

# 考虑围压效应和塑性演化机制的中密砂力学模型

李震<sup>1</sup>, 赵洪波<sup>1</sup>, 刘尚各<sup>2</sup>, 徐荣超<sup>3</sup>, 王云飞<sup>1</sup>

(1. 河南理工大学 土木工程学院, 河南 焦作 454000; 2. 中交第二公路勘察设计研究院有限公司, 湖北 武汉 430056;

3. 华北水利水电大学 资源与环境学院, 河南 郑州 450045)

**摘要:** 为了实现对中密砂工程受荷变形的准确预测, 基于岩土材料宏观弹塑性理论框架和三轴试验结果, 分析中密砂变形、强度的影响因素和特征, 建立适应的屈服准则、硬化法则和流动法则。研究表明: (1) 中密砂的三轴力学特征对围压较为敏感, 随围压增大, 应力-应变曲线形态逐渐变化, 线性段斜率和峰值强度增大, 软化段减弱并消失, 体积应变-轴向应变曲线线性段斜率基本无变化, 体积剪胀程度减小, 高围压试验结束时体积应变相对初始加载时仍处于剪缩状态; (2) 考虑中密砂的围压效应和剪切破坏, 采用第三主应力和等效塑性剪应变增量表达塑性内变量, 峰值点处塑性内变量大于 0.5, 相对岩石更为滞后; (3) 弹性模量随围压呈指数型函数规律增大, 泊松比近似为常数; (4) 塑性变形过程中最大主应力和最小主应力近似符合线性规律, 内摩擦角近似线性增大, 黏聚力先增大后减小并符合指数类函数特征; (5) 剪胀角在低围压下随塑性变形逐渐减小, 高围压下先增大后减小, 高围压下剪胀角低于低围压; (6) 数值曲线与试验数据吻合度高, 可表达中密砂围压效应和塑性演化机制, 适用于对应力状态敏感的中密砂的精确计算。

**关键词:** 土力学; 围压效应; 塑性演化; 中密砂; 力学模型; 弹塑性理论

**中图分类号:** TU 43

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-6915(2018)11-2610-11

## Mechanical model for medium dense sand considering confining pressure effect and plastic evolution

LI Zhen<sup>1</sup>, ZHAO Hongbo<sup>1</sup>, LIU Shangge<sup>2</sup>, XU Rongchao<sup>3</sup>, WANG Yunfei<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000, China; 2. CCCC Second Highway Consultants Co., Ltd., Wuhan, Hubei 430056, China; 3. School of Resources and Environment, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou, Henan 450045, China)

**Abstract:** The influencing factor and the characteristics of deformation and strength of medium dense sand samples were analyzed based on the macroscopic theory of elasto-plasticity and triaxial tests in order to precisely predict the deformation of medium dense sand on site. The yielding criteria, the hardening law and the flow rule were formulated accordingly. The stress-strain curves change with the increasing of confining pressure. The slope of the linear section of stress-strain curves and the peak strength increase with the increasing of confining pressure. The softening section reduces and even disappears. The gradient of volumetric strain-axial strain curve remains as usual basically. The shear dilation decreases. Under the high confine pressure, the samples exhibit the

**收稿日期:** 2018-06-05; **修回日期:** 2018-07-15

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51704097, 51709113); 河南省教育厅高等学校重点科研项目(16A560004)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 51704097 and 51709113) and Key Scientific Research Project of Henan Higher Education Institutions(Grant No. 16A560004)

**作者简介:** 李震(1986-), 男, 博士, 2009年毕业于山东科技大学采矿工程专业, 现任讲师, 主要从事岩土力学试验、理论和工程安全性分析等方面的教学与研究工作。E-mail: zhenli@hpu.edu.cn

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2018.0631

shear contraction in the whole shearing process. Considering the confining effect and shear failure in medium dense sand, the internal plastic variable is expressed by the third principal stress and effective plastic shear strain increment. The internal plastic variable at peak is larger than 0.5 and much larger than that of rock. The elastic modulus increases exponentially with the increasing of confining pressure. Poisson's ratio remains the same approximately. The maximum and minimum principal stresses vary linearly in the process of plastic deformation. The internal friction angle increases linearly, and the cohesion increases and then decreases exponentially. The dilation angle decreases with the plastic deformation under the low confining pressure, but it increases and decreases under the high confining pressure. The calculated curve is basically identical to the experimental data, indicating that the model is suitable for medium dense sand.

**Key words:** soil mechanics; confining pressure effects; plastic evolution; medium dense sand; mechanical model; elastoplastic theory

## 1 引 言

土的基本特性和力学模型作为土力学学科的一个重要分支,为解决相关工程问题提供了重要的理论基础和技术支撑。姚仰平等<sup>[1]</sup>对土的力学行为作了系统性的总结,将土的力学特性分成基本特性、亚基本特性与关联基本特性三大类,基本特性包括压硬性、剪胀性与摩擦性,亚基本特性包括应力历史依存性、应力路径依存性、软化特性、各向异性、结构性、蠕变特性、颗粒破碎特性以及温度特性等,关联基本特性包括屈服特性、正交流动性、相关性、共轴特性以及临界状态特性等。不同土类具有特定的力学特性,黏性土的变形特性研究已相对成熟,而砂土的变形特性的研究仍难以满足工程实践的需要<sup>[2]</sup>。

对于砂土,通常用孔隙比  $e$  或相对密度  $D_r$  描述其松紧程度,工程上将  $0 < D_r < 1/3$  的砂称为松砂,将  $1/3 < D_r < 2/3$  的砂称为中密砂,将  $2/3 < D_r < 1$  的砂称为密砂。砂土试验研究发现,在相同围压条件下,松砂剪缩,密砂剪胀<sup>[3]</sup>。在实际工程应用中,地基承载力与变形破坏也与土类直接相关,松砂易发生冲剪破坏,中密砂地基的破坏形式具有局部剪切破坏的特点,密砂地基常发生整体剪切破坏<sup>[4]</sup>。中密砂的相对密度介于密砂和松砂之间,可看作一种过渡状态的砂土组成形式,其力学行为表现也更为丰富。R. Verdugo 和 K. Ishihara<sup>[5]</sup>发现紧砂在高围压下剪切可能会出现松砂的特性,而松砂在低围压下剪切可能会出现紧砂的特性。由此可预测,中密砂在不同应力状态下可呈现更为丰富的力学特征。

