江西理工大学

2018年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码及名称：901 高等代数（A卷）

要求：答案一律写在考点发放的答题纸上，写在试题上无效。

一、填空题（每空4分，共20分）

1. 设 $f(x)=3x^4+x^3+2x^2, g(x)=x+1$. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式为____①____.

2. $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$ 的有理根为___②___.

3. 设线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$，则 σ 的特征值中大于0的特征值为___③___.

4. 设 $A=\begin{vmatrix}103&100&204&100\\199&200&395&200\\301&300&600&300\\402&400&799&402\end{vmatrix}$，则 $A=$__④__.（填某实数）

5. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 伴随矩阵 $A^*=$______⑤______.

二、计算与证明题（共8小题，共130分）

说明：答题时可使用 A^T 或 A' 表示矩阵 A 的转置，可使用 $Rank(A)$ 或 $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩. 需写出主要的解题过程.

6. 已知 $X=AX-B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\\5&2\end{pmatrix}$，求矩阵 X。（10分）

7. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}$，$c=\begin{bmatrix}2\\2\\b\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，已知方程组 $Ax=c$ 有无穷多解，求 a

的值并求方程组的通解.（15分）

8. 设 $R[x]_n$ 表示实数 R 上的次数不大于 n 的多项式全体，则 $R[x]_n$ 是一线性空间，（1）证明：$1,x-1,x^2+1$ 是 $R[x]_2$ 的一组基，（2）求 $2x^2+3x+4$ 在基 $1,x-1,x^2+1$ 下的坐标.（15分）

9. 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准型 $ay_1^2+by_2^2+cy_3^2$，其中 a,b,c 从大到小排列，并给出所用的正交线性变换.（20分）

10. （1）证明：如果 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ \left(a_{ij}=a_{ji}\right)$ 是正定二次型，那么

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$ 是负定二次型；

（2）. 设 A 是正定矩阵，那么 $|A|\le a_{nn}P_{n-1}$，其中 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式.（20分）

11. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明 $R(A^TA)=R(A)$，其中 A^T 为矩阵 A 的转置.（15分）

12. 设 A,B 均为 n 阶方阵，若 $AB=0$，证明：$R(A)+R(B)\le n$.（15分）

13. 证明：n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.（20分）