

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.0619

# 轴对称主动土压力问题的滑移线解

闫澍旺<sup>1,2</sup>, 李 嘉<sup>1,2</sup>, 闫 玥<sup>1,2</sup>, 郎瑞卿<sup>1,2</sup>, 纪玉诚<sup>1,2</sup>

(1. 天津大学 水利工程仿真与安全国家重点实验室, 天津 300072; 2. 天津大学 建筑工程学院, 天津 300072)

**摘 要:** 地基中竖向孔支护结构的设计需要以其所受主动土压力为依据, 为此常需计算竖向孔开挖后孔壁主动土压力。含竖向圆孔地基是轴对称问题, 基于平面应变假设的经典朗肯土压力理论或库仑土压力理论显然不适用, 而现有求解轴对称条件下主动土压力方法多采用完全塑性假定或其他假定环向应力与大主应力之比(环向压应力系数 $\lambda$ )为常数的方法, 理论上不够严谨且误差较大。建立轴对称问题滑移线方程, 采用使主动土压力为最大的目标的方法, 采用迭代法求解环向压应力系数 $\lambda$ , 分析了 $\lambda$ 受土体参数和轴对称竖向孔几何参数影响规律, 进而求解轴对称竖向孔孔壁主动土压力的精确值, 理论上更为严谨, 结果更为合理, 并对比平面应变条件下的土压力结果, 总结了轴对称条件下主动土压力的规律。

**关 键 词:** 轴对称竖向孔; 主动土压力; 滑移线法; 环向应力系数

中图分类号: TU432

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2018)11-4133-09

## A solution for axisymmetric active earth pressure by slip line method

YAN Shu-wang<sup>1,2</sup>, LI Jia<sup>1,2</sup>, YAN Yue<sup>1,2</sup>, LANG Rui-qing<sup>1,2</sup>, JI Yu-cheng<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Hydraulic Engineering Simulation and Safety, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** Design of vertical hole supporting structure in foundation should be based on its active earth pressure. So it is often necessary to calculate the active earth pressure on the hole wall after excavation of vertical holes. The foundation containing vertical hole is a typical axisymmetric problem, the traditional Rankine or Coulomb solution which is based on plane strain assumption is inapplicable, the existing methods for axisymmetric active earth pressure often presume the ratio of earth pressure and the major principal stress (tangential stress coefficient  $\lambda$ ) is constant, such as Harr-Von Karman hypothesis and other similar methods, this assumption is not rigorous in theory and the calculated results have large enough error. In this paper, the slip line field equations for axisymmetric problem are established, the method of maximizing the active earth pressure and the iterative method are used to solve the circumferential compressive stress coefficient the  $\lambda$ , the effects of soil parameters and vertical hole geometry parameters on  $\lambda$  are analyzed, then the accurate value of active earth pressure can be determined. This method is more rigorous in theory and the result is more reasonable compared to that under plane strain assumption condition.

**Keywords:** axisymmetric vertical hole; active earth pressure; slip line; tangential stress coefficient

## 1 引 言

地基中竖向孔的设计和施工中往往需要一定的支护措施, 如灌注桩的钻孔施工过程中多采取泥浆护壁, 以控制变形为目的的卸荷孔中多采取钢筋笼支护。支护结构的设计需要以其受到的土压力为依据, 支护结构后土体有下滑趋势, 因此支护结构受到主动土压力作用。

应用广泛的朗肯土压力理论和库仑土压力理论是基于平面应变假设推导而来, 地基中竖向圆孔是轴对称问题, 由于三维效应对主动土压力有较大的影响, 而基于平面应变假设推导的土压力理论不能考虑三维效应的影响, 应用朗肯土压力理论或库仑土压力理论计算显然不准确, 因此研究者对轴对称条件下的主动土压力求解进行了探索。

Houlsby 等<sup>[1]</sup>仍旧采用平面应变假设, 求解了光

收稿日期: 2017-04-06

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目 (No. 51709198); 天津市自然科学基金 (No. 16JCQNJC07900, No. 13JCZDJC35300)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51709198), the Natural Science Foundation of Tianjin (16JCQNJC07900, 13JCZDJC35300).

第一作者简介: 闫澍旺, 男, 1950 年生, 硕士, 教授, 博士生导师, 主要从事软土的工程性质方面的研究工作。E-mail: yanshuwang@tju.edu.cn

通讯作者: 李嘉, 男, 1986 年生, 博士研究生, 主要从事软土的工程性质方面的研究。E-mail: li\_jia@tju.edu.cn

滑轴对称挡墙后填土为黏性土的滑移线塑性位移方程。Steinfeld<sup>[2]</sup>假设滑动体为圆锥体,采用轴对称库仑屈服法则进行求解,Lorenz<sup>[3]</sup>以Steinfeld解答为基础,忽略直径方向的剪切力建立简化的平衡方程并进行求解。Berezantzev<sup>[4]</sup>建立轴对称问题滑移线方程,并假设滑移线为直线进行简化求解,Mróz<sup>[5]</sup>提出了求解轴对称主动土压力的图解法。

轴对称问题的三维效应通常通过环向应力的影响考虑,上述学者在求解过程中均采用了Haar-Von Karman完全塑性假定,即假定环向应力等于大主应力。

Prater<sup>[6]</sup>总结前人研究成果,认为采用完全塑性假定计算是偏于危险的,取环向应力与大主应力之比(环向压应力系数 $\lambda$ )为静止土压力系数 $K_0$ 和主动土压力系数 $K_a$ ,采用极限平衡法进行了求解。

Cheng等<sup>[7-8]</sup>建立了简化的滑移线分析方法并对Haar-Von Karman完全塑性假定进行修正,分析表明压应力系数 $\lambda$ 取值对竖井衬砌上的主动土压力有较大的影响,并建议在工程应用中采用环向压应力系数为静止土压力系数 $K_0$ 求解主动土压力。

