

# 安徽师范大学

## 2016 年招收硕士研究生考题

科目名称: 概率论与数理统计 科目代码: 895

考生请注意: 答案必须写在答题纸上, 写在本考题纸上的无效!

说明:

1. 可以使用不带存储功能的计算器.

2. 可能要用到的(上侧)分位数:

$$t_{0.05}(7) = 1.895, t_{0.05}(8) = 1.860, t_{0.05}(9) = 1.833, t_{0.05}(10) = 1.813,$$

$$t_{0.025}(7) = 2.365, t_{0.025}(8) = 2.306, t_{0.025}(9) = 2.262, t_{0.025}(10) = 2.228,$$

$$F_{0.05}(4, 4) = 6.39, F_{0.05}(5, 5) = 5.05, F_{0.025}(4, 4) = 9.60, F_{0.025}(5, 5) = 7.15.$$

一、单项选择题(每小题 5 分, 共 30 分)

1. 设事件  $A$  与任意事件均独立, 则  $P(A) =$ \_\_\_\_\_.

- A. 0                      B. 1                      C. 0 或 1                      D. 条件不足, 无法确定

2. 设  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{x^2}{6}}$ ,  $-\infty < x < \infty$ , 则  $D(-X+4) =$ \_\_\_\_\_.

- A. 1                      B. 3                      C. 7                      D. 13

3. 设  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $E(X) =$ \_\_\_\_\_.

- A. 2                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 4                      D.  $\frac{1}{4}$

4. 设  $X$  服从二项分布  $B(20, 0.5)$ , 则  $E(X^2) =$ \_\_\_\_\_.

- A. 105                      B. 100                      C. 10                      D. 5

5. 将一支粉笔随机地折成两断, 则这两部分长度之间的相关系数是\_\_\_\_\_.

- A. 0                      B. 1                      C. -1                      D. 条件不足, 无法确定

6. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2 > 0$  已知,  $\mu$  未知,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自  $X$  的样本, 则下列不是统计量的是\_\_\_\_\_.

- A.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$       B.  $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$       C.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2}$       D.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$

二、判断题 (每小题 4 分, 共 20 分; 在正确命题后面打  $\surd$ , 错误命题后面打  $\times$ .)

1. 若  $P(A) = 0$ , 则  $A$  一定是不可能事件. \_\_\_\_\_
2. 若随机变量  $(X, Y)$  服从二元正态分布, 且  $X$  与  $Y$  不相关, 则  $X$  与  $Y$  独立. \_\_\_\_\_
3. 设一个正态总体均值  $\mu$  的 95% 的置信区间是  $(8.6, 10.4)$ , 则这意味着  $\mu$  有 95% 的概率落在区间  $(8.6, 10.4)$  中. \_\_\_\_\_
4. 当自由度趋于无穷大时,  $t$  分布的极限分布是标准正态分布. \_\_\_\_\_
5. 在假设检验中, 原假设  $H_0$  和对立假设  $H_1$  的地位是平等的. \_\_\_\_\_

三、(10 分) 设  $A, B$  为两个事件, 满足  $P(A|B) = 0.5$ ,  $P(B|A) = 0.8$ ,  $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.2$ , 其中  $\bar{A}$  表示  $A$  的对立事件, 试求  $P(A \cup B)$ .

四、(10 分) 设  $X_1, \dots, X_n$  为取正值的随机变量, 且具有相同的分布, 试求

$$E\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right), \text{ 其中 } 1 \leq k \leq n.$$

五、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c(1+xy), & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

- (1) 求常数  $c$ ;
- (2) 求  $X$  和  $Y$  的边缘密度函数, 并判断  $X$  与  $Y$  是否独立.

六、(10分) 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_{10}, X_{11})$  是来自总体  $X$  的样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2, \quad Y = \frac{k(\bar{X} - X_{11})}{S},$$

试求  $k$  的值, 使得  $Y$  服从  $t$  分布 (给出详细证明过程, 并指出  $t$  分布的自由度).

七、(15分) 设随机变量  $X, Y$  和  $Z$  满足  $D(X) = D(Z) < +\infty$ ,  $D(Y) = 4D(X)$ , 且相关

$$\text{系数 } \rho_{X,Y} = -1, \quad \rho_{X,Z} = \frac{1}{2},$$

(1) 证明  $Y$  与  $Z$  的相关系数  $\rho_{Y,Z} = -\frac{1}{2}$ ;

(2) 求  $X$  与  $Y+Z$  的相关系数  $\rho_{X,Y+Z}$ .

八、(15分) 为比较两种不同牌号的汽油 A 和 B 对同一型号的汽车行驶里程有无差异, 现对 10 辆汽车进行了 4 升汽油行驶里程的试验, 其中 5 辆用汽油 A, 另 5 辆用汽油 B, 各车辆行驶的里程数 (单位: km) 如下:

汽油 A: 44.0 43.2 46.6 48.0 47.2

汽油 B: 48.4 50.2 46.4 49.2 45.8

假设两种牌号的汽油的行驶里程均服从正态分布, 且方差相等, 试在水平  $\alpha = 0.05$  下检验汽油 A 和汽油 B 在 4 升油量下所行驶的里程数有无差异.

九、(15分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自于均匀分布  $U(0, \theta)$  的样本, 其中  $\theta > 0$  为未知参数,

(1) 求  $\theta$  的最大似然估计  $\hat{\theta}$ ;

(2) 估计量  $\hat{\theta}$  是无偏估计吗?

十、(15分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自于参数为  $\lambda$  的 Poisson 分布总体的样本, 其中  $\lambda$  为未知参数,

(1) 求  $\lambda$  的充分完备统计量;

(2) 求  $\lambda^2$  的一致最小方差无偏估计量.