doi:10.3969/j.issn.1671-9247.2018.01.024

数学分析习题课教学研究与实践

杨 刘,汪忠志
(安徽工业大学 数理科学与工程学院,安徽 马鞍山 243032)

摘 要:习题课是数学分析教学过程的一个重要环节,是提高教学质量的有效手段。我们在教学实践中,结合课堂,适当地补充拓展;结合作业,有效地利用错误;重视反例、反问题,引导发散思维;注重互动与练习,促进思考,取得了很好的教学效果。

关键词:数学分析;习题课;教学方法
中图分类号:G642.0 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-9247(2018)01-0079-02

On the Teaching of Mathematics Analysis Exercises Class

YANG Liu, WANG Zhong-zhi
(School of Mathematics & Physics Science and Engineering, AHUT, Ma'anshan, 243032, Anhui, China)

Abstract: Mathematical analysis exercises class is an important part of mathematical analysis teaching, which is an effective way to improve teaching quality. In teaching practice, we combine class with appropriate expansion, combine exercise with effective use of mistakes in homework, guide divergent thinking by emphasizing counterexample and counterexample problems, and emphasize interaction and practice to promote thinking and achieve better teaching effect.

Key words: mathematical analysis; exercises class; teaching method

数学分析是大学数学与应用数学、信息与计算科学、统计学三个专业最重要的基础课程之一。数学分析的教学目的是使学生逐步提高数学修养,特别是分析的修养,积累从事进一步学习所需要的数学知识,掌握数学的基本思想方法,最终使学生的数学思维能力得到根本的提高。要想实现这一目的,最有效的办法就是进行充分的解题训练。著名数学家苏步青先生在学生时代曾经做过一万道微积分的习题,思维得到了充分的训练,打下了扎实的数学基础,在微分几何领域做出了举世瞩目的成就。作为教师,也应该针对学生的解题情况做必要的指导。实践表明,在数学分析主干课程的基础上,开设数学分析习题课能够对数学分析的内容与方法进行系统的复习、归纳、总结与拓广,启发学生深入思考、严谨叙述,逐渐提高学生的数学素养、培养学生的创新能力。值得注意的是,数学分析习题课绝不是象征性地讲几个题目,也不是盲目地搞题海战术,而是应该做到结合课堂,根据学生们掌握的情况,广泛阅读,精心准备材料,课程中巧妙启发,调动学生积极主动参与并对效果进行考核。我们结合多年的教学实践,就如何上好数学分析习题课谈谈自己的几点体会。

一、结合课堂,适当地补充拓展

教师在准备习题课之前,应该先旁听主干课,了解主干课的教学进度和学生掌握的情况。好的课后练习是教材的重要补充,好的习题课也应该是课堂的有效延伸。在准备习题课的同时,应该结合授课教师课堂所讲,结合教材内容,进行必要的补充和适当的拓展。例如,在函数极限的习题课上可以让学生尝试证明:设极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{u\to A}g(u)=B$,在 a 的某空心邻域内 $f(x)\neq A$,求证:复合函数的极限$\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=B$。一般教材里或课堂上可能没有给出该命题的严格证明,但是它非常有用。这个命题能够使学生在求函数极限时具备整体的思想,譬如对如下求极限的过程$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$,认识的就会比较深刻,否则学生对稍复杂一点的极限只是比较笼统地用“趋向于”来理解,如此学生在学习导数的概念时就可能产生$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$的错误结论。

又如,在学习了罗尔中值定理后的习题课中,可以布置这样一道习题:写出无限区间$[a,+\infty)$上的罗尔中值定理——若函数 f 满足:(1)在区间$[a,+\infty)$上连续;(2)在区间$(a,+\infty)$内可导;(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$,则在$(a,+\infty)$内存在 ξ,使得 $f'(\xi)=0$,并引导学生们给出证明。学生们一般会通过模仿教材上罗尔中值定理的证明来给出证明,我们还需要引导学生们再进一步思考,能否通过一个变换将无限区间上的罗尔中值定理划归到有限区间上。这样的安排,对加深学生对课堂知识的理解,激发学习兴趣,培养学生发现问题和解决问题的能力都是十分有益的。

二、结合作业,有效地利用错误

美国心理学家桑代克认为学习就是动物(包括人)通过不断地尝试形成刺激—反应联结,从而不断减少错误的过程[1]。错误暴露了学生认识上的盲点和误区,及时总结学生作业中犯的错误甚至巧妙地设计错例是行之有效的教学方法。习题课上,教师可以根据学生近期的作业情况,将其中的典型错误进行分析、讲解。如大一刚学数学分析的学生在求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

往往会犯如下错误:

收稿日期:2017-12-23
基金项目:安徽省高等学校质量工程项目(2014ZY023,2015jyxm110,2017kfk028);安徽工业大学教学研究项目(2014jy33)
作者简介:杨 刘(1986—),男,安徽亳州人,安徽工业大学数理科学与工程学院讲师,博士,硕士生导师。
汪忠志(1965—),男,安徽安庆人,安徽工业大学数理科学与工程学院教授,硕士生导师。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$=0+0+\cdots+0=0$$

这说明学生对数列极限的性质理解不准确。我们通过举例：对每个正整数 n，$\frac{n}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}$. 等式两边取极限有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{n个}$$
$$=0+0+\cdots+0=0$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，得到 1 = 0 这样荒谬的结果。这样的设计无疑加深了学生对有限和无限的理解。学习过程中不少学生对解题有一定的思路，却无法用准确的数学语言描述清楚。作为教师，有必要在习题课上对一些典型习题给出规范的解答过程，帮助学生掌握数学语言的表达方式。允许学生犯错，鼓励学生找错、纠错有助于培养学生的质疑精神，只有质疑才能不断创新。而这正是我们一味追求分数的传统教学所欠缺的。