国内学者也进行了相关研究,如马英明<sup>[9]</sup>、崔广心<sup>[10]</sup>认为采用Haar-Von Karman完全塑性假定偏于危险,并认为 $\lambda$ 应不大于1。尹志强等<sup>[11]</sup>进一步研究了考虑土拱效应的黏性填土排桩桩后总土压力的计算方法。

本文建立轴对称条件下的滑移线方程,参考库仑土压力求解方法,提出根据使主动土压力为最大的目标确定环向压应力系数 $\lambda$ 的方法,并研究了环向压应力系数 $\lambda$ 随深度受土体参数影响的规律,进而依此计算轴对称条件下的主动土压力,逻辑更为严密,结果更为合理。计算结果表明,轴对称条件下主动土压力与平面应变条件下有明显差异。

## 2 轴对称问题滑移线方程的建立

对于轴对称问题,采用柱坐标具有很大的优越性,对于含轴对称竖向孔的地基,除重力外无其他作用力时,在图1所示柱坐标系中平衡方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\sigma_z$ 为竖向应力; $\sigma_r$ 为径向应力; $\sigma_\theta$ 为环向应力; $r$ 、 $z$ 分别为所研究点在柱坐标系中的坐标; $\gamma$ 为土体重度; $\tau_{rz}$ 为作用在 $rz$ 平面上的剪应力。

力学中一般假定单元体的任一截面应力达到极限平衡时该处的土体即达到极限平衡。本问题中假定 $R-z$ 平面(即子午面)上的应力达到极限平衡。对于轴对称问题,各子午面上的应力状态均相同,单元土体上作用着径向应力 $\sigma_r$ 和竖向应力 $\sigma_z$ ,若含竖向孔地基发生破坏,子午面单元土体处于极限平衡状态,采用摩尔-库仑屈服准则,土体受力摩尔圆如图2所示,得出主应力间有如下关系:

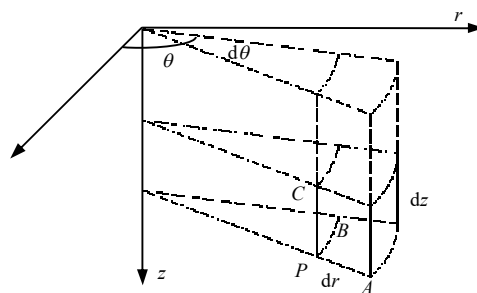


图1 柱坐标系中单元体  
Fig.1 Unit in a cylindrical coordinate system

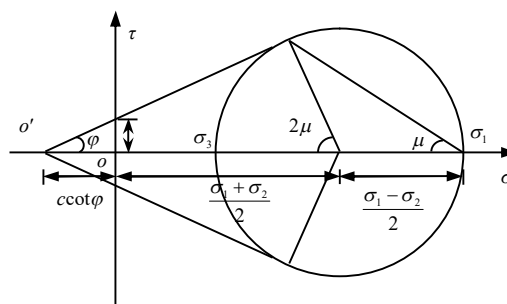


图2 破坏面土体受力摩尔圆  
Fig.2 Mohr circle of failure surface

$$\frac{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_z^2}{(\sigma_r + \sigma_z + 2c \cot \varphi)^2} = \sin^2 \varphi \quad (2)$$

式中: $c$ 为黏聚力; $\varphi$ 为内摩擦角。

该条件也可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\psi) - c \cot \varphi \\ \sigma_z &= \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\psi) - c \cot \varphi \\ \tau_{rz} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\psi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $\psi$ 为大主应力方向与 $or$ 轴的夹角; $\sigma$ 为平均应力。

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + c \cot \varphi = (\sigma_r + \sigma_z)/2 + c \cot \varphi \quad (4)$$

通常将环向应力表示为

$$\sigma_\theta = \lambda \sigma_1 = \lambda \sigma(1 + \sin \varphi) - \lambda c \cot \varphi \quad (5)$$

式中： $\lambda$  为环向应力  $\sigma_\theta$  和  $\sigma_1$  的比值。

滑移线是各个单元体破裂面的连线，通过点  $(r, z)$  的单元体的破裂面有两个，与大主应力夹角分别为  $\pm\mu$ ，因此滑移线也有两族，如图 3 所示，滑移线方程可表示为

$$\frac{dz}{dr} = \tan(\psi + m\mu) \quad (6)$$

式中： $m$  为反映滑移线族的系数，当  $m$  取  $-1$  时为  $\alpha$  族滑移线，当  $m$  取  $1$  时为  $\beta$  族滑移线。

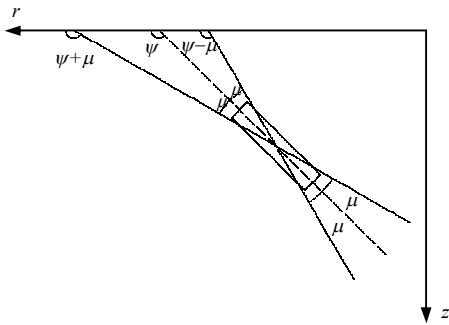


图 3 滑移线基本坐标系及方向

Fig.3 Basic coordinate system and direction of slip line

当采用摩尔-库仑屈服与破坏准则时，有

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (7)$$

将式 (3) 和式 (5) 代入平衡方程式 (1)，整理可得

$$\begin{aligned} & d\sigma + m2\sigma \tan\varphi d\psi + \\ & \frac{(1-\lambda-\lambda\sin\varphi)\sigma - c(1-\lambda)\cot\varphi}{r} dr + \\ & m \frac{\lambda(1+\sin\varphi)\sigma + c(1-\lambda)\cot\varphi}{r} \tan\varphi dz = \\ & \gamma(m \tan\varphi dr + dz) \end{aligned} \quad (8)$$

### 3 轴对称问题滑移线方程的求解

对式 (8) 中物理量做如下运算使其无量纲化：

$$\Omega = \frac{\sigma}{r_0\gamma}, R = \frac{r}{r_0}, Z = \frac{z}{r_0}, C = \frac{c}{r_0\gamma} \quad (9)$$