岩土本构研究的热点之一即多场多尺度模型研究,其中多尺度模型大致可分为细观模型和宏观模

型。沈珠江<sup>[6-8]</sup>把用细观法建立的本构模型称为结构性模型,认为建立土体结构性模型和相应的分析理论是现代土力学的基本问题。宏观模型将岩土材料视为连续介质,采用宏观状态变量来反映力学特征,变量相对容易确定,与数值方法分析可较好地结合。岩土材料弹塑性本构模型为应用最普遍的宏观模型,以弹性理论和塑性增量理论为基础,通过屈服准则、硬化法则、流动法则,反映岩土体压硬性和剪胀性等力学特性,可描述复杂加载条件下土体的变形与破坏机制。现有 Cam-clay 模型<sup>[9]</sup>、UH 模型<sup>[10]</sup>、Asaoka 模型<sup>[11]</sup>、Li-Dafalias 模型<sup>[12]</sup>、Yin-Graham 模型<sup>[13]</sup>、清华模型<sup>[14]</sup>、“南水”模型<sup>[15]</sup>、“后工”模型<sup>[16]</sup>和椭圆-抛物线模型<sup>[17]</sup>、弹塑性耦合模型<sup>[18]</sup>等对土体力学响应给出了较为准确的描述。在弹塑性模型研究领域,一些学者通过力学参数演化规律的研究,建立了塑性内变量表征塑性演化程度的弹塑性模型,如:周 辉等<sup>[19-20]</sup>基于弹塑性耦合理论,提出了脆性大理岩弹塑性耦合力学模型;李 震等<sup>[21]</sup>考虑绿泥石片岩的硬化软化和剪胀特性建立了适用于软岩的弹塑性模型。这类模型反映了岩石材料力学参数随塑性演化的客观规律,具有明确的物理意义,理论上可推广至具有内摩擦性质的岩土类材料。

岩土类材料的应力-应变关系极为复杂,目前尚未存在一种完美适用于各种的土类以及不同加载情况的模型<sup>[22-25]</sup>。基于此,本文选取力学特征表现丰富的中密砂,针对中密砂的压硬性和剪胀性,在依托试验数据定义的塑性内变量基础上,分析弹性参数、强度参数、剪胀角的演化规律,采用相适应的屈服准则、硬化法则和流动法则,建立考虑围压效应和塑性演化机制的中密砂力学模型,并结合岩石材料对中密砂力学参数演化规律进行若干探讨,

旨在应用于具有类似力学特征岩土类材料的工程计算。

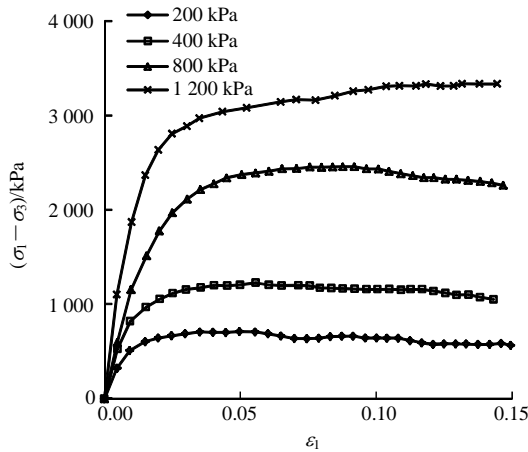
## 2 中密砂三轴试验

### 2.1 试样概况

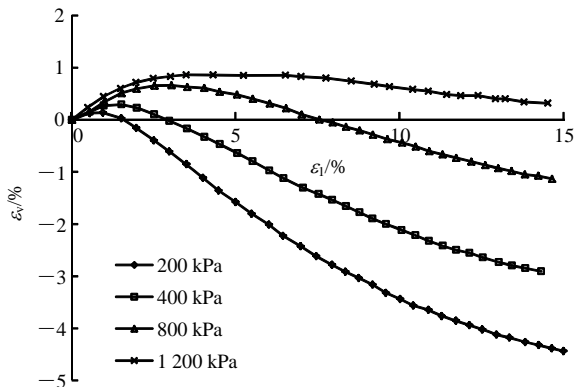
本文力学模型的建立以参考朱俊高等<sup>[26]</sup>的试验结果为基础展开。试验中砂土的最大及最小干密度分别为 1.757 和 1.472 g/cm<sup>3</sup>，试样直径 101 mm，高度 200 mm，相对密实度为 0.55，干密度为 1.616 g/cm<sup>3</sup>。砂土在试验前预浸泡 12 h 以上并煮沸 30 min 以保证试样饱和度。

### 2.2 试验曲线分析

三轴试验方法采用固结排水，试验围压分别为 200，400，800 和 1 200 kPa。应力 - 应变曲线和体积应变 - 轴向应变曲线如图 1 所示。



(a) 应力 - 应变曲线



(b) 体应变 - 轴向应变曲线

图 1 中密砂试样三轴试验曲线

Fig.1 Triaxial test curves for medium dense sand

由图 1(a)可见：(1) 应力 - 应变曲线近似由线性段、屈服至峰值段和峰值至残余段组成；(2) 线性段斜率对围压较为敏感，围压越大弹性模量越大，线性段形态差异较大；(3) 围压越大，强度越高，

峰值强度对应的轴向应变表现为增大趋势；(4) 围压 200~800 kPa 的峰后软化不明显，围压 1 200 kPa 未出现软化段。

由图 1(b)可见：(1) 体积应变 - 轴向应变曲线存在拐点，即压缩状态下体积应变最大点，拐点后继续加载试样体积开始有膨胀趋势；(2) 低围压下拐点处体积应变小于高围压下拐点处体积应变；(3) 不同围压下从原点至拐点的体积应变压缩段斜率差别不大，说明泊松比近似为常数；(4) 围压越大，剪胀越弱，围压 1 200 kPa 试样加载结束后的体积应变相对初始加载时仍处于压缩状态。

因此，中密砂的强度和弹性模量对围压较为敏感，延性特征比较突出，并伴随围压增大剪胀现象减弱，所以在分析中密砂力学特性和建立相应力学模型时必须考虑以上特征。

### 2.3 弹性参数和强度参数

取图 1 初始加载时的线性段，由常规三轴加载的应力和应变增量关系求解弹性参数，弹性模量和泊松比见表 1。

表 1 中密砂试样弹性模量和泊松比

Table 1 Elastic moduli and Poisson's ratios for medium dense sand

围压/kPa	弹性模量/MPa	泊松比
200	59.178	0.409
400	63.422	0.297
800	69.586	0.384
1 200	108.812	0.345

由此可见，弹性模量随围压增大逐渐变大，不同围压下差异较大，泊松比变化规律不明显。

为了研究力学参数随塑性演化特征，定义表示塑性演化程度的内变量。由于岩土材料一般发生剪切破坏，所以一般取等效塑性剪应变为内变量<sup>[19-21]</sup>。同时，根据试验曲线揭示出的围压敏感性，因此，采用考虑塑性剪切应变和围压的塑性内变量  $\kappa$ ：

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \int d\kappa \\ d\kappa &= \frac{d\gamma^p}{f(\sigma_3/p_0)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中： $d\kappa$  为塑性内变量增量； $d\gamma^p$  为等效塑性剪应变增量，

$d\gamma^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\mathbf{e}^p : d\mathbf{e}^p}$ ， $d\mathbf{e}^p$  为塑性偏应变张量， $d\mathbf{e}^p = d\mathbf{\epsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr}(d\mathbf{\epsilon}^p) \mathbf{I}$ ， $d\mathbf{\epsilon}^p$  为塑性应变张量，

$I$  为单位张量； $f(\sigma_3 / p_0)$  为最小主应力  $\sigma_3$  的函数，在常规三轴试验中即为试样围压， $p_0$  为任意压应力（本文取 100 kPa），引入  $p_0$  即对考虑围压项进行无量纲化处理。

