2^{r+1}+1)^x+1=(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z. \tag{3.64}$$

由 (3.37) 和 (3.64) 可知

$$2^z\equiv 1 \pmod{2^{r+1}+1}. \tag{3.65}$$

因为 $r+1$ 是奇数, 所以由 (3.65) 可得

$$2(r+1)\mid z. \tag{3.66}$$

由 (3.66) 可知 z 是偶数, 于是有 $(2^{r+1}(2^r+1)+1)^z-1\equiv 0 \pmod{2^{r+2}}$, 故由 (3.64) 可知 $y_1(x-z)\geq 2$ 以及

$$2^{r+1}\mid z. \tag{3.67}$$

因为当 x 和 z 都是偶数时 (3.64) 显然不成立, 所以由 (3.67) 可知 x 必为奇数, 即 x 满足 (3.54). 于是由 (3.64) 和 (3.67) 可得

$$\begin{aligned}&(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}+1=2f^x,\quad (2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}-1=2^{(r+1)y_1(x-z)-1}(2^r+1)^{y_1(x-z)}g^x,\\ &2^{r+1}+1=fg,\quad f,g\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.68}$$

因为由 (3.67) 可知 $(2^{r+1}(2^r+1)+1)^{\frac{z}{2}}\equiv 1 \pmod{2^{2r+1}}$, 所以由 (3.68) 中第一个等式可得 $f>1$ 以及 $f^x\equiv 1 \pmod{2^{2r}}$. 又因为 x 为奇数, 所以有 $f\equiv 1 \pmod{2^{2r}}$ 以及 $f\geq 2^{2r}+1$. 然而, 因为 $r\geq 4$, 所以由 (3.68) 中第三个等式可得 $2^{r+1}+1=fg\geq f\geq 2^{2r}+1>2^{r+1}+1$, 矛盾.

综上所述, 当 u 和 v 满足 (1.4) 且 2^r+1 是素数时, 方程 (1.3) 没有适合 $n>1$ 的例外解. 定理证毕.

致谢 衷心感谢审稿专家对本文提出的宝贵修改意见和良好建议!

参考文献

[1] Bennett, M.A., Ellenberg, J.S. and Ng, N.C., The Diophantine equation $A^4 + 2^\delta B^2 = C^n$, *Int. J. Number Theory*, 2010, 6(2): 311-338.

[2] Deng, M.J., A note on the Diophantine equation $(na)^x + (nb)^y = (nc)^z$, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2014, 89(2): 316-321.

[3] Deng, M.J. and Cohen, G.L., On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1998, 57(3): 515-524.

[4] Hu, Y.Z. and Yuan, P.Z., On Jeśmanowícz's conjecture concerning Pythagorean numbers, *Acta Math. Sin., Chin. Ser.*, 2010, 53(2): 297-300 (in Chinese).

[5] 华罗庚, 数论导引, 北京: 科学出版社, 1979.

[6] Jeśmanowicz, L., Several remarks on Pythagorean numbers, *Wiad. Mat.*, 1955/1956, 1(2): 196-202 (in Polish).

[7] Le, M.H., Some exponential Diophantine equation I: The equation $D_1x^2 - D_2y^2 = \lambda k^z$, *J. Number Theory*, 1995, 55(2): 209-221.

[8] Le, M.H., A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1999, 59(3): 477-480.

[9] Ma, M.M. and Wu, J.D., On the Diophantine equation $(an)^x + (bn)^y = (cn)^z$, *Bull. Korean Math. Soc.*, 2015, 52(4): 1133-1138.

[10] Miyazaki, T., Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples, *J. Number Theory*, 2013, 133(2): 583-595.

[11] Miyazaki, T., A remark on Jeśmanowicz' conjecture for the non-coprimality case, *Acta Math. Sin., Engl. Ser.*, 2015, 31(8): 1255-1260.

[12] Tang, M. and Weng, J.X., Jeśmanowicz' conjecture with Fermat numbers, *Taiwanese J. Math.*, 2014, 18(3): 925-930.

[13] Tang, M. and Yang, Z.J., Jeśmanowicz' conjecture revisited, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2013, 88(3): 486-491.

[14] Yang, H. and Fu, R.Q., A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples, *J. Number Theory*, 2015, 156(1): 183-194.

[15] Yang, Z.J. and Tang, M., On the Diophantine equation $(8n)^x + (15n)^y = (17n)^z$, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2012, 86(2): 348-352.

Jeśmanowicz' Conjecture With Fermat Primes

YANG Hai[1], FU Ruiqin[2]

(*1. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an, Shaanxi, 710048, P. R. China; 2. School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an, Shaanxi, 710065, P. R. China*)

Abstract: Let r be a positive integer. Using some elementary number theory methods, we prove that the positive integer solutions (x, y, z, n) of the equation $((2^{r+1}+1)n)^x + ((2^{2r+1}+2^{r+1})n)^y = ((2^{2r+1}+2^{r+1}+1)n)^z$ with $n > 1$ and $(x, y, z) \neq (2, 2, 2)$ satisfy $x > z > y$. In particular, if $2^r + 1$ is a prime, then the equation has no such solutions. Thus it can be seen that Jeśmanowicz' conjecture is true in this case.

Keywords: primitive Pythagorean triple; Fermat prime; Jeśmanowicz' conjecture; exponential Diophantine equation