式中： $\Omega$ 、 $R$ 、 $Z$ 、 $C$  分别为无量纲化的平均应力  $\sigma$ 、坐标  $r$ 、坐标  $Z$  和黏聚力  $c$ ； $r_0$  为轴对称竖向孔半径。

将式 (9) 代入式 (6) 和式 (8)，可得

$$\frac{dZ}{dR} = \tan(\psi + m\mu) \quad (10)$$

将式 (9) 代入式 (8)，并将等式两端同时除以  $dR$ ，得

$$\begin{aligned} & \frac{d\Omega}{dR} + \frac{m2\Omega \tan\varphi d\psi}{dR} + \\ & \frac{(1-\lambda-\lambda\sin\varphi)\Omega - C(1-\lambda)\cot\varphi}{R} + \\ & m \frac{\lambda(1+\sin\varphi)\Omega + C(1-\lambda)\cot\varphi}{R} \tan\varphi \frac{dZ}{dR} = \\ & m \tan\varphi + \frac{dZ}{dR} \end{aligned} \quad (11)$$

上述滑移线方程的求解非常困难，Berezantzev<sup>[4]</sup> 提出了假设滑移线为直线的滑移线法简化方法，这里采用相同假定，假定  $R-Z$  平面内滑移线为直线， $\beta$  线为

$$m = 1, \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{dZ}{dR} = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (11) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d\Omega}{dR} + [(1-\lambda-\lambda\sin\varphi) - \lambda(1+\sin\varphi) \cdot \\ & \tan\varphi \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)] \frac{\Omega}{R} - [C(1-\lambda)\cot\varphi + \\ & C(1-\lambda)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)] \frac{1}{R} = \tan\varphi - \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\left. \begin{aligned} a &= (1-\lambda-\lambda\sin\varphi) - \lambda(1+\sin\varphi) \tan\varphi \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ b &= -C(1-\lambda)\cot\varphi - C(1-\lambda)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ c_1 &= \tan\varphi - \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式 (13) 可整理为如下形式：

$$\frac{d\Omega}{dR} + a \frac{\Omega}{R} + b \frac{1}{R} = c_1 \quad (15)$$

该方程的解为

$$\Omega = \frac{c_0}{R^a} + \frac{c_1 R}{a+1} - \frac{b}{a} \quad (16)$$

式中： $c_0$  为待定常数。

将式 (16) 代入式 (3) 和式 (5)，得归一化的径向应力和竖向应力的表达式：

$$\left. \begin{aligned} \Omega_r &= \left(\frac{c_0}{R^a} + \frac{c_1 R}{a+1} - \frac{b}{a}\right)(1-\sin\varphi) - C \cot\varphi \\ \Omega_z &= \left(\frac{c_0}{R^a} + \frac{c_1 R}{a+1} - \frac{b}{a}\right)(1+\sin\varphi) - C \cot\varphi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

令  $R_b$  为过点  $(1, Z)$  的  $\beta$  线与  $R$  轴的交点的

坐标值:

$$R_b = 1 + Z \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (18)$$

由地表处竖向应力边界条件:

$$\Omega_z|_{R=R_b} = 0 \quad (19)$$

即

$$\left(\frac{c_0}{R_b^a} + \frac{c_1 R_b}{a+1} - \frac{b}{a}\right)(1 + \sin\varphi) - C \cot\varphi = 0 \quad (20)$$

可确定待定系数为

$$c_0 = \left(\frac{C \cot\varphi}{(1 + \sin\varphi)} - \frac{c_1 R_b}{a+1} + \frac{b}{a}\right) R_b^a \quad (21)$$

孔壁处  $R=1$ , 代入式 (17) 即得孔壁处无量纲化的土压力  $P_R$ :

$$P_R = \left(c_0 + \frac{c_1}{a+1} - \frac{b}{a}\right)(1 - \sin\varphi) - C \cot\varphi \quad (22)$$

再将式 (9) 代入式 (22), 即可得孔壁处主动土压力为

$$p_a = \gamma z \left(c_0 + \frac{c_1}{a+1} - \frac{b}{a}\right)(1 - \sin\varphi) - c \cot\varphi \quad (23)$$

由于式 (23) 中孔壁处主动土压力也是  $\lambda$  的函数, 因此当  $\varphi$ 、 $c$ 、 $z$ 、 $\gamma$  等确定后,  $p_a$  就只是  $\lambda$  的单值函数, 即  $p_a = f(\lambda)$ , 因此  $\lambda$  值的求解至关重要。

虽然研究者对压应力系数  $\lambda$  取值存在一定的共识, 但  $\lambda$  值的确定存在很大的不确定性。库仑土压力理论在推导过程中采用了使主动土压力为最大的目标的方法, 国内外有关教材<sup>[12-14]</sup>都对此进行过介绍, 本文参考库仑土压力求解方法, 采用使主动土压力为极大值的方法来确定  $\lambda$  值, 即令  $dp_a/d\lambda = 0$ , 求出使主动土压力为最大的  $\lambda$  值, 再代回到式 (23), 即可得出孔壁处主动土压力的理论解。

令  $\frac{dp_a}{d\lambda} = 0$ , 得方程 (即  $p'_a$  表达式):

$$p'_a = \frac{\lambda r_0 \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left\{ \left[ \frac{z}{r_0} \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right]^{2-\lambda \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} - 1 \right\}}{\left( \lambda \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 2 \right)^2} - \frac{r_0 \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left\{ \left[ \frac{z}{r_0} \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right]^{2-\lambda \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} - 1 \right\}}{\lambda \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 2} - \frac{c \tan^2\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\varphi} \quad (24)$$

$$\lg \left[ \frac{z}{r_0} \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right] \cdot \left[ \frac{z}{r_0} \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right]^{1-\lambda \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{\lambda r_0 \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \lg \left[ \frac{z}{r_0} \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right] \cdot \left[ \frac{z}{r_0} \tan\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 1 \right]^{2-\lambda \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}}{\lambda \tan^2\left(\frac{\pi + \varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 2} = 0$$