为了统一各围压下的塑性演化程度，采用应力 - 应变曲线中的初始屈服、峰值、残余 3 个特征点。其中，初始屈服表示中密砂由弹性过渡到塑性的转折点，此时裂隙逐渐产生和贯通，体积应变由压缩转为膨胀趋势<sup>[27]</sup>，因此，本文采用体积应变 - 轴向应变曲线的拐点表征初始屈服；峰值特征点一般采用应力 - 应变曲线的最高点，如果无应变软化段，可取偏压增长速率下降到某值时为峰值点；残余特征点选取峰后应力降低速率平缓点，如果无应变软化段，可取轴向应变达到某值时为残余点。在此基础上，采用初始屈服时塑性内变量为 0，残余特征点塑性内变量为 1，则塑性内变量取值范围为 0~1。

由于  $f(\sigma_3 / p_0)$  函数仅与围压有关，在某围压下  $f(\sigma_3 / p_0)$  函数取值为常数，其值即为残余特征点的等效塑性剪应变。因此，通过研究残余特征点等效塑性剪应变与围压的关系，即得  $f(\sigma_3 / p_0)$  函数表达式。残余特征点等效塑性剪应变与围压演化关系如图 2 所示。

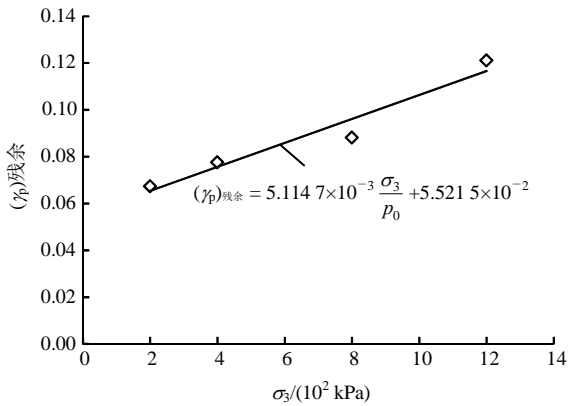


图 2 残余特征点等效塑性剪应变与围压  
Fig.2 Variation of effective plastic shear strain in residual point under various confining pressures

因此，本文中的中密砂  $f(\sigma_3 / p_0)$  函数表达式为

$$f(\sigma_3 / p_0) = 5.114 7 \times 10^{-3} \frac{\sigma_3}{p_0} + 5.521 5 \times 10^{-2} \quad (2)$$

在得到  $f(\sigma_3 / p_0)$  函数表达式基础上，结合试验数据，通过式(1)即可得到不同塑性内变量下的后继屈服应力(见表 2)。可见，在相同塑性内变量条件下，第一主应力随围压增大而增大；低围压下第一主应力达到峰值后有减小趋势并逐渐趋于稳定，高围压 ( $\sigma_3 = 40$  kPa) 下第一主应力呈持续增大趋势，在达到

表 2 中密砂试样后继屈服应力与强度参数

Table 2 Subsequent yielding stress and strength parameters for medium dense sand

塑性内变量	第一主应力/kPa				内摩擦角/(°)	黏聚力/kPa
	200 kPa	400 kPa	800 kPa	1 200 kPa		
0.0	650.46	1 373.04	2 901.49	4 009.33	33.04	6.88
0.1	814.84	1 476.55	3 108.88	4 213.43	33.60	40.13
0.2	864.64	1 544.96	3 203.92	4 297.82	33.78	52.07
0.3	889.43	1 578.56	3 242.99	4 352.69	33.96	57.86
0.4	900.44	1 599.82	3 254.23	4 396.01	34.14	59.32
0.5	903.39	1 608.83	3 250.70	4 433.21	34.32	57.77
0.6	901.49	1 611.76	3 237.34	4 463.51	34.50	54.25
0.7	898.47	1 610.27	3 217.45	4 493.15	34.68	49.56
0.8	892.26	1 606.33	3 196.14	4 519.71	34.85	44.29
0.9	884.73	1 599.28	3 169.52	4 541.63	35.03	38.88
1.0	873.85	1 587.56	3 166.44	4 571.48	35.20	33.63

峰值后增长速率逐渐减小并稳定。

强度参数的选取与强度理论相关，因此，对初始屈服、峰值、残余 3 个特征点的主应力进行研究，如图 3 所示。可见，3 个特征点的最大主应力和最小主应力近似符合线性规律，表明采用 Mohr-Coulomb 强度理论研究密砂的后继屈服强度参数具有可行性。

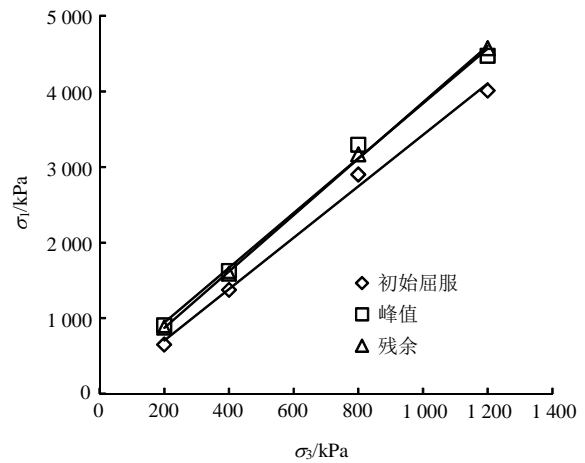


图 3 初始屈服、峰值、残余  $\sigma_1$  与  $\sigma_3$  的关系  
Fig.3 Relationships between  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  in initial yield, peak and residual point

由表 2 中不同围压下的最大主应力数值，采用 Mohr-Coulomb 强度理论可求得各塑性内变量对应的内摩擦角和黏聚力(见表 2)。在求强度参数过程中发现最大主应力和最小主应力的线性规律较好，说

明前面采用 Mohr-Coulomb 强度理论处理后继屈服强度参数是可行的。由表 2 可见，内摩擦角大幅度逐渐增加，由初始屈服时的 33.04° 增加至残余时的 35.20°；黏聚力在初始屈服后有大幅度跳跃式增加，由初始屈服时的 6.88 kPa 增加至 59.32 kPa，而后逐渐减小，在残余时达到 33.63 kPa。

### 3 中密砂力学模型

#### 3.1 弹性参数演化规律

由表 1 可见，弹性模量对围压较为敏感，随围压增大而逐渐增大。弹性模量的变化主要与压密作用有关，随围压增大，中密砂的孔隙逐渐闭合，孔隙变形减小，宏观上表现为刚度增大；但当围压增大到一定程度后，孔隙闭合潜力减小，颗粒和颗粒刚性接触趋于稳定，此时弹性模量增长速率减缓。因此，弹性模量的围压效应可以采用如下指数函数来表征：

$$E = a_1 e^{a_2 \sigma_3} + a_3 \quad (3)$$

式中： $a_1$ ， $a_2$ ， $a_3$  均为常数，可通过常规三轴试验不同围压下的弹性模量拟合得到。对于本文的中密砂，由表 1 可见，围压 1 200 kPa 时弹性模量相对离散，因此，由式 (3) 拟合时未采用，可得  $a_1 = -39\ 450.80$ ， $a_2 = -0.000\ 59$ ， $a_3 = 94\ 335.77$  (弹性模量、围压的单位取 kPa)，拟合曲线如图 4 所示。

