山东科技大学 2018 年全国硕士学位研究生招生考试

高等代数试卷

一、计算题（10 分）设 $a_k \neq 0, k=1,2,\cdots,n$，计算:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a_2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a_3 & \cdots & 3 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a_{n-1} & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n+a_n \end{vmatrix}$$

二、证明题（10 分）已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$，证明 $A+E$ 可逆，并求 $(A+E)^{-1}$ (其中 E 为 n 阶单位矩阵).

三、计算题（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，计算 $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E$.

四、计算题（10 分）用正交线性替换将二次型 $f(x_1x_2x_3) = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 8x_1x_3 + 2x_3^2$ 化为标准型.

五、计算题（20 分）λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$

1. 有解? 2. 无解? 3. 有唯一解?

六、证明题（20 分）设σ是欧氏空间$\overline{V}$的一个变换.若对 $\forall\alpha,\beta\in\overline{V}$，$\sigma$满足$(\sigma(\alpha)),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$. 证明: 1. σ是$\overline{V}$上的线性变换; 2. σ是正交变换.

七、证明题（20 分）设有分块矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 其中$A,D$可逆. 证明:

1. $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\left|A-BD^{-1}C\right|\left|D\right|$;

2. $\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left(CA^{-1}-D\right)^{-1}CA^{-1}$.

八、计算题（20 分）已知线性变换σ在基e_1,e_2,e_3,e_4下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

求线性变换σ在以下基下的矩阵

1. e_1,e_3,e_2,e_4;

2. $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$.

九、综合题（30）已知$A\in P^{n\times n}$.

1. 证明: 集合$C(A)=\left\{B\middle|AB=BA,B\in P^{n\times n}\right\}$是$P^{n\times n}$的子空间;

2. 当$A=E_n$时，求$C(A)$;

3. 当$A=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$时，求$C(A)$的维数和$C(A)$的一组基.