由式 (24) 可知,  $\lambda$  值和土体的内摩擦角  $\varphi$ 、黏聚力  $c$ 、重度  $\gamma$ 、轴对称竖向孔半径  $r_0$ 、研究点所处的深度  $z$  有关, 当这些参数都确定后可求解  $\lambda$ , 将求得的  $\lambda$  值再代回到式 (23) 中, 即可得到轴对称竖向孔壁主动土压力。

## 4 $\lambda$ 的迭代法求解及影响规律

### 4.1 $\lambda$ 值的迭代法求解

如前所述, 依据式 (24) 求解  $\lambda$ , 再将求得的  $\lambda$  值代回到式 (23) 即可得到轴对称竖向孔壁主动

土压力。但式 (24) 中未知数  $\lambda$  分别位于乘数项和指数项, 且乘数、指数形式都极其复杂, 求解存在很大困难, 可用迭代法近似求解  $\lambda$ , 求解过程如图 4 所示。

例如, 假设地基土体内摩擦角  $\varphi = 28^\circ$ 、黏聚力为  $c = 10$  kPa、重度  $\gamma = 20$  kN/m<sup>3</sup>、轴对称竖向孔半径  $r_0 = 0.5$  m、研究点深度  $z = 10$  m。不同假设条件下  $\lambda$  值不同: 采用 Harr-Von Karman 假设 (完全塑性假设)  $\lambda$  值为 1; 按照 Parter<sup>[6]</sup> 的假设,  $\lambda$  值接近  $K_a = 0.361$  或  $K_0 = 0.531$ ; Cheng 等<sup>[7-8]</sup> 认为  $\lambda$  值应

该为 1 和  $K_a$  之间的某个数值；马英明<sup>[9]</sup>和崔广心<sup>[10]</sup>认为  $\lambda$  值应不大于 1。本文考虑上述结论并取较大计算范围，将初始  $\lambda_0$  值设为 0.361，第 1 轮计算终止标准  $p_f$  设为 0.500，然后逐渐缩小  $p_f$  值，最终  $p_f$  值取为 0.025，即计算得到  $-0.025 \leq p'_a \leq 0.025$ ，即可认为该  $\lambda$  值是方程 (24) 的解。

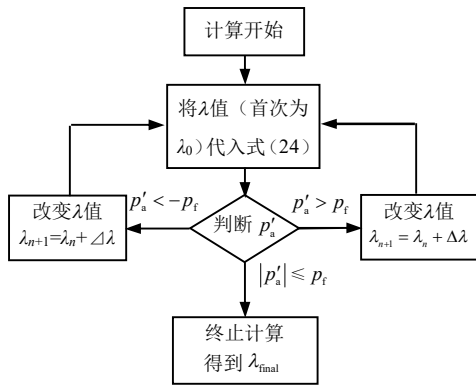


图 4 迭代法求解  $\lambda$  流程图  
Fig.4 Flow chart of solving  $\lambda$  by iterative method

迭代过程得到的  $\lambda - p'_a$  关系如图 5 所示，最终得到  $\lambda$  值为 0.626。由函数表达式 (24) 得  $p'_a$  在  $\lambda \tan^2(\pi/4 + \varphi/2) - 2 = 0$  处，即  $\lambda \approx 0.722$  处不连续，是图 5 所示曲线不连续的原因。

由图 5 可知， $\lambda \rightarrow \infty$  时  $p'_a \rightarrow 0$ ，但环向应力与大主应力之比为无穷大并非符合实际的解答，因此  $\infty$  并非符合实际的解答，间断点前使  $p'_a = 0$  的  $\lambda$  值为合理解。

通过上述方法可求得不同控制参数时  $\lambda$  满足设定精度的解，进而可求得轴对称主动土压力满足计算收敛要求的较精确解。

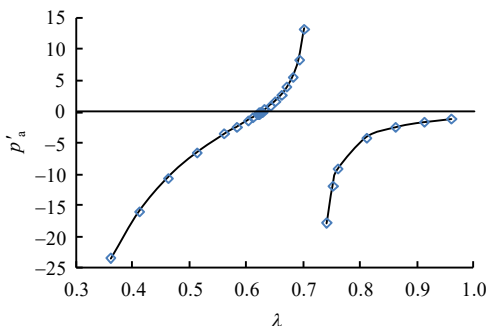


图 5  $\lambda - p'_a$  关系曲线  
Fig.5 Relationships between  $\lambda$  and  $p'_a$

## 4.2 $\lambda$ 值影响规律分析

### 4.2.1 $\lambda - z$ 关系

当  $\varphi$ 、 $c$ 、 $\gamma$ 、 $r_0$  确定时，改变研究点所处的深

度  $z$ ，可得到  $\lambda$  值随研究点深度  $z$  的变化规律。取地基土体  $\varphi = 28^\circ$ 、 $c = 10 \text{ kPa}$ 、 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ 、 $r_0 = 0.5 \text{ m}$ 、 $z$  范围为  $10 \sim 150 \text{ m}$ ，绘制  $\lambda - z$  关系曲线如图 6 所示。

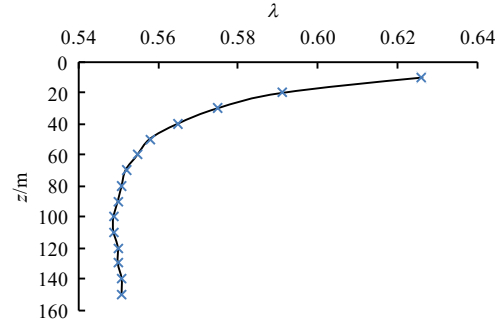


图 6  $\lambda - z$  关系曲线  
Fig.6 Relationship between  $\lambda$  and  $z$

由图 6 所示  $\lambda - z$  关系曲线， $\lambda$  值随深度增加而减小，且到一定深度后基本趋于定值，在上述条件下稳定值约为 0.55，在  $K_0$  和 1 之间。

