# 中 山 大 学

## 2018 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：677

科目名称：数学分析与高等代数

考试时间：2017 年 12 月 24 日　上午

**考 生 须 知**

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

### 一、数学分析 （共 150 分）

1. (15 分) 设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，取 $a_1 = \sin x$ ，$a_n = \sin a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (15 分)已知 $f(x)$ 在 $x > 0$ 处连续，$f(1) = 3$，且由方程 $\int_1^{xy} f(t)\,dt = x\int_1^{y} f(t)\,dt + y\int_1^{x} f(t)\,dt$ 确定 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $f(x)$.

3. (15 分)交换积分 $I = \int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\dfrac{\pi x}{2y}\,dy + \int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\dfrac{\pi x}{2y}\,dy$ 的积分次序并计算其积分值.

4. (15 分)求 $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy$，其中 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\, x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$.

5. (15 分)计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 $A$.

6. (15 分)求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

7. (15 分)在过点 $O\,(0, 0)$ 和 $A\,(\pi, 0)$ 的曲线族 $y = a\sin x\ (a > 0)$ 中，求曲线 $L$，使沿该曲线从 $O$ 到 $A$ 的积分 $\int_L (1 + y^3)dx + (2x + y)dy$ 的值达最小.

8. (15 分)将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 在 $x = 1$ 处展开为幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$ 的和.

9. (15 分)假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，且 $\{a_n\}$ 是单调不增非负数列，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2 + a_4 + \cdots a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots a_{2n-1}} = 1$$

10. (15 分 ) 设 函 数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上 存 在 二 阶 导 数 ， 并 且 $g''(x) \ne 0$ ，$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$，试证：

（1）在开区间 $(a, b)$ 内 $g(x) \ne 0$；

（2）在开区间 $(a, b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ .

## 二、高等代数 （共150分）

1. (15 分)求行列式 $A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 的值.

2. (15 分) 设 $\alpha=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$，$\beta=(-1,\ 1,\ 1,-1)$，而 $A=\alpha^T\beta$，利用矩阵乘法的结合律求 $A^n$.

3. (15 分)设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $A^*XA=2A^{-1}X+E$，其中 $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，$E$ 为单位矩阵，求矩阵 $X$.

4. (15 分) 设向量组 $A$：$a_1$，$a_2$，$a_3$ 线性无关，向量 $b_1$ 能由向量组 $A$ 线性表示，向量 $b_2$ 不能由向量组 $A$ 线性表示， $k$ 为任意常数. 问：

（1）向量组 $a_1$，$a_2$，$a_3$，$kb_1+b_2$ 是否线性相关，为什么？

（2）向量组 $a_1$，$a_2$，$a_3$，$b_1+kb_2$ 是否线性相关，为什么？

5. (15 分) 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵，且 $(A+E)^2=0$，证明 $A$ 可逆.

6. (15 分) 设向量 $\omega$ 在基 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 下的坐标为 $(4,2,-2)$，求 $\omega$ 在 $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ 下的坐标.

7. (20 分) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:\quad ax+2by+3c=0,$$
$$l_2:\quad bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3:\quad cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

（提示 1：三条直线交于一点相当于对应线性方程组有唯一解；提示 2：可利用第 1 题计算结果.）

8. (20 分) 若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\Lambda$，试确定常数 $a$ 的值；并求可逆矩阵 $P$ 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

9. (20 分) ）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

（1）求二次型 $f$ 的矩阵的所有特征值；

（2）若二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 $a$ 的值.