南京航空航天大学

2018 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷 ）

科目代码： 601
科目名称： 数学分析
满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1. 计算下列极限(每题 6 分，共 12 分)。

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$

2. 计算下列积分(每题 6 分，共 12 分)。

(1) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

(2) 已知 $I_n=\int\tan^n xdx$，求此不定积分的递推公式。

3. 证明函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是：对 I 中任意的数列 $\{x_n\},\{\mathrm{y}_n\}$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-\mathrm{y}_n)=0$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(\mathrm{y}_n))=0$. (13 分)

4. 证明导数极限定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $U^o(x_0)$ 内可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在，则函数在点 x_0 可导，并且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$. (13 分)

5. 在计算定积分 $\int_0^2\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}dx$ 时有一个下面的做法：

因为 $[\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}]'=\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}$，于是由 Newton-Leibniz 公式，

$$\int_0^2\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}dx=\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}\Big|_0^2=0.$$

你认为此做法有错吗？错在哪里？正确的做法应该怎样？(12 分)

6. 判断积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+1}dx$ 的敛散性。如果收敛，进一步判断是条件收敛还是绝对收敛。(13 分)

7．将函数 $f(x)=x,\ x\in[0,\pi]$ 展开为余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.（12 分）

8．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处，

（1）是否连续？（2）偏导数是否存在？

（3）是否可微？（4）偏导数是否连续？（12 分）

9．设函数 $F(x)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos t}{t^x}\mathrm{d}t$，证明 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.（12 分）

10．设 Γ 为圆 $x^2+y^2=4$，函数 $f(x,y)$ 的绝对值等于点 (x,y) 到曲线 Γ 的距离，其符号按下列方法确定：当点 (x,y) 在圆 Γ 内部时为负号，外部时为正号. 若常数 a 满足 $0<a<2$，求二重积分 $\iint\limits_{|f(x,y)|\leq a} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.（13 分）

11．设在 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$.（13 分）

12．计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧。（13 分）