### 4.2.2 $\lambda - c$ 关系

当  $\varphi$ 、 $\gamma$ 、 $r_0$ 、 $z$  确定时，改变  $c$ ，可得到  $\lambda$  值随  $c$  的变化规律。

取地基土体  $\varphi = 28^\circ$ ， $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ， $r_0 = 0.5 \text{ m}$ ， $c$  分别为 10、15、20 kPa， $z$  范围为  $10 \sim 150 \text{ m}$  时的  $\lambda - z$  关系绘制到同一坐标系中，如图 7(a)所示。由图可知，在  $z = 150 \text{ m}$  处  $\lambda$  值已基本达到稳定，因此，取  $z = 150 \text{ m}$  处，另外取  $z = 20 \text{ m}$  和  $z = 70 \text{ m}$  处，地基土体其他参数仍取上述值，得到  $\lambda - c$  关系曲线如图 7(b)所示。

由图 7(b)所示  $\lambda - c$  关系曲线， $\lambda$  值随黏聚力  $c$  增加而增大，深度较浅处呈非线性关系，深度较大处基本呈线性关系。

### 4.2.3 $\lambda - \varphi$ 关系

当地基土体的  $c$ 、 $\gamma$ 、 $r_0$ 、 $z$  确定时，改变  $\varphi$ ，可得  $\lambda$  值随  $\varphi$  的变化规律。

取地基土体  $c = 15 \text{ kPa}$ ， $\varphi$  分别为  $25^\circ$ 、 $28^\circ$ 、 $31^\circ$ ， $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ 、 $r_0 = 0.5 \text{ m}$ 、 $z$  范围为  $10 \sim 150 \text{ m}$ ，绘制  $\lambda - z$  关系曲线，如图 8(a)所示。由图可知在  $z = 150 \text{ m}$  深度处  $\lambda$  值已基本达到稳定，因此，取  $z = 150 \text{ m}$  处，另外取  $z = 20 \text{ m}$  和  $z = 70 \text{ m}$  处，地基土体其他参数仍取上述值，得到  $\lambda - \varphi$  关系曲线如图 8(b)所示。

由图 8(b)所示  $\lambda - \varphi$  关系曲线可知， $\lambda$  值随  $\varphi$  增加而减小，且基本呈线性关系。

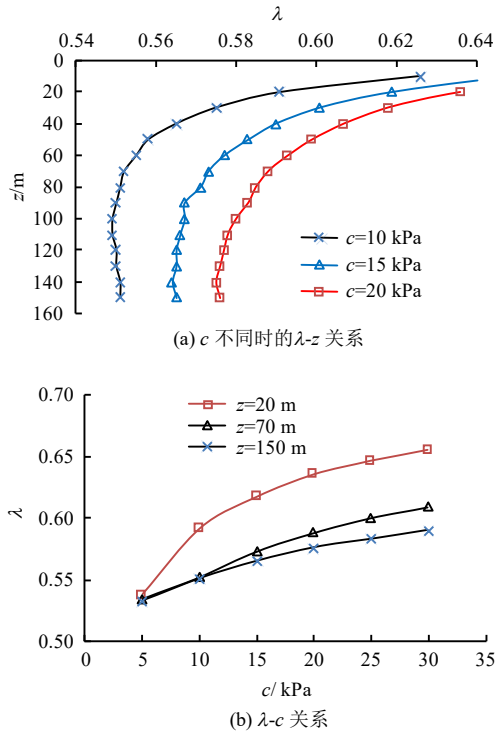


图7  $\lambda$ - $c$  关系曲线

Fig.7 Relationships between  $\lambda$  and  $c$

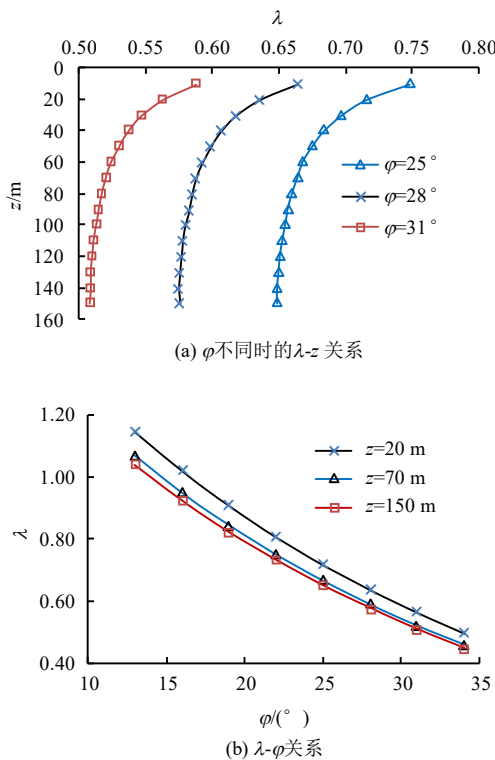


图8  $\lambda$ - $\phi$  关系曲线

Fig.8 Relationships between  $\lambda$  and  $\phi$

4.2.4  $\lambda$ - $r_0$  关系

当地基土体的  $c$ 、 $\phi$ 、 $\gamma$ 、 $z$  确定时, 改变  $\phi$ , 可得到  $\lambda$  值随  $r_0$  的变化规律。

取地基土体内摩擦角为  $\phi = 28^\circ$ ,  $c = 15$  kPa,  $\gamma = 20$  kN/m<sup>3</sup>,  $r_0$  分别为 0.5、1.0、1.5 m,  $z$  范围为

10~150 m, 绘制  $\lambda$ - $z$  关系曲线如图 9(a)所示。由图可知, 在  $z = 150$  m 深度处  $\lambda$  值已基本达到稳定, 因此取  $z = 150$  m 处, 另外取  $z = 20$  m 和  $z = 70$  m 处, 竖向孔半径  $r_0$  范围为 0.5~4.0 m, 地基土体其他参数仍取上述值, 得到  $\lambda$ - $\phi$  关系曲线如图 9(b)所示。