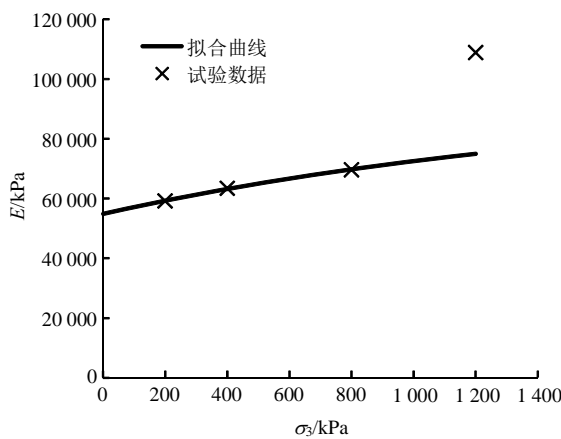


图 4 E 与  $\sigma_3$  的关系

Fig.4 Relationship between  $E$  and  $\sigma_3$

由表 1 可见，泊松比没有规律性变化，可近似取为常数，即

$$\nu = b_1 \quad (4)$$

式中： $b_1$  为常数，可通过常规三轴试验不同围压下

的泊松比拟合得到。对于本文的中密砂，由表 1 可得  $b_1 = 0.359$ ，拟合曲线如图 5 所示。

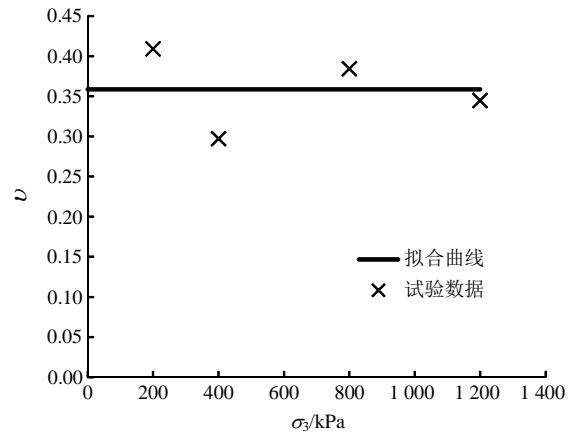


图 5  $\nu$  与  $\sigma_3$  的关系

Fig.5 Relationship between  $\nu$  and  $\sigma_3$

#### 3.2 强度准则与硬化法则

由图 3 可见，中密砂初始屈服、峰值、残余的最大主应力和最小主应力近似符合线性规律，同时，在计算后继屈服的强度参数时，2 个主应力间的线性关系也较好，表明本文可采用 Mohr-Coulomb 准则作为中密砂力学模型的强度准则。

由表 2 可见，内摩擦角和黏聚力随塑性内变量呈规律性变化，因此，后继屈服面可以表达为(本文均取压应力为正)：

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi_\kappa}{1 - \sin \varphi_\kappa} \sigma_3 + 2c_\kappa \frac{\cos \varphi_\kappa}{1 - \sin \varphi_\kappa} \quad (5)$$

式中： $\varphi_\kappa$ ， $c_\kappa$  分别为后继屈服中随塑性内变量变化的内摩擦角和黏聚力。

表 2 中内摩擦角随塑性内变量增加而增大，并基本呈线性规律，可用简单的线性函数表示为

$$\varphi_\kappa = d_1 \kappa + d_2 \quad (6)$$

式中： $d_1$ ， $d_2$  均为常数，可通过常规三轴试验不同塑性内变量下的内摩擦角拟合得到。对于本文的中密砂，由表可得  $d_1 = 1.96$ ， $d_2 = 33.3$ ，拟合曲线如图 6 所示。

表 2 中黏聚力随塑性内变量先大幅增加，而后减小，可用指数函数表示为

$$c_\kappa = k_1 e^{k_2 \kappa + k_3 \sqrt{\kappa}} \quad (7)$$

式中： $k_1$ ， $k_2$ ， $k_3$  均为常数，可通过常规三轴试验不同塑性内变量下的黏聚力拟合得到。对于本文的中密砂，由表可得  $k_1 = 10.05$ ， $k_2 = -4.46$ ， $k_3 = 5.64$ ，拟合曲线如图 7 所示。

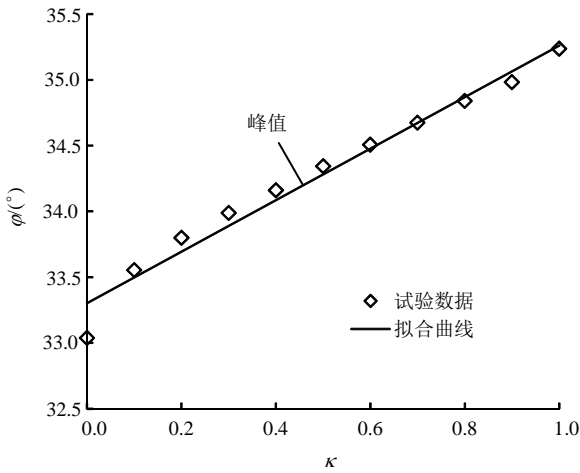


图 6  $\varphi$ 与 $\kappa$ 的关系

Fig.6 Relationship between  $\varphi$  and  $\kappa$

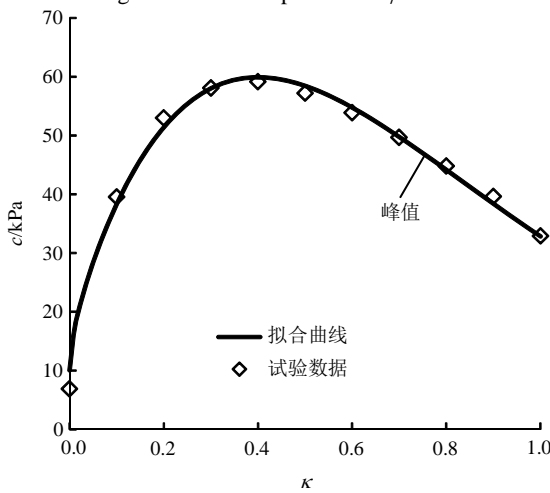


图 7  $c$ 与 $\kappa$ 的关系

Fig.7 Relationship between  $c$  and  $\kappa$

为确定峰值前后内摩擦角和黏聚力的演化特征，需确定峰值点处塑性内变量数值。由试验数据和式(1)，得到峰值点和残余点的等效塑性剪应变，进而得到不同围压对应的峰值点的塑性内变量，为便于研究，取其平均值。不同围压下特征点等效塑性剪应变和内变量列于表 3。

表 3 不同围压下特征点等效塑性剪应变和内变量

Table 3 Effective plastic shear strain and internal variable in feature points under various confining pressures

围压/ kPa	等效塑性剪应变		峰值 塑性内变量	峰值塑性内变量 平均值
	峰值	残余		
200	0.039	0.067	0.574	0.569
400	0.041	0.078	0.533	
800	0.051	0.088	0.586	
1 200	0.071	0.121	0.587	

峰值点塑性内变量平均值为 0.569，并于图 6

和 7 中标出。可见，黏聚力在峰值前和峰值后变化趋势基本一致，内摩擦角在峰值前先增大后减小，峰值处的黏聚力与黏聚力最大值相差 3.86 kPa，黏聚力在峰值后继续减小至最小值。

