★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题 （25 分）

（1）质量为m的粒子在一维势场$V=V(x)$中运动，写出薛定谔方程和定态薛定谔方程。

（2）求对易子$[x^n, p_x]$，这里x和p_x为坐标和动量算符。

（3）写出轨道角动量算符L_x，L_y和L_z之间的对易关系，并证明$[L^2, L_x]=0$。

第二题 （25 分）

质量为m的粒子在一维无限深势阱中运动，$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a \\ \infty, & |x|>a\end{cases}$，这里$a$为正常数。试求解定态薛定谔方程，得到定态能量和归一化的定态波函数。

第三题（25 分）

质量为m的粒子在一维谐振子势$V(x)=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$中运动，$\omega$为振动角频率。如果$t=0$时，粒子处于态$\Psi(x,0)=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\psi_0(x)+c\psi_2(x)$，其中$\psi_0(x)$和$\psi_2(x)$是基态和第二激发态的归一化能量本征函数，$c$为待定的正常数。(1)求常数$c$；（2）求$t$时刻波函数；（3）求粒子能量测量值及其概率；（4）求粒子位置和动量平均值。

第四题 （25 分）

证明在半壁无限深方势阱$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0 \\ 0, & 0<x<a \\ V_0, & x>a\end{cases}$中，存在束缚态的条件为$V_0a^2 \geq \dfrac{\pi^2\hbar^2}{8m}$，这里$V_0>0$，$m$为粒子质量。

第五题 （25 分）

一个自旋 1/2 粒子的哈密顿量为$H=\dfrac{\hbar\omega}{5}(3\sigma_z+4\sigma_x)$，这里$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$和$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$为泡利矩阵。（1）求粒子能级和归一化的本征态；（2）如果$t=0$时，粒子处于自旋态$\chi=\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$，求$t$时刻的自旋态。

第六题 （25 分）

（1）氢原子基态波函数为$\psi = \dfrac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}}$，这里$a$为玻尔半径。写出氢原子基态能量值和玻尔半径的值。

（2）考虑氢原子的核（质子）不是点电荷，而为半径为R的均匀带电球体（R远小于a）。已知在该带电球体下，电子的势能为$V(r)=\begin{cases}\dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\\ \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{r^2}{R^2}-3\right), & r<R\end{cases}$，试用微扰论计算氢原子基态能量的一级修正。