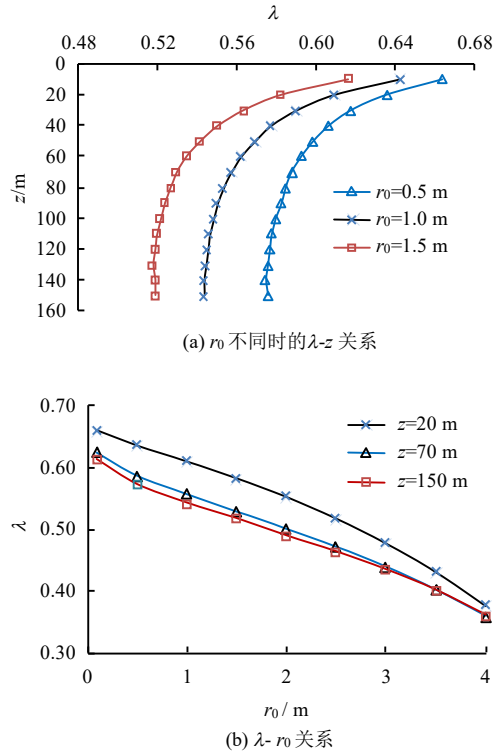


图9  $\lambda$ - $r_0$  关系曲线

Fig.9 Relationships between  $\lambda$  and  $r_0$

由图 9(b)所示  $\lambda$ - $\phi$  关系曲线,  $\lambda$  值随竖向孔半径  $r_0$  的增大而减小, 且随深度增大, 不同竖向孔半径时的  $\lambda$  值差别越小。

5 轴对称竖向孔孔壁土压力分布规律

依据已知的土体的  $\phi$ 、 $c$ 、 $\gamma$ 、 $r_0$ 、 $z$ , 采用上述迭代法解得  $\lambda$  值后代入式 (23), 可得竖向孔孔壁主动土压力  $p_a$ 。

$\gamma$  变化范围不大, 因此  $p_a$  可看做是土体的  $\phi$ 、 $c$ 、 $r_0$  以及  $z$  的函数, 即  $p_a = p_a(\phi, c, r_0, z)$ 。同样采用固定变量法, 可得到竖向孔孔壁主动土压力  $p_a$  的一些规律。

5.1 黏聚力  $c$  的影响分析

取地基土体  $\phi = 28^\circ$ ,  $c$  分别为 10、15、20 kPa,  $\gamma = 20$  kN/m<sup>3</sup>,  $r_0 = 0.5$  m,  $z$  范围为 10~150 m, 绘制不同黏聚力条件下轴对称解答  $p_a$ - $z$  关系曲线, 如图 10(a)所示。

作为对比, 根据朗肯土压力解答计算平面应变问题主动土压力, 地基土体内摩擦角为  $\phi = 28^\circ$ , 黏

聚力  $c$  分别为 10、15、20 kPa，重度为  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ，深度  $z$  范围为 10~150 m，绘制不同黏聚力土体的  $p_a$ - $z$  关系曲线，如图 10(b)所示。

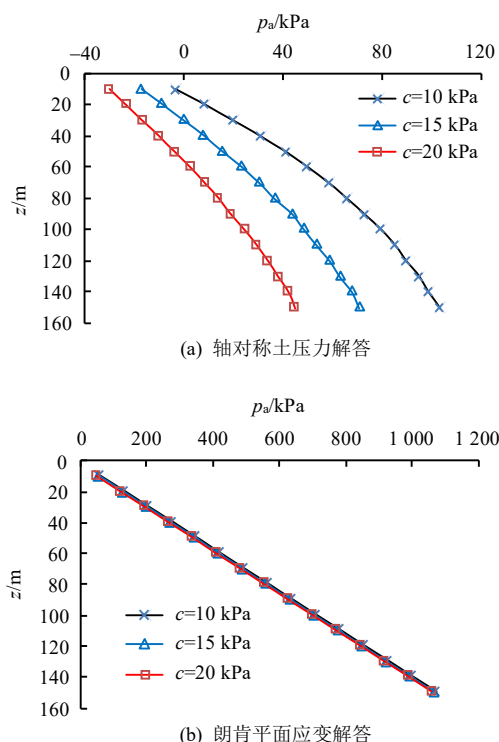


图 10 不同黏聚力的  $p_a$ - $z$  关系曲线  
Fig.10 Relationships of  $p_a$ - $z$  with different cohesives

由图可知，轴对称条件下主动土压力随深度呈非线性增长，且黏聚力的影响更加明显，平面应变条件下由于土压力本身较大，黏聚力不同引起的土压力差异相对于土压力本身不明显。

### 5.2 内摩擦角 $\varphi$ 的影响分析

取地基土体  $c = 20 \text{ kPa}$ ， $\varphi$  分别为  $25^\circ$ 、 $28^\circ$ 、 $31^\circ$ ， $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ， $r_0 = 0.5 \text{ m}$ ， $z$  范围为 10~150 m，绘制不同内摩擦角条件下轴对称解答  $p_a$ - $z$  关系曲线，如图 11(a)所示。

作为对比，根据朗肯土压力解答计算平面应变问题主动土压力， $c = 20 \text{ kPa}$ ， $\varphi$  分别为  $25^\circ$ 、 $28^\circ$ 、 $31^\circ$ ， $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ， $z$  范围为 10~150 m，绘制不同内摩擦角土体的  $p_a$ - $z$  关系曲线，如图 11(b)所示。

由图可知，轴对称条件下主动土压力随深度呈非线性增长，且随深度增加，内摩擦角的影响更加明显。

### 5.3 竖向孔半径 $r_0$ 的影响分析

取地基土体  $c = 20 \text{ kPa}$ ， $\varphi = 28^\circ$ ， $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ， $r_0$  分别为 0.5、1.0、1.5 m， $z$  范围为 10~150 m，绘制不同轴对称竖向孔半径条件下轴对称解答  $p_a$ - $z$  关系曲线如图 12(a)所示。