### 3.3 流动法则

岩土材料在塑性变形过程中体积会发生永久性变化，这种变化通常与颗粒调整和破碎有关。如图 1 所示，低围压下中密砂的体积应变先发生剪缩后发生剪胀，高围压(1 200 kPa)下中密砂体积应变先发生剪缩，而后出现剪胀趋势，但试验结束时总的体积应变相对偏压初次加载时仍为压应变。准确表征中密砂的体积应变随围压和塑性程度变化规律的关键在于选取合适的流动法则。

B. Hansen<sup>[28]</sup>首次提出的剪胀角概念，取塑性体积应变与剪切应变的比值确定剪胀角，并用于势函数和流动法则的确定。传统塑性力学常采用关联的流动法则，即当强度准则取 Mohr-Coulomb 准则时，剪胀角取值等于内摩擦角，但通常会夸大剪胀角数值。郑颖人和孔亮<sup>[29]</sup>建立了适用于岩土材料的广义塑性理论，构造了 3 个正交塑性势面实现屈服面与塑性势面的非关联。后继的学者采用非关联流动法则处理塑性势面，如：孔位学等<sup>[30]</sup>认为，岩土材料在非关联流动法则条件下剪胀角取为内摩擦角的一半，即  $\varphi/2$ ；康亚明等<sup>[31]</sup>认为，正常固结土的剪胀角取值为  $1/3 \sim 1/2$  倍的内摩擦角；Plaxis 材料手册里认为黏性土的剪胀角通常可以取成  $0^\circ$ ，石英砂剪胀角取为  $\varphi - 30^\circ$ <sup>[32]</sup>。

本文中采用非关联流动法则研究剪胀角的演化规律。与强度准则对应，根据广义塑性理论，常规三轴试验应力路径下的塑性势函数可取为

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \sigma_1 - \sigma_2 N_\psi - 2c\sqrt{N_\psi} \\ g_2 &= \sigma_1 - \sigma_3 N_\psi - 2c\sqrt{N_\psi} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中： $N_\psi$  为剪胀角  $\psi$  的函数， $N_\psi = (1 + \sin \psi) / (1 - \sin \psi)$ 。

与式(8)对应的非关联流动法则可表达为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + d\lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (9)$$

式中： $d\lambda_1$  和  $d\lambda_2$  为系数。

由式(8)和(9)可得到 3 个塑性主应变增量：

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda_1 + d\lambda_2 \quad (10)$$

$$d\varepsilon_2^p = -d\lambda_1 N_\psi \quad (11)$$

$$d\varepsilon_3^p = -d\lambda_2 N_\psi \quad (12)$$

由此可得剪胀角表达式:

$$\psi = \arcsin \frac{d\varepsilon_v^p}{-2d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_v^p} \quad (13)$$

式(13)中的剪胀角表达式中含有塑性体积应变增量和塑性第一主应变增量, 而由试验数据仅可直接得到不同塑性内变量下对应的塑性体积应变和塑性第一主应变。为此, 分别建立塑性体积应变  $\varepsilon_v^p$  和  $-2\varepsilon_1^p + \varepsilon_v^p$  与内变量的演化关系, 通过对函数求微分即可分别得到塑性体积应变增量  $d\varepsilon_v^p$  和  $-2d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_v^p$  与塑性内变量增量的演化关系; 通过对塑性内变量增量赋予较小的数值(如取  $10^{-5}$ ), 即可得到不同塑性内变量对应的塑性体积应变增量  $d\varepsilon_v^p$  和  $-2d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_v^p$ 。下面以围压 200 kPa 为例求取不同塑性内变量下的剪胀角数值。

分别求取围压 200 kPa 下不同塑性内变量对应的塑性体积应变  $\varepsilon_v^p$  和  $-2\varepsilon_1^p + \varepsilon_v^p$ , 并建立演化关系(见图 8):

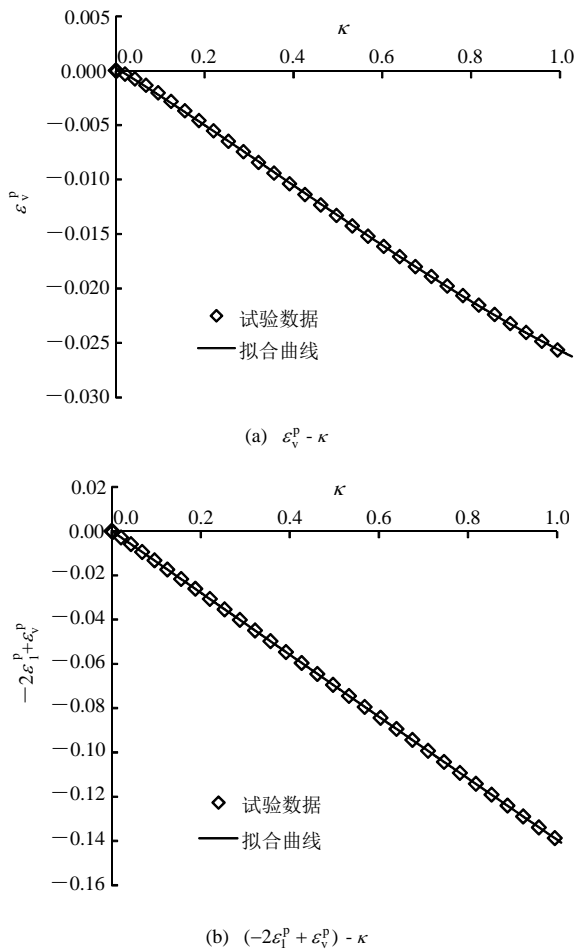


图 8 围压 200 kPa 下不同塑性内变量对应的  $\varepsilon_v^p$  和  $-2\varepsilon_1^p + \varepsilon_v^p$

Fig.8 Relationship between  $\varepsilon_v^p$ ,  $-2\varepsilon_1^p + \varepsilon_v^p$  and internal plastic variable under confining pressure 200 kPa

$$\varepsilon_v^p = 6.32 \times 10^{-3} \kappa^3 - 7.15 \times 10^{-3} \kappa^2 - 2.511 \times 10^{-2} \kappa + 2.488 \times 10^{-4} \quad (14)$$

$$-2\varepsilon_1^p + \varepsilon_v^p = 2.11 \times 10^{-3} \kappa^3 - 2.38 \times 10^{-3} \kappa^2 - 0.139 \kappa + 8.29 \times 10^{-5} \quad (15)$$

对式(14), (15)取微分, 并取内变量增量为  $10^{-5}$ , 可得不同内变量对应的  $d\varepsilon_v^p$  和  $-2d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_v^p$ :

$$d\varepsilon_v^p = 1.896 \times 10^{-9} \kappa^2 - 1.43 \times 10^{-9} \kappa - 2.511 \times 10^{-7} \quad (16)$$

$$-2d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_v^p = 6.321 \times 10^{-8} \kappa^2 - 4.766 \times 10^{-8} \kappa - 0.139 \kappa + 1.393 \times 10^{-6} \quad (17)$$