三、重视反例、反问题，引导发散思维

反例是构造法中的一种常见方法。数学中的反例，是指某数学命题不成立的例子，它是相对于数学命题而言的具体实例，是反驳与纠正错误的一种方法[2]，反例在数学学科的发展中发挥着重要作用。在数学分析的发展历史上，数学家们曾经一直猜测：连续函数在其定义区间中，至多除去可列个点外都是可导的。德国大数学家魏尔斯特拉斯于 1872年利用函数项级数构造出了一个处处连续而处处不可导的函数，这在数学界引起极大的震动，反过来又促使数学家们去思索新的方法对这类函数进行研究，从而促成了一门新的学科“分形几何”的产生。所以在数学分析习题课中我们应该有意识地引导学生分析定理或问题的条件，养成改进结论或举反例的思考习惯。一个有深度的反例往往需要丰富的想象和敏锐的觉察，因此通过构造反例对思维的训练强度是非常大的。例如我们知道级数与广义积分有相似的性质，而一个收敛级数的一般项是个无穷小量，即若级数$\sum a_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。自然地，在广义积分上，我们可以讨论若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，是否有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$。并引导学生构造反例，然后进一步问分别增加条件：f 连续、f 单调、f 可导、f 一直连续是否有反例，具体过程见文献[3]。这样的训练可以帮助学生较为深入地认识广义积分及其与级数的关系，也有助于培养学生发散思维。

此外，我们还可以引导学生考虑一个命题的逆命题，例如，如果函数 f 在 x=0 可导，容易说明极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}$存在；反之，可以考虑如果该极限存在，是否能够得到 f 在 x=0 可导。事实上，我们容易举出一个不连续的函数使得该极限存在，所以我们可以进一步追问增加条件 f 在 x=0 连续，是否能够得到 f 在 x=0 可导。实际上这样的设计已经是在引导学生逐步深入的思考。在数学分析习题课中通过注重反例和反问题的应用，对于学生理解概念和理论有着重要的作用，可以使学生澄清对某些概念和性质的模糊认识，克服对所学知识理解的偏差。同时也会提高学生数学素养和科学的研究探索能力。

四、注重互动与练习，促进思考

学生对数学分析的学习感到困难的另一个主要原因是缺少足够的训练，数学分析习题课应该调动学生学习与思考的主动性，促使学生自觉地进行数学训练。习题课应特别注重“练”，教师的讲解只是一个示范与启发，不能代替学生自己的实践与思考。讲解习题的目的是帮助学生巩固知识，培养其思维能力和数学技能。要特别注意与学生交流互动，观察学生的反应情况，将启发式的教学思想贯穿于整个教学过程。此外，我们还应该根据所讲内容，有针对性地布置练习复习巩固所学的方法加深学生的理解。例如在习题课上我们讲解例题：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_1+\cdots+a_n}{n}=a$。即收敛数列的平均值数列也收敛于同一极限。之后我们可以布置如下相关的练习：

若$\lim\limits_{n\to\infty}=a$，$p_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a$。

即将上述例题推广至加权平均数列的情形。这样的互动可促进学生尽快达到举一反三、由表及里的境界。

除此之外，研究能力的培养需要合适的研究型题目作为基础训练[4]。教师可以结合课堂教学对一些新的科研小品进行处理后在习题课中进行讲解甚至让学生报告讨论。例如学生在学习微分中值定理时，容易将中值误解成“区间中点的函数值”，结合数学月刊文献[5]，可以给学生们介绍究竟什么样的函数的微分中值定理的中值才是“区间中点的函数值”。也可以对上习题课的学生进行分组，给每个小组一个专题，让该组学生根据制定的专题自己搜索材料、进行整理和报告、针对报告进行提问。为了鼓励学生积极参与，我们还可以将这些活动与考核结合起来。这样的处理不仅能促进学生对课堂知识的理解，也有助于研究型人才的培养。

五、结语

总之，习题课教学是数学分析课程教学的重要组成部分，是提高教学质量的有效方式。实践表明，数学分析习题课能够加深学生对基本概念和定理的认识；能够激发学生的学习热情，启发他们深入思考；能够拓宽学生的视野提高他们的数学素养；能够帮助学生养成良好的学习习惯并叩开高等数学学习和研究之门。如何充分发挥习题课这一重要的教学环节的积极作用，并与其它环节相得益彰，不断提高数学分析课程的教学质量，是我们在今后教学实践中需要不断探索和思考的重要课题。

参考文献：

[1] 顾明远. 教育大辞典[M]. 上海：上海教育出版社，1998.
[2]郑俊艳. 反例在数学分析中的作用及构造分析[J]. 德州学院学报，2014(30)：40-45.
[3]汪林. 数学分析中的问题和反例[M]. 北京：高等教育出版社，2015.
[4]向昭银，黄廷祝. 研究型教学融入数学分析习题课的教学原则[J]. 大学数学，2012 (28)：151-154.
[5]P. Carter ，D. Lowryduda，On Functions Whose Mean Value Abscissas Are Midpoints， with Connections to Harmonic Functions[J]. *American Mathematical Monthly*，2017，124 (6)：535-542.

（责任编辑 汪继友）