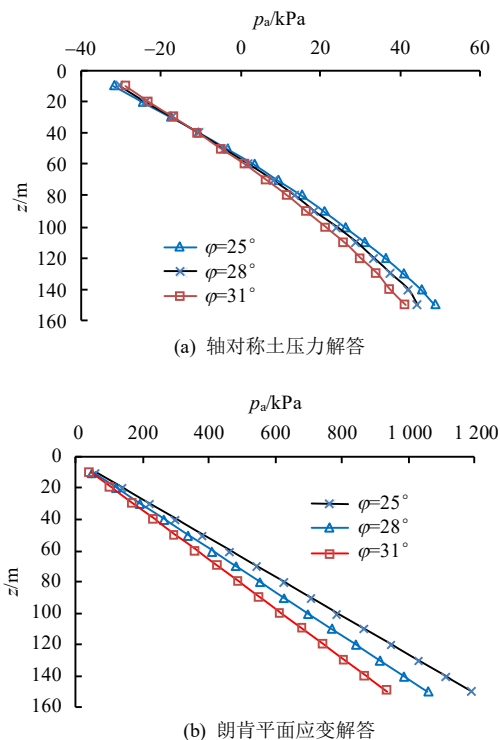


图 11 不同内摩擦角的  $p_a$ - $z$  关系曲线  
Fig.11 Relationships of  $p_a$ - $z$  with different friction angles

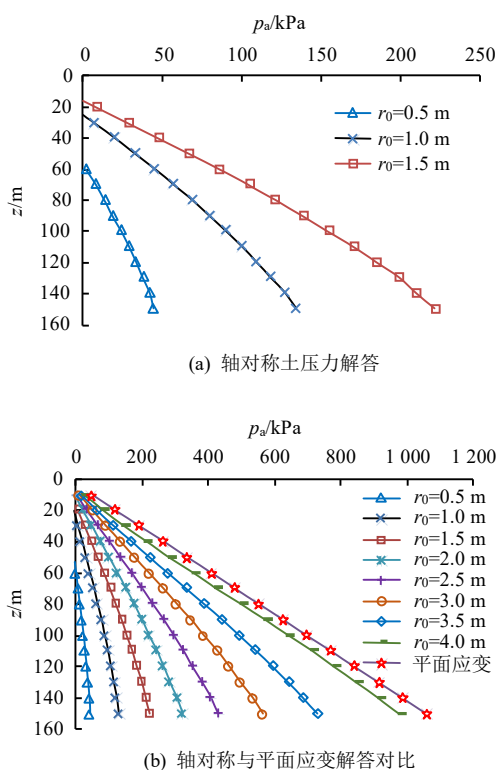


图 12 不同半径的  $p_a$ - $z$  关系曲线  
Fig.12 Relationships of  $p_a$ - $z$  with different radii

作为对比，根据朗肯土压力解答计算平面应变问题主动土压力，地基  $c = 20 \text{ kPa}$ ， $\varphi = 28^\circ$ ， $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ， $z$  范围为 10~150 m，绘制不同轴对称竖

向孔半径的  $p_a - z$  关系曲线并和不同轴对称竖向孔半径的主动土压力对比, 如图 12(b)所示。

由图 12 可知, 轴对称竖向孔半径  $r_0$  增大至 4.0 m 左右时, 孔壁主动土压力已趋近平面应变问题的主动土压力解答, 当  $r_0$  超过 4.0 m 时, 当前求解精度 ( $p_f$  值取为 0.025) 已无法求得  $\lambda$  的近似值, 欲求得  $\lambda$  的近似值需进一步提高计算精度, 付出的计算代价也越大, 但由上图可以看出, 当  $r_0$  为 4.0 m 时轴对称主动土压力计算值, 已经可以近似为平面应变问题, 可利用平面应变土压力理论求解, 因此本方法的应用范围可定义为  $r_0 \leq 4.0$  m。

## 6 桩孔泥浆护壁有效性验证

利用本文解答可验证灌注桩等桩孔采用泥浆护壁措施的有效性。

假设地基土体  $c = 10$  kPa,  $\varphi = 14^\circ$ ,  $\gamma = 20$  kN/m<sup>3</sup>,  $r_0 = 1.0$  m,  $z = 100$  m, 采用泥浆护壁支护措施, 护壁泥浆的重度  $\gamma = 12$  kN/m<sup>3</sup>。

应用本文滑移线场法计算孔壁所受主动土压力, 并和平面应变主动土压力及泥浆侧压力随深度的变化绘制在同一坐标系中, 如图 13 所示。

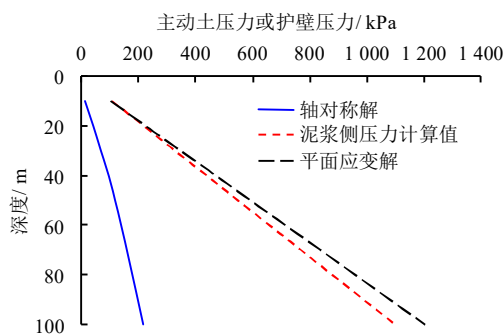


图 13 泥浆护壁有效性验证  
Fig.13 Validation of slurry supporting

由图可见, 此时的泥浆侧压力与平面应变计算的主动土压力几乎相同, 且远远大于轴对称问题的主动土压力, 由土压力分析桩孔采用泥浆护壁措施是足够安全的。

## 7 结 论

(1) 轴对称主动土压力随深度增大而增大, 且不同黏聚力  $c$ 、内摩擦角  $\varphi$  和轴对称竖向孔半径  $r_0$  情况下接近地面一定深度范围内  $p_a$  均为负值, 这是由于式 (23) 中黏聚力  $c$  引起的土压力为负值的缘故, 且轴对称主动土压力为负值的深度  $z_0$  随土体黏聚力的增大而增大, 随内摩擦角的增大而增大, 与平