将代入式(13)可得围压 200 kPa 下不同内变量对应的剪胀角。同理, 可得其他围压条件下剪胀角数值(见图 9)。

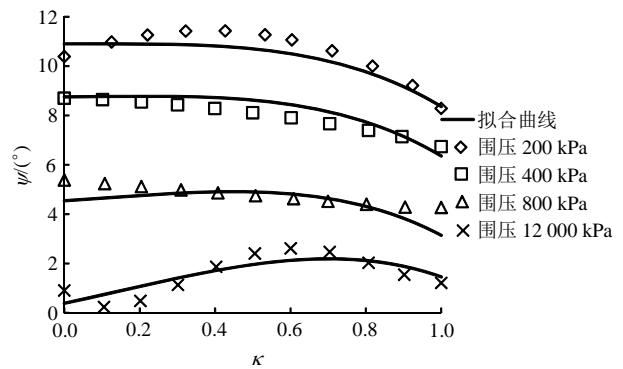


图 9 不同围压和塑性内变量对应的剪胀角

Fig.9 Dilation angles under various confining pressures and internal plastic variables

可见, 剪胀角主要影响因素有塑性内变量和围压: 随塑性内变量增大, 剪胀角先增大后减小; 随围压增大, 剪胀角减小。剪胀角可采用如下考虑围压(引入  $p_0$  对  $\sigma_3$  进行无量纲化处理)和塑性内变量的形式表达:

$$\psi(\sigma_3, \kappa) = m_1 + m_2 \left( \frac{\sigma_3}{p_0} \right)^{m_3} + m_4 \kappa^{m_5} + m_6 \left( \frac{\sigma_3}{p_0} \right)^{m_7} \kappa^{m_8} \quad (18)$$

式中:  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$  均为常数, 可通过常规三轴试验不同塑性内变量和围压下的剪胀角拟合得到。对于本文的中密砂,  $m_1 = 13.134, m_2 = -1.139, m_3 = 0.972, m_4 = -2.564, m_5 = 3.588, m_6 = 0.00345, m_7 = 2.801, m_8 = 1.028$ , 拟合曲线如图 9 所示。

### 4 力学模型的数值验证

为了验证所建模型的适用性，借鉴周 辉等<sup>[19-21]</sup>的研究，通过有限差分软件  $FLAC^{3D}$  提供的 UDM 接口自定义模型，引入了塑性内变量表达，通过 FISH 语言自动读取各单元内变量和围压，并结合本文力学参数表达式，依据单元内变量和围压状态更新各力学参数，完成预定加载步并将模型在  $FLAC^{3D}$  中进行数值实现。本文通过对一个单元体加载模拟中密砂的室内三轴试验，各个参数的取值见表 4，其中表中只列出围压 200 kPa 时的弹性模量、初始屈服时的强度参数、围压 200 kPa 初始屈服时的剪胀角，其他情况下的力学参数取值分别见式(3)，(6)，(7)，(18)。

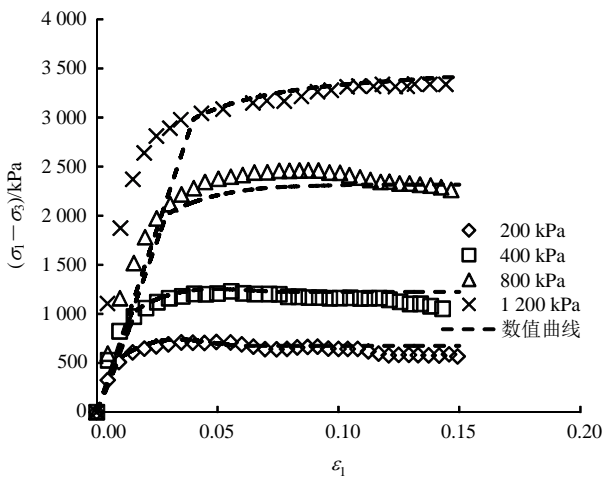
表 4 中密砂模型的参数取值

Table 4 Parameter values in mechanical model for medium dense sand

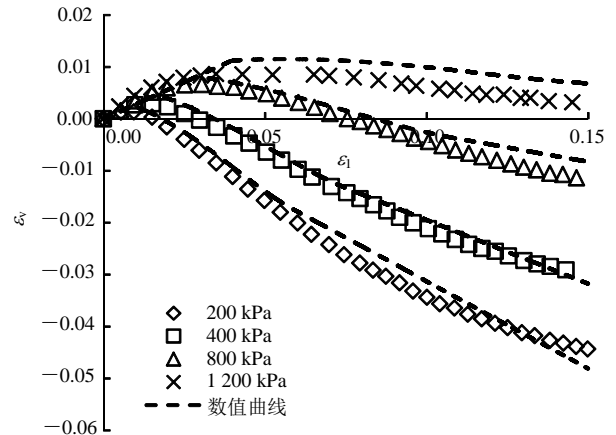
$E_0/\text{MPa}$	$\nu$	$\varphi_0(^{\circ})$	$c_0/\text{kPa}$	$\psi_0(^{\circ})$	$f(\sigma_3/p_0)$
59.287	0.359	33.302	10.049	10.9	$f(\sigma_3/p_0) = 5.1147 \times 10^{-3} \frac{\sigma_3}{p_0} + 5.5215 \times 10^{-2}$

注： $E_0$ 为围压 200 kPa 时的弹性模量； $\varphi_0$ ， $c_0$ 分别为初始屈服时的内摩擦角和黏聚力； $\psi_0$ 为围压 200 kPa 初始屈服时的剪胀角。

数值模拟结果和试验结果的对比如图 10 所示。可见，本文提出的力学模型由于考虑了弹性模量的围压效应、强度参数的塑性演化、非关联流动法则，所以数值曲线可表现出：弹性模量随围压变化；低围压下应力 - 应变曲线具有硬化段和微弱的软化段，高围压下应力 - 应变曲线只表现为硬化段，且



(a)  $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1$



(b)  $\epsilon_v - \epsilon_1$

图 10 试验数据与数值曲线

Fig.10 Test data and simulation curves

各特征点的强度与试验较为接近；体积应变 - 轴向应变曲线在低围压下剪胀较为突出，高围压下剪胀逐渐不明显。其中，1 200 kPa 围压下应力 - 应变曲线线性段的试验结果和数值结果有区别，主要原因在于图 4 对弹性模量的拟合未考虑偏差较大的 1 200 kPa 围压试验数据，这应该与试验数据的离散性有关，如果试验规律性更好的前提下可得到更为精确的结果。总体上，试验曲线和数值曲线的吻合度较高，验证了本力学模型对该中密砂的适用性和可靠性。

### 5 讨论

本文基于中密砂的三轴试验数据建立相应的力学模型，中密砂的应力 - 应变曲线揭示出其具有较明显的延性特征，在低围压条件下软化段不明显，高围压下无软化段。根据其强度参数演化规律发现：(1) 内摩擦角变化不大，从初始屈服至残余内摩擦仅增加了 5.88%，但一直呈线性增长；(2) 黏聚力在峰值前先急剧增大了 496.19%，而后减小了 6.44% 至峰值，在峰值后又继续减小了 41.41% 至残余；(3) 峰值点处塑性内变量为 0.569。正是基于对强度参数演化规律的准确刻画，保证了本文模型强度计算的可靠性。

