

一、(20分) 若每蚕产卵的数量 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布, 每只卵变为成虫的概率为 p , 且各卵是否变为成虫是相互独立的, 记 η 为每蚕养出成虫的数量。

1. 求 η 的概率分布;

2. 求 $\eta=k(k=0,1,\dots)$ 的条件下 ξ 的条件概率分布。

二、(20分) 设随机变量 $\xi \sim U(0,1)$, 在给定 $\xi = x$ ($0 < x < 1$) 时, η 的

条件密度函数为: $f_{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} x & 0 < y < 1/x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

1. 求 (ξ, η) 的联合密度函数; 2. 求 η 的密度函数;

3. 求 $P\{\xi > \eta\}$; 4. 求数学期望 $E(2\xi + \eta^{\frac{1}{2}})$ 。

三、(30分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$f(x, y) = \begin{cases} k(1+xy), & |y| < 1, |x| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

1. 求常数 k ;

2. 求 $P(X+Y < 0)$;

3. 问 X 与 Y 是否独立? 为什么?

4. 求 X^2 的密度函数;

5. 求 X 与 Y 的相关系数 $\rho(X, Y)$;

四、(20分) 1. 设随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 同分布于参数为 λ 的泊松分布, 且当

$|i-j| > 1$ 时有 $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$, 试证明序列 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律。

2. 某城市出租车公司有 2000 辆的士参加保险, 每一辆的士在一年里出事故的概率为 0.005, 参加保险的的士每年交 500 元的保险费. 若出事故, 保险公司最多赔偿 50000 元, 试利用中心极限定理近似计算保险公司一年赚钱不小于 500000 元的概率。

五、(20分) 设 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本。

1. $\frac{\xi_1^2}{\sigma^2}$ 服从什么分布? 求出 $\frac{\xi_1^2}{\sigma^2}$ 的密度函数;

2. 统计量 $T_1 = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{(\xi_1 + \xi_2)^2}$ 服从什么分布? 为什么?

3. $T_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{|\xi_1 + \xi_2|}$ 服从什么分布? 为什么?

4. 求常数 c 使得 $\frac{c(\xi_1 + \xi_2)}{\sqrt{\xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2}}$ 服从 t 分布, 并确定其自由度。

六、(20分) 设总体 X 服从区间 $[\theta, 1]$ 上的均匀分布, $\theta < 1$ 未知,

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本。

1. 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_2$; 2. 上述两个估计量是否为无偏估计, 若不是请修正为无偏估计; 3. 证明 $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的相合(一致)估计; 4. 试问 2 中的两个无偏估计量哪一个更有效?

七、(20分) 设某次考试的考生成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩 $(x_1, x_2, \dots, x_{36})$, 算得平均成绩 $\bar{x} = 66.5$ 分, 样

本标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{35} \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2} = 15$ 分。

1. 问在显著性水平 0.05 下, 是否可认为这次考试全体考生的平均成绩不高于 65 分? 并给出检验过程;
2. 在置信水平 $1 - \alpha = 0.95$ 下, 求 σ^2 的置信区间及单侧置信下限。

附注(下侧分位数):

$$t_{0.95}(16) = 1.746, t_{0.95}(15) = 1.753, t_{0.975}(15) = 2.132, t_{0.975}(16) = 2.120$$

$$\chi_{0.95}^2(16) = 26.296, \chi_{0.95}^2(15) = 24.996, \chi_{0.975}^2(15) = 27.488, \chi_{0.975}^2(16) = 26.296$$

$$\chi_{0.05}^2(16) = 7.962, \chi_{0.05}^2(15) = 7.261, \chi_{0.025}^2(16) = 6.908, \chi_{0.025}^2(15) = 6.262$$