面应变问题土压力解答一致。

(2) 轴对称竖向孔孔壁主动土压力随深度增大呈非线性增大, 且随深度的增大, 增长速率减小, 与平面应变问题的朗肯土压力解答呈线性关系不同。

(3) 随研究点深度增加, 土体黏聚力和内摩擦角对轴对称竖向孔孔壁主动土压力的影响逐渐增大。

(4) 轴对称竖向孔半径  $r_0$  对孔壁主动土压力影响明显, 轴对称条件下主动土压力比平面应变条件下小, 因此, 工程上采用平面应变条件下的主动土压力来代替轴对称条件下的主动土压力过于保守。轴对称竖向孔半径  $r_0$  越大, 同一深度处孔壁主动土压力值越大, 越接近平面应变问题的主动土压力解答, 且孔壁主动土压力随深度变化越接近线性。

(5) 轴对称竖向孔半径  $r_0$  增大至 4.0 m 左右时, 孔壁主动土压力已趋近平面应变问题的主动土压力解答, 当  $r_0$  超过 4.0 m 时, 计算代价较大, 而精度提高不明显, 因此本方法的应用范围可定义为  $r_0 \leq 4.0$  m。

(6) 利用该解答可精确计算轴对称竖向圆孔孔壁主动土压力, 以工程中常见的泥浆护壁为例可验证该支护措施有效性, 也可用于竖向孔支护结构设计等。

## 参 考 文 献

- [1] HOULSBY G T, WROTH C P. Direct solution of plasticity problems in soils by the method of characteristics[C]//Numerical Methods in Geomechanics, Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Conference. Toronto: A. A. Balkema, 1982.
- [2] STEINFELD K. Über den Erddruck auf Schacht-und Brunnenwandungen[C]//Contribution to the Foundation Engineering Meering. Hambrug: [s. n.], 1958: 111-126.
- [3] LORENZ H. Offene Senkkasten[M]. [S. l.]: Grundbau-Taschenbuch, 1953, 327-337.
- [4] BEREZANTZEV V G. Earth pressure on the cylindrical retaining walls[C]//Conference on Earth Pressure Problems. Brussels: [s. n.], 1958: 21-24.
- [5] MRÓZ Z. Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow[J]. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1967, 18(2): 219-236.
- [6] PRATER E G. An examination of some theories of earth pressure on shaft linings[J]. *Canadian Geotechnical*



- Journal**, 1977, 14(1): 91—106.
- [7] CHENG Y M, HU YA-YUAN, WEI W B. General axisymmetric active earth pressure by method of characteristics—theory and numerical formulation[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2007, 7(1): 1—15.
- [8] CHENG Y M, AU S K, HU Y Y, et al. Active pressure for circular cut with Berezantzev's and Prater's theories, numerical modeling and field measurements[J]. **Soils and Foundations**, 2008, 48(5): 621—631.
- [9] 马英明. 立井厚表土层地压的理论与实践[J]. 中国矿业大学学报, 1979, (1): 48—72.  
MA Ying-ming. Theory and practice of ground pressure on shaft due to thick overburden[J]. **Journal of China University of Mining & Technology**, 1979, (1): 48—72.
- [10] 崔广心. 深厚表土中竖井井壁的外载[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(3): 294—298.  
CUI Guang-xin. Loading of shaft lining for deep alluvium[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(3): 294—298.
- [11] 尹志强, 余成学, 姚海林, 等. 考虑土拱效应的黏性填土排桩桩后土压力研究[J]. 岩土力学, 2017, 39(增刊 1): 131—139.  
YIN Zhi-qiang, SHE Cheng-xue, YAO Hai-lin, et al. Research on earth pressure behind row piles from clayey backfill considering soil arching effect[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 39(Supp.1): 131—139.
- [12] 李广信, 张丙印. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013.  
LI Guang-xin, ZHANG Bing-yin. Soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013.
- [13] 松冈元(日). 土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001.  
HAJIME MATSUOKA. Soil mechanics[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2001.
- [14] ARNOLD VERRUIJT. Soil mechanics[M]. Dutch: Press of Delft University of Technology, 2001.
- 
- 上接第 4124 页
- [20] KROKIDA M K, MAROULIS Z B. Effect of drying method shrinkage and porosity[J]. **Drying Technology**, 1997, 15(10): 2441—2458.
- [21] 中华人民共和国水利部. GB/T50123—1999 土工试验方法标准[S]. 北京: 中国计划出版社, 1999.  
The Ministry of Water Resources of the People's Republic of China. GB/T 50123—1999 Standard for soil test method[S]. Beijing: China Planning Press, 1999.
- [22] ASTM. D4404—84 Standard test method for determination of pore volume and pore volume distribution of soil and rock by mercury intrusion porosimetry[S]. United States: ASTM International, 2004.
- [23] DAS B M. Advanced soil mechanics (third edition)[M]. New York: Taylor & Francis, 2008.
- [24] 雷祥义. 中国黄土的孔隙类型与湿陷性[J]. 中国科学, 1987, 38(12): 1309—1316.  
LEI Xiang-yi. Chinese loess pore type and collapsibility[J]. **Science China**, 1987, 38(12): 1309—1316.
- [25] 王清, 王剑平. 土孔隙的分形几何研究[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(4): 496—498.  
WANG Qing, WANG Jian-ping. A study on fractal of porosity in the soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2000, 22(4): 496—498.
- [26] GÓMEZ-CARRACEDO A, ALVAREZ-LORENZO C, COCA R, et al. Fractal analysis of SEM images and mercury intrusion porosimetry data for the microstructural characterization of microcrystalline cellulose-based pellets[J]. **Acta Materialia**, 2009, 57(1): 295—303.
- [27] ZHANG B, LIU W, LIU X. Scale-dependent nature of the surface fractal dimension for bi- and multi-disperse porous solids by mercury porosimetry[J]. **Applied Surface Science**, 2006, 253(3): 1349—1355.