同时，体积应变 - 轴向应变曲线可看出中密砂仍具有剪胀性，但高围压条件下剪胀现象不明显，高围压下残余点相对初始屈服仍处于剪缩，但已发生剪胀趋势。本文通过非关联流动法则计算得到剪



胀角，也反映出高围压和低围压剪胀角数值的差异，如围压 1 200 kPa 初始屈服时剪胀角为 0.39°，围压 200 kPa 初始屈服时剪胀角为 10.90°。低围压下剪胀角较小并趋于 0，导致其体积应变剪胀现象不明显。由于本文力学模型采用非关联流动法则对剪胀角的准确刻画，同时考虑了弹性模量对围压的敏感性，保证了本文模型变形计算的可靠性。

随内变量增加，中密砂的内摩擦角微弱增加，主要原因在于中密砂在偏压增加的过程中，表现为微弱的剪切滑移趋势。如图 11 所示，中密砂为松散岩土材料，以试样中部一点为研究对象，在第一主应力和第三主应力作用下，该点存在水平滑移速度  $v_x$  和竖直滑移速度  $v_z$ ，当第一主应力增加时，与第一主应力作用方向相同的  $v_z$  的数值增加量大于  $v_x$ ，剪切滑移面与第一主应力作用面的夹角  $\beta$  增大。由于中密砂颗粒滑移速率有限，所以剪切滑移趋势相对较为微弱， $\beta$  增加量较小。根据 Mohr-Coulomb 强度理论， $\beta = 45^\circ + \varphi/2$  ( $\varphi$  为内摩擦角)，所以中密砂内摩擦角随塑性内变量增大微弱增加。

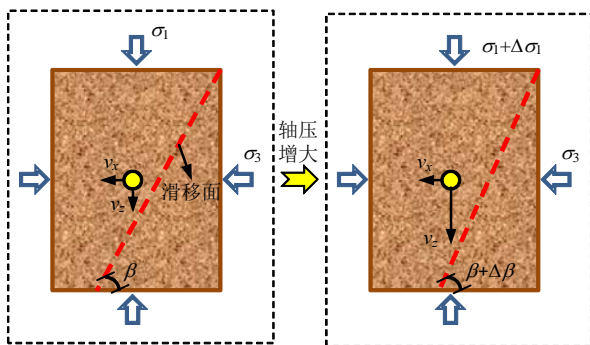


图 11 试样剪切滑移示意图  
Fig.11 Shear sliding of sand sample

中密砂的密实度介于密实砂和松散砂之间，当应力水平由低到高时依次表现出松散砂和密实砂的特征。在偏压增加初期，孔隙被压密，宏观上表现为黏聚力增加；当偏压增加至峰值后，试样继续剪切并伴随结构性改变，表现为黏聚力减小。另一方面，围压较低时，中密砂在偏压增加过程中静水压力也增大，表现为剪胀角减小；围压较大时，围压抑制剪胀现象，剪胀角接近 0°，剪切滑移极不明显。因此，中密砂的力学性质同时具有密实砂和松散砂的特征，在不同的应力状态可表现出压密、剪缩和剪胀特性。

对比之前提出的岩石力学模型<sup>[19-21]</sup>，中密砂的力学模型与岩石力学模型不同，表现为：(1) 弹性模量数值更小，中密砂的弹性模量相对岩石的弹性模量约减小了  $10^3$  倍；(2) 内摩擦角变化范围不大，变化趋势不同，本文中密砂内摩擦角塑性演化过程中仅变化了 5.88%，近似呈直线增大，岩石的内摩擦角可变化约 90%，先增大后减小，或一直增大；(3) 黏聚力数值不同，变化趋势不同，本文中密砂黏聚力相对岩石非常小，呈现突然大幅增加而后减小，岩石黏聚力随塑性程度增大先微弱增加后大幅减小或一直减小；(4) 本文中密砂的剪胀角比岩石小，导致其剪胀现象相对岩石弱，延性更为突出。

## 6 结 论

(1) 试验结果表明，中密砂的三轴力学特征对围压较为敏感，围压越大，应力 - 应变曲线的线性段斜率差异越大，强度越高，软化段逐渐消失，围压大至一定程度时曲线形态发生根本性变化，同时，体积剪胀越弱，但不同围压下体积应变 - 轴向应变曲线原点至拐点的斜率差别不大。

(2) 在本文定义的塑性内变量条件下，屈服前弹性模量随围压呈指数型函数规律增大，泊松比近似为常数，峰值点处塑性内变量大于 0.5，相对岩石更为滞后。

(3) 初始屈服、峰值和残余处最大主应力和最小主应力近似符合线性规律，表明采用 Mohr-Coulomb 强度理论适用于中密砂后继屈服强度。

(4) 随塑性内变量增加，内摩擦角近似线性增大，黏聚力先增大后减小并符合指数类函数特征，剪胀角在低围压下随塑性程度增大而减小，高围压下先增大后减小，围压越高剪胀角越小，高围压下剪胀角降低于零值附近。

(5) 本文针对中密砂的力学模型进行数值验证，数值曲线与试验数据吻合度高，可以表现中密砂应变硬化随围压的演变特征，在体积应变等变形方面可精确刻画由剪缩到剪胀的转变过程，适用于应力状态敏感性的中密砂的精确计算。

**致谢** 本文研究过程中得到河南理工大学科学研究基金项目(B2016 - 65)资助，特此感谢!

## 参考文献(References):

- [1] 姚仰平, 张丙印, 朱俊高. 土的基本特性、本构关系及数值模拟研究综述[J]. 土木工程学报, 2012, 45(3): 127 - 150.(YAO Yangping, ZHANG Bingyin, ZHU Jungao. Behaviors, constitutive models and numerical simulation of soils[J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(3): 127 - 150.(in Chinese))
- [2] 迟明杰. 砂土的剪胀性及本构模型的研究[博士学位论文][D]. 北京: 北京交通大学, 2008.(CHI Mingjie. Study on the dilatancy and constitutive model of sand[Ph. D. Thesis][D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008.(in Chinese))
- [3] 黄茂松, 姚仰平, 尹振宇, 等. 土的基本特性及本构关系与强度理论[J]. 土木工程学报, 2016, 49(7): 9 - 35.(HUANG Maosong, YAO Yangping, YIN Zhenyu, et al. An overview on elementary mechanical behaviors, constitutive modeling and failure criterion of soils[J]. China Civil Engineering Journal, 2016, 49(7): 9 - 35.(in Chinese))
- [4] 刘希亮. 土力学原理[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2015: 374 - 375.(LIU Xiliang. Principle of soil mechanics[M]. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 2015: 374 - 375.(in Chinese))
- [5] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. Journal of the Japanese Geotechnical Society, 1996, 36(2): 81 - 91.
- [6] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000: 66 - 74.(SHEN Zhujiang. Theoretical soil mechanics[M]. Beijing: China Water and Power Press, 2000: 66 - 74.(in Chinese))
- [7] 沈珠江. 现代土力学的基本问题[J]. 力学与实践, 1998, 20(6): 1 - 6.(SHEN Zhujiang. Fundamental problems in the modern soil mechanics[J]. Mechanics in Engineering, 1998, 20(6): 1 - 6.(in Chinese))
- [8] 沈珠江. 土体结构性的数学模型——21 世纪土力学的核心问题[J]. 岩土工程学报, 1996, 18(1): 95 - 97.(SHEN Zhujiang. A mathematical model of soil structure—The core problem of soil mechanics in the 21st century[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 18(1): 95 - 97.(in Chinese))
- [9] ROSCOE K H. On the generalised stress-strain behaviour of wet clay[C]// Heyman J, Leckie F A. Engineering Plasticity. Cambridge: Cambridge University Press, 1968: 535 - 609.
- [10] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: Three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, 59(5): 451 - 469.
- [11] ASAOKA A, NAKANO M, NODA T. Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior[J]. Journal of the Japanese Geotechnical Society, 2000, 40(2): 99 - 110.
- [12] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, 50(4): 449 - 460.
- [13] YIN J H, GRAHAM J. Elastic viscoplastic modelling of the time-dependent stress-strain behaviour of soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(4): 736 - 745.
- [14] 黄文熙, 濮家骊, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数[J]. 岩土工程学报, 1981, 3(3): 19 - 26.(HUANG Wenxi, PU Jialiu, CHEN Yujiong. Hardening rule and yield function for soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1981, 3(3): 19 - 26.(in Chinese))
- [15] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, 2(2): 11 - 19.(SHEN Zhujiang. The rational form of stress-strain relationship of soils based on elasto-plasticity theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1980, 2(2): 11 - 19.(in Chinese))
- [16] 郑颖人, 陈长安. 理想塑性岩石的屈服条件与本构关系[J]. 岩土工程学报, 1984, 6(5): 13 - 22.(ZHENG Yingren, CHEN Chang'an. Yield criterion and constitutive relation for perfect plastic rock-soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1984, 6(5): 13 - 22.(in Chinese))
- [17] 殷宗泽, 邓肯 J M. 剪胀土与非剪胀土的应力应变关系[J]. 岩土工程学报, 1984, 6(4): 24 - 40.(YIN Zongze, DUNCAN J M. A stress-strain relationship for dilative and non-dilative soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1984, 6(4): 24 - 40.(in Chinese))
- [18] 李 震, 周 辉, 杨凡杰, 等. 弹塑性耦合应变定义与本构方程[J]. 岩土力学, 2018, 39(3): 917 - 925.(LI Zhen, ZHOU Hui, YANG Fanjie, et al. Elastoplastic coupling strain definition and constitutive function[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(3): 917 - 925.(in Chinese))
- [19] 周 辉, 张 凯, 冯夏庭, 等. 脆性大理岩弹塑性耦合力学模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(12): 2 398 - 2 409.(ZHOU Hui, ZHANG Kai, FENG Xiating, et al. Elastoplastic coupling mechanical model for brittle marble[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(12): 2 398 - 2 409.(in Chinese))
- [20] 周 辉, 杨凡杰, 张传庆, 等. 考虑围压效应的大理岩弹塑性耦合力学模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(12): 2 389 - 2 399.(ZHOU Hui, YANG Fanjie, ZHANG Chuanqing, et al. An elastoplastic coupling mechanical model for marble considering confining pressure effect[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(12): 2 389 - 2 399.(in Chinese))
- [21] 李 震, 周 辉, 宋雨泽, 等. 考虑硬化软化和剪胀特性的绿泥石片岩力学模型[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 404 - 410.(LI Zhen,

- ZHOU Hui, SONG Yuze, et al. Mechanical model of chlorite schist considering hardening-softening and dilatancy characteristics[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(2): 404 - 410.(in Chinese)
- [22] 赵磊. 中密实砂土的三剪统一剪胀性本构模型及 ABAQUS 的二次开发[硕士学位论文][D]. 南昌: 南昌大学, 2016.(ZHAO Lei. Research on the triple-shear unified dilatancy constitutive model for sand and the secondary development for ABAQUS[M. S. Thesis][D]. Nanchang: Nanchang University, 2016.(in Chinese))
- [23] 姚仰平, 侯伟, 罗汀. 土的统一硬化模型[J]. *岩石力学与工程学报*, 2009, 28(10): 2 135 - 2 151.(YAO Yangping, HOU Wei, LUO Ting. Unified hardening model for soils[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, 28(10): 2 135 - 2 151.(in Chinese))
- [24] 周辉, 李震, 杨艳霜, 等. 岩石统一能量屈服准则[J]. *岩石力学与工程学报*, 2013, 32(11): 2 170 - 2 184.(ZHOU Hui, LI Zhen, YANG Yanshuang, et al. Unified energy yield criterion of rock[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2013, 32(11): 2 170 - 2 184.(in Chinese))
- [25] 俞茂宏. 线性和非线性的统一强度理论[J]. *岩石力学与工程学报*, 2007, 26(4): 662 - 669.(YU Maohong. Linear and nonlinear unified strength theory[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(4): 662 - 669.(in Chinese))
- [26] 朱俊高, 史江伟, 罗学浩, 等. 密度对砂土应力-应变强度特性影响试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2016, 38(2): 336 - 341.(ZHU Jungao, SHI Jiangwei, LUO Xuehao, et al. Experimental study on stress-strain-strength behavior of sand with different densities[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(2): 336 - 341.(in Chinese))
- [27] 李震, 刘尚各, 于建新, 等. 考虑弹塑性损伤耦合的绿泥石片岩力学模型研究[J]. *地下空间与工程学报*, 2017, 13(1): 101 - 107.(LI Zhen, LIU Shangge, YU Jianxin, et al. Study on mechanical model of chlorite schist considering elastoplastic damage coupling[J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2017, 13(1): 101 - 107.(in Chinese))
- [28] HANSEN B. Line ruptures regarded as narrow rupture zones—Basic equations based on kinematic considerations[C]// *Conference on Earth Pressure Problems*. Brussels: [s.n.], 1958: 39 - 48.
- [29] 郑颖人, 孔亮. 岩土塑性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010: 117 - 121.(ZHENG Yingren, KONG Liang. *Geotechnical plastic theory*[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2010: 117 - 121.(in Chinese))
- [30] 孔位学, 芮勇勤, 董宝弟. 岩土材料在非关联流动法则下剪胀角选取探讨[J]. *岩土力学*, 2009, 30(11): 3 278 - 3 282.(KONG Weixue, RUI Yongqin, DONG Baodi. Determination of dilatancy angle for geomaterials under non-associated flow rule[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(11): 3 278 - 3 282.(in Chinese))
- [31] 康亚明, 刘长武, 贾延, 等. 剪胀性对边坡潜在滑动面的影响[J]. *中国矿业*, 2008, 17(4): 89 - 91.(KANG Yaming, LIU Changwu, JIA Yan, et al. The influences of the dilatancy character on the potential sliding surface of soil slopes[J]. *China Mining Magazine*, 2008, 17(4): 89 - 91.(in Chinese))
- [32] 张训维. 剪胀性土质边坡体系稳定性的分析与评价[学位论文][D]. 北京: 北京交通大学, 2015.(ZHANG Xunwei. Stability analysis and evolution of soil slope system with shear dilatation effect considered[M. S. Thesis][D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2015.